Tekrarlı Permütasyon Uygulamaları -1

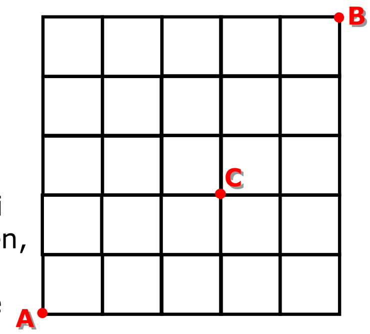
Muharrem Şahin

Aşağıda, birim karelerle oluşturulmuş şekiller A noktası ile B noktasını birbirine bağlayan yolların birer modelidir. A'daki hareketli, birim karelerin kenarları ile belirtilen yolları kullanarak, en kısa yoldan B'ye gidecektir.

Örnek Problem – 1

a.
A'daki hareketli C'den geçerek, A'dan B'ye kaç değişik biçimde gidebilir?

b.
A'daki hareketli C'den geçmeden, A'dan B'ye kaç değişik biçimde gidebilir?



Çözüm

a.

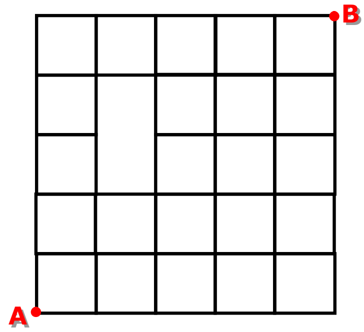
$$s(d_{ACB}) = s(d_{AC}) \cdot s(d_{CB})$$
$$= \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!}$$
$$= 100$$

b.

$$s(d_{AB}) - s(d_{ACB}) = \frac{10!}{5!\,5!} - \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!}$$
$$= 252 - 100$$
$$= 152$$

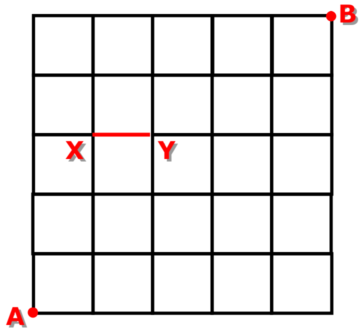
Örnek Problem - 2

A'daki hareketli A'dan B'ye kaç değişik biçimde gidebilir?



Çözüm

$[XY]$ yolunu ekleyelim:



$$s(d_{AXYB}) = s(d_{AX}) \cdot s(d_{YB})$$
$$= \frac{4!}{1!\,3!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!}$$
$$= 40$$

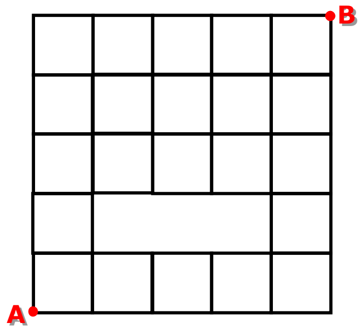
$$s(d_{AB}) = \frac{10!}{5!\,5!}$$
$$= 252$$

$[XY]$'den geçmeyen yolların sayısı:

$$s = s(d_{AB}) - s(d_{AXYB})$$
$$= 252 - 40$$
$$= 212$$

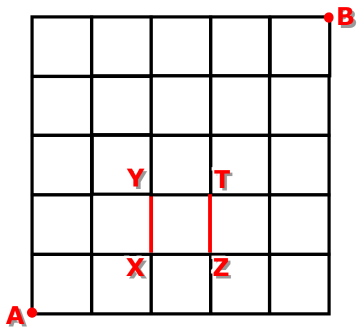
Örnek Problem - 3

A'daki hareketli A'dan B'ye kaç değişik biçimde gidebilir?



Çözüm

$[XY]$ ve $[ZT]$ yollarını ekleyelim:



$$s(d_{AXYB}) = s(d_{AX}) \cdot s(d_{YB}) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 60$$

$$s(d_{AZTB}) = s(d_{AZ}) \cdot s(d_{TB}) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 40$$

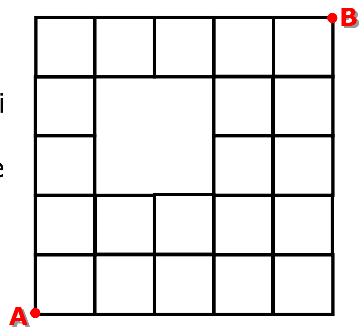
$$s(d_{AB}) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$$

$[XY]$'den geçmeyen ve $[ZT]$'den geçmeyen yolların sayısı:

$$s = s(d_{AB}) - s(d_{AXYB}) - s(d_{AZTB}) = 252 - 60 - 40 = 152$$

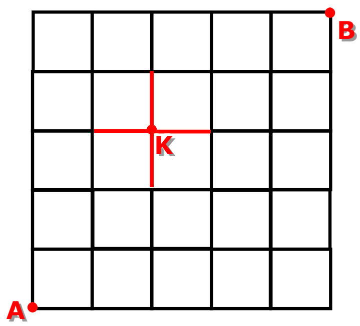
Örnek Problem – 4

A'daki hareketli A'dan B'ye kaç değişik biçimde gider.



Çözüm

K kavşağını ekleyelim:



$$s(d_{AKB}) = s(d_{AK}) \cdot s(d_{KB}) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 100$$

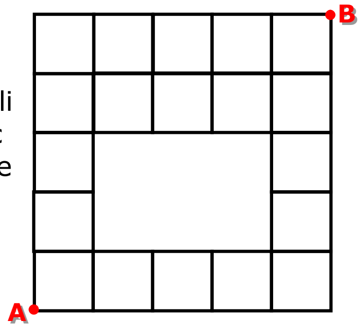
$$s(d_{AB}) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$$

K'dan geçmeyen geçmeyen yolların sayısı:

$$s = s(d_{AB}) - s(d_{AKB}) = 252 - 100 = 152$$

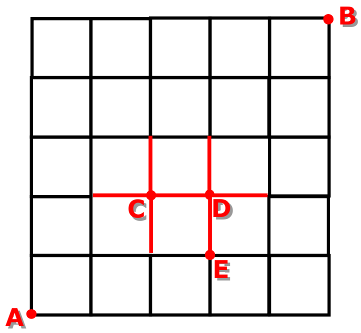
Örnek Problem – 5

A'daki hareketli A'dan B'ye kaç değişik biçimde gider.



Çözüm

C ve D kavşaklarını ekleyelim:



$$s(d_{ACB}) = s(d_{AC}) \cdot s(d_{CB})$$
$$= \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!}$$
$$= 120$$

C'den geçmeyip D'den geçen yollar AEDB yollarıdır.

$$s(d_{AEDB}) = s(d_{AE}) \cdot s(d_{DB})$$
$$= \frac{4!}{3!\,1!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!}$$
$$= 40$$

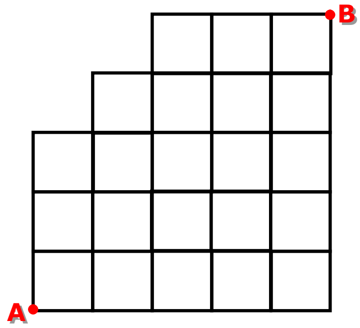
$$s(d_{AB}) = \frac{10!}{5!\,5!}$$
$$= 252$$

C'den geçmeyen ve D'den geçmeyen yolların sayısı:

$$s = s(d_{AB}) - s(d_{ACB}) - s(d_{AEDB})$$
$$= 252 - 120 - 40$$
$$= 92$$

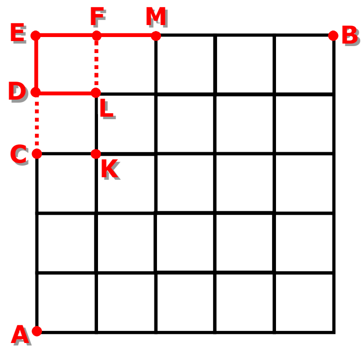
Örnek Problem –6

A'daki hareketli A'dan B'ye kaç değişik biçimde gider.



Çözüm

D, E ve F kavşaklarını ekleyelim:



$[CD]$'den geçen yolların sayısı:

$$s(d_{ACDB}) = s(d_{AC}) \cdot s(d_{DB})$$
$$= 1 \cdot \frac{6!}{5!\,1!}$$
$$= 6$$

$[CD]$'den geçmeyip $[LF]$'den geçen yollar AKLFB yollarıdır.

$$s(d_{AKLFB}) = s(d_{AK}) \cdot s(d_{LFB})$$
$$= \frac{4!}{1!\,3!} \cdot 1$$
$$= 4$$

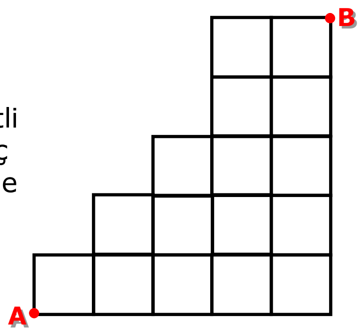
$$s(d_{AB}) = \frac{10!}{5!\,5!}$$
$$= 252$$

$[CD]$'den geçmeyen veya $[LF]$'den geçmeyen yolların sayısı:

$$s = s(d_{AB}) - s(d_{ACDB}) - s(d_{AKLFB})$$
$$= 252 - 6 - 4$$
$$= 242$$

Örnek Problem – 7

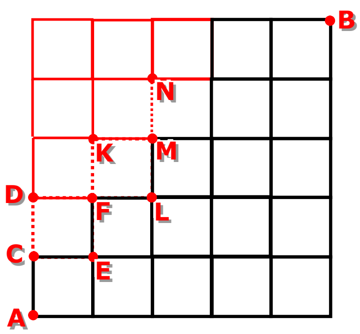
A'daki hareketli A'dan B'ye kaç değişik biçimde gider.



Çözüm

1. yol (Tekrarlı permütasyon yöntemi)

5x5 karesindeki eksik kavşakları ekleyelim:



$[CD]$'den geçen yolların sayısı:

$$s(d_{ACDB}) = s(d_{AC}) \cdot s(d_{DB})$$
$$= 1 \cdot \frac{8!}{5!\,3!}$$
$$= 56$$

$[CD]$'den geçmeyip $[FK]$'dan geçen yollar AEFKB yollarıdır.

$$s(d_{AEFKB}) = s(d_{AE}) \cdot s(d_{KB})$$
$$= \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{6!}{4!\,2!}$$
$$= 30$$

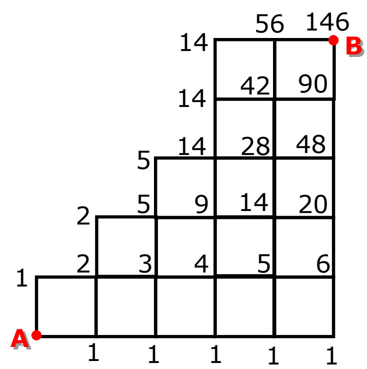
$[CD]$'den geçmeyen, $[FK]$'dan geçmeyen, $[MN]$'den geçen yollar ALMNB yollarıdır.

$$s(d_{ALMNB}) = s(d_{AL}) \cdot s(d_{NB})$$
$$= \left(\frac{4!}{2!\,2!} - 1\right) \cdot \frac{4!}{3!\,1!}$$
$$= 20$$

A'dan B'ye olası yolların sayısı:

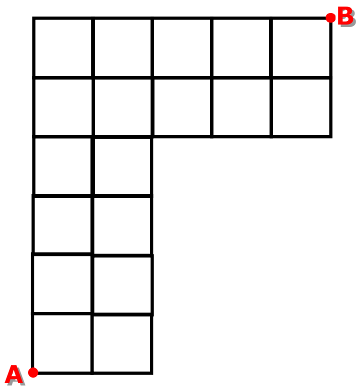
$$s = s(d_{AB}) - s(d_{ACDB}) - s(d_{AEFKB}) - s(d_{ALMNB})$$
$$= 252 - 56 - 30 - 20$$
$$= 146$$

2. yol (Doğrudan sayma yöntemi)



Her kavşaktaki sayı, o kavşağa değişik gelişlerin toplam sayısıdır.

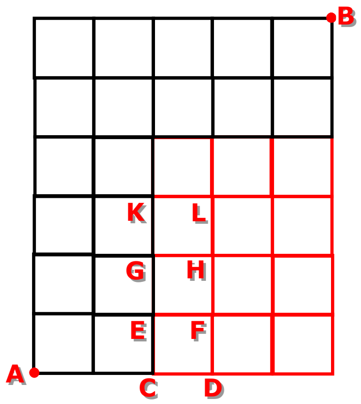
Örnek Problem - 8



A'daki hareketli, birim karelerin kenarları ile belirtilen yolları kullanarak, en kısa yoldan B'ye gidecektir.
Kaç değişik yoldan gidebilir?

Çözüm

6x5 karesindeki eksik kavşakları ekleyelim:



A'dan B'ye olası güzergahların sayısı s olsun.
6x5 karesindeki tüm güzergahlardan
CD'den geçen güzergahların sayısını,
EF'den geçen güzergahların sayısını,
GH'den geçen güzergahların sayısını,
KL'den geçen güzergahların sayısını çıkarmalıyız.

$$s = s(d_{AB}) - s(d_{ACDB}) - s(d_{AEFB}) - s(d_{AGHB}) - s(d_{AKLB})$$

$$\Rightarrow s = \frac{11!}{5!\cdot 6!} - 1\cdot\frac{8!}{2!\cdot 6!} - \frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{7!}{2!\cdot 5!} - \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!} - \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}$$

$$\Rightarrow s = 181$$

bulunur.