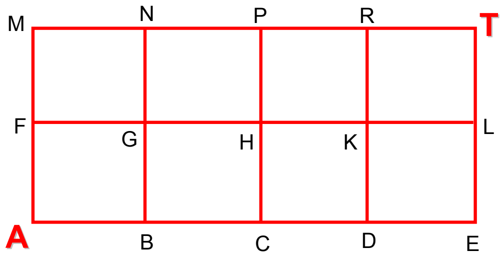
Örnek Problem -1



Şekil birim karelerden oluşmuştur.

Şekildeki A noktasından yola çıkan hareketli sağa ve yukarı yolları kullanarak T noktasına; T noktasından yola çıkan hareketli sola ve aşağı yolları kullanarak A noktasına gelecektir

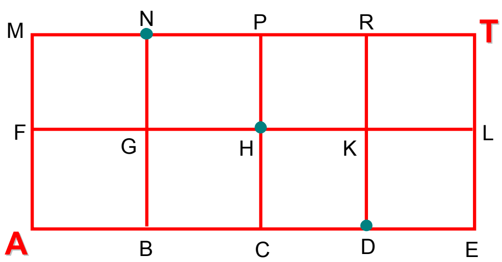
Hareketliler aynı anda ve aynı hızla harekete başlıyorlar.

a. Her kavşakta yol seçenekleri eşit olasılıklı olduğuna göre, karşılaşmaları olasılığı kaçtır?

b. Karşılaşana kadar kullanabilecekleri güzergah seçenekleri eşit olasılıklı sayıldığına göre, karşılaşmaları olasılığı kaçtır?

c. A'dan T'ye güzergah seçenekleri eşit olasılıklı ve T'den A'ya güzergah seçenekleri eşit olasılıklı sayıldığına göre, karşılaşmaları olasılığı kaçtır?

Çözüm



Hareketliler aynı anda ve aynı hızla harekete başladıklarına göre, A ve T'den eşit uzaklıktaki N, H ya da D noktalarında karşılaşabilirler.

a. N'de karşılaşmaları olasılığı:

A'dan yola çıkan AFMN, AFGN ve ABGN güzergahları ile;

T'den yola çıkan TRPN güzergahı ile N'ye gelir.

A'dan yola çıkan hareketli AFMN yolunda, A ve F kavşaklarında;

AFGN yolunda A, F, G kavşaklarında;

ABGN yolunda A, B, G kavşaklarında yol seçimi yapar.

A'dan N'ye $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ olasılıkla gelir.

T'den yola çıkan hareketli TRPN yolunda T, R, P kavşaklarında yol seçimi yapar.

T'den N'ye $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ olasılıkla gelir.

N'de karşılaşmaları olasılığı,

$P(N)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$ olur.

D'de karşılaşmaları olasılığı:

Simetrik durum nedeniyle D'de karşılaşmaları olasılığı da, $P(D)=\frac{1}{16}$ dır.

H'de karşılaşmaları olasılığı:

A'daki hareketli AFGH, ABGH ve ABCH yolları ile, $3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ olasılıkla H'ye gelir.

T'deki hareketli TRPH, TRKH ve TLKH yolları ile, $3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ olasılıkla H'ye gelir.

H'de karşılaşmaları olasılığı,

$P(H)=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$ olur.

Buna göre; hareketlilerin **karşılaşmaları olasılığı,**

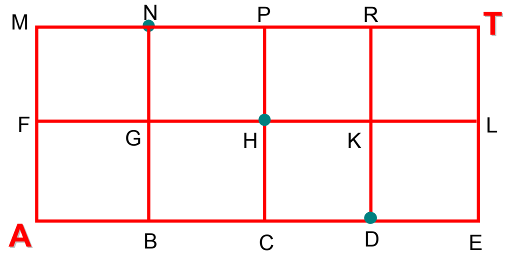
$$P(\text{Kar.})=P(N)+P(D)+P(H)$$

$$\Rightarrow P(\text{Kar.})=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{9}{64}$$

$$\Rightarrow P(\text{Kar.})=\frac{17}{64}$$

bulunur.

b.



Hareketliler aynı anda ve aynı hızla harekete başladıklarına göre, A ve T'den eşit uzaklıktaki N, H ya da D noktalarında karşılaşabilirler.

A'dan yola çıkan hareketli karşılaşma noktalarına;

N'ye $\frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$ farklı yol ile,

H'ye $\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ farklı yol ile,

D'ye $\frac{3!}{3!} = 1$ yol ile

olmak üzere, 7 farklı yoldan gidebilir.

Bunlar AFMN, AFGN, ABGN, AFGH, ABGH, ABCH, ABCD güzergahlarıdır.

Bu seçeneklerin nasıl eşit olasılıklı sayılabildiği, çeşitli yöntemlerle, kolayca açıklanabilir:

Örneğin; A'daki hareketli, bu 7 seçeneği ayrı ayrı kağıtlara yazıp kağıtları bir torbaya atar. Birini çeker. Çektiği güzergahtan gider.

Aynı düşünce ile, T'den yola çıkanın da karşılaşma noktalarına;

N'ye $\frac{3!}{3!} = 1$ farklı yol ile,

H'ye $\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ farklı yol ile,

D'ye $\frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$ yol ile

olmak üzere, 7 farklı yoldan gidebileceği bulunur.

N'de karşılaşmaları olasılığı,

$$P(N) = P(A,N)\cdot P(T,N)$$

$$\Rightarrow P(N) = \left(3\cdot\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1\cdot\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{49};$$

H'de karşılaşmaları olasılığı,

$$P(H) = P(A,H)\cdot P(T,H)$$

$$\Rightarrow P(H) = \left(3\cdot\frac{1}{7}\right)\cdot\left(3\cdot\frac{1}{7}\right) = \frac{9}{49};$$

D'de karşılaşmaları olasılığı,

$$P(D) = P(A,D)\cdot P(T,D)$$

$$\Rightarrow P(D) = \left(1\cdot\frac{1}{7}\right)\cdot\left(3\cdot\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{49} \text{ olup}$$

karşılaşmaları olasılığı,

$$P(\text{Kar.}) = P(N) + P(H) + P(D)$$

$$\Rightarrow P(\text{Kar.}) = \frac{3}{49} + \frac{9}{49} + \frac{3}{49}$$

$$\Rightarrow P(\text{Kar.}) = \frac{15}{49}$$

bulunur.

c. A'dan T'ye güzergah seçeneklerinin eşit olasılıklı ve T'den A'ya güzergah seçeneklerinin eşit olasılıklı sayılması, bu güzergahlardan birinin kura ile seçileceğini gösterir.

A'dan T'ye -ya da T'den A'ya- farklı güzergah seçeneklerinin sayısı $\frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$ tir.

A'dan yola çıkanın,

N'den geçtiği güzergahların sayısı

$$n(ANT) = \frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{3!}{3!} = 3;$$

H'den geçtiği güzergahların sayısı

$$n(AHT) = \frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 9;$$

D'den geçtiği güzergahların sayısı

$$n(ADT) = \frac{3!}{3!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3 \text{ tür.}$$

T'den yola çıkanın,

N'den geçtiği güzergahların sayısı

$n(TNA)=\frac{3!}{3!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot2!}=3$;

H'den geçtiği güzergahların sayısı

$n(THA)=\frac{3!}{2!\cdot1!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot1!}=9$;

D'den geçtiği güzergahların sayısı

$n(TDA)=\frac{3!}{1!\cdot2!}\cdot\frac{3!}{3!}=3$ tür.

Buna göre;

N'de karşılaşmaları olasılığı,

$$P(N)=P(ANT)\cdot P(TNA)$$

$$\Rightarrow P(N)=\left(3\cdot\frac{1}{15}\right)\cdot\left(3\cdot\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{25};$$

H'de karşılaşmaları olasılığı,

$$P(H)=P(AHT)\cdot P(THA)$$

$$\Rightarrow P(H)=\left(9\cdot\frac{1}{15}\right)\cdot\left(9\cdot\frac{1}{15}\right)=\frac{9}{25};$$

D'de karşılaşmaları olasılığı,

$$P(D)=P(ADT)\cdot P(TDA)$$

$$\Rightarrow P(D)=\left(3\cdot\frac{1}{15}\right)\cdot\left(3\cdot\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{25}\text{ olup}$$

karşılaşmaları olasılığı,

$$P(Kar.)=P(N)+P(H)+P(D)$$

$$\Rightarrow P(Kar.)=\frac{1}{25}+\frac{9}{25}+\frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow P(Kar.)=\frac{11}{25}$$

bulunur.

ÖNEMLi NOT

Bazı öğretmenlerim, yol seçimlerinin kavşaklarda yapılabileceğini, dolayısıyla güzergah seçeneklerinin eşit olasılıklı olamayacağını düşünmektedirler.

Bu tamamen örnek uzayının nasıl tanımlandığı ile ilgilidir. Güzergah seçeneklerini ayrı ayrı kağıtlara yazıp torbaya atarak birini çeken hareketli, artık, kavşaklarda yol seçmez. Çektiği kağıttaki güzergah ne ise onu izler.

Güzergah seçeneklerinin eşit olasılıklı sayılması bu yaklaşımın sonucudur.

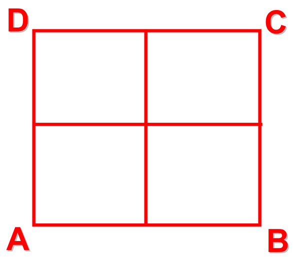
...

Bu durum yüzlerine 1, 1, 1, 2, 2, 3 yazılmış küpün bir kere atılması deneyinde, örnek uzayının $E=\{1,2,3\}$ olarak alınması durumundan farklıdır. Bu küpte, yazdığımız örnek uzayı eş olumlu sayamayız. Ne yaparsak yapalım $P(1)=P(2)$ olmasını sağlayamayız. Ama; güzergahları eşit olasılıkla seçmeyi sağlayabiliriz.

Önemli olan; istenenin açık bir ifade ile ortaya konulmasıdır.

Örnek Problem -2

(Rasim Zencir)



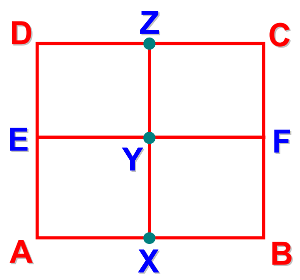
Şekil birim karelerden oluşmuştur.

Şekildeki A noktasından yola çıkan hareketli sağa ve yukarı yolları kullanarak C noktasına; B noktasından yola çıkan hareketli sola ve yukarı yolları kullanarak D noktasına gelecektir

Hareketliler aynı anda ve aynı hızla harekete başlıyorlar.

Her kavşakta yol seçenekleri eşit olasılıklı olduğuna göre, karşılaşmaları olasılığı kaçtır?

Çözüm



Hareketliler aynı anda ve aynı hızla harekete başladıklarına göre, A ve B'den eşit uzaklıktaki X, Y ya da Z noktalarında karşılaşabilirler.

X'te karşılaşmaları olasılığı:

A'dan yola çıkan AX güzergahı ile;

B'den yola çıkan BX güzergahı ile X'e gelir.

A'dan yola çıkan hareketli A kavşağında;

B'dan yola çıkan hareketli B kavşağında yol seçimi yapar.

X'te karşılaşmaları olasılığı,

$P(X)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ olur.

Y'de karşılaşmaları olasılığı:

AEY-BFY, AEY-BXY ve AXY-BFY güzergahları ile Y'de karşılaşırlar. Her hareketli 1. ve 2. kavşakta yol seçimi yapar.

Y'de karşılaşmaları olasılığı,

$P(Y)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$ olur.

Z'de karşılaşmaları olasılığı:

AXZ-BCZ, AEYZ-BCZ, ADZ-BXZ, ADZ-BFYZ ve ADZ-BCZ güzergahları ile Z'de karşılaşırlar. A'daki hareketli ADZ güzergahında, B'deki hareketli BCZ güzergahında 2 kavşakta yol seçimi yapar. Diğer güzergahların her birinde 3'er kavşakta yol seçimi yaparlar.

Z'de karşılaşmaları olasılığı,

$P(Z)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

olur.

Buna göre; hareketlilerin **karşılaşmaları olasılığı,**

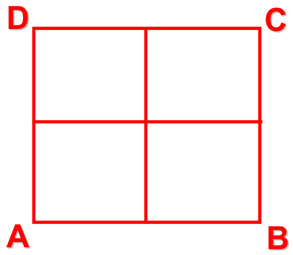
$P(\text{Kar.})=P(X)+P(Y)+P(Z)$

$\Rightarrow P(\text{Kar.})=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}$

$\Rightarrow P(\text{Kar.})=\frac{5}{8}$ bulunur.

Örnek Problem -3

(Yalçın Yılmaz)



Şekil birim karelerden oluşmuştur.

Şekildeki A noktasından yola çıkan karınca sağa ve yukarı yolları kullanarak C noktasına; B noktasından yola çıkan karınca yiyen sola ve yukarı yolları kullanarak D noktasına gelecektir

Hareketliler aynı anda ve aynı hızla harekete başlıyorlar.

Karınca yiyen karıncayı yakalamak, karınca da yakalanmamak istemektedir.

Her kavşakta yol seçenekleri eşit olasılıklı olduğuna göre, karıncanın karınca yiyenden kurtulma olasılığı kaçtır?