

Soru

$$x^2 - 16\sqrt{x} = 12 \text{ ise } x+2\sqrt{x} \text{ kaçtır?}$$

Çözüm**I. Kısım**

$$\begin{aligned} x^2 - 16\sqrt{x} &= 12 \\ \Rightarrow x^2 + 4x + 4 &= 4x + 16\sqrt{x} + 16 \\ \Rightarrow (x+2)^2 &= (2\sqrt{x} + 4)^2 \\ \Rightarrow x+2 &= 2\sqrt{x} + 4 \text{ veya } x+2 = -2\sqrt{x} - 4 \\ \Rightarrow x - 2\sqrt{x} - 2 &= 0 \text{ veya } x + 2\sqrt{x} + 6 = 0 \\ \Rightarrow \sqrt{x} &= 1 + \sqrt{3}; \text{ Başka gerçel kök yok.} \\ \Rightarrow x &= 4 + 2\sqrt{3} \\ \Rightarrow x + 2\sqrt{x} &= 6 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Sorunun gerçel sayılar kümesindeki çözümü budur.

II. Kısım (Hata Nerede)

Karmaşık sayılar kümesinde, \sqrt{x} 'in negatif değerleri için çözümler aramaya devam edelim:

$$\begin{aligned} x^2 - 16\sqrt{x} &= 12 \\ \Rightarrow \sqrt{x} &= 1 - \sqrt{3}, \sqrt{x} = -1 - \sqrt{5}i, \sqrt{x} = -1 + \sqrt{5}i \end{aligned}$$

1. $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{3}$ ise $x = 4 - 2\sqrt{3}$ 'tür.

\sqrt{x} 'in ve x 'in bu değerleri, $x^2 - 16\sqrt{x} = 12$ koşulunu sağlar.

$$x + 2\sqrt{x} = 6 - 4\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

2. $\sqrt{x} = -1 - \sqrt{5}i$ ise $x = -4 + 2\sqrt{5}i$ 'dir.

\sqrt{x} 'in ve x 'in bu değerleri, $x^2 - 16\sqrt{x} = 12$ koşulunu sağlar.

$$x + 2\sqrt{x} = -6 \text{ bulunur.}$$

3. $\sqrt{x} = -1 + \sqrt{5}i$ ise $x = -4 - 2\sqrt{5}i$ 'dir.

\sqrt{x} 'in ve x 'in bu değerleri, $x^2 - 16\sqrt{x} = 12$ koşulunu sağlar.

$$x + 2\sqrt{x} = -6 \text{ bulunur.}$$

Verilen sorunun karmaşık sayılar kümesindeki çözümlerini aradığımız II. kısımda, akıl yürütmenin bir yerinde hata yapılmaktadır. Dolayısıyla; bulunan sonuçlar geçerli değildir.

Bu hatanın nerede olduğunu bulunuz.

Not

Barış Demir Hocama, hem I. kısmın çözümü için hem de II. kısımdaki payı için;

İbrahim Kuşçuoğlu Hocama, bizi hatamız konusunda uyardığı ve karmaşık sayılar konusundaki bazı pürüzlerimizi gidermemize yardımcı olduğu için;

Gazi Hocama da, bu soruyu sorarak çok yararlı olacak bir tartışmaya yol açtığı için

Çok teşekkür ediyorum.

Hata Şurada!

Hata " $\sqrt{\quad}$ " sembolüne yüklediğimiz anlamdan kaynaklanmaktadır. Gerçek sayılar kümesinde " \sqrt{x} " "negatif olmayan x gerçel sayısının pozitif karekökü" anlamında kullanılırken; bir sayının birden çok sayıda karekökünü bulunduğu diğer sayı kümelerinde " x sayısının karekökleri" anlamında kullanılmaktadır. Daha başından;

"Karmaşık sayılar kümesinde; $x^2 - 16\sqrt{x} = 12$ denkleminin köklerini, \sqrt{x} 'in negatif değerleri için aramaya devam edelim." girişi ile hata yapılmaktadır.

Karmaşık sayılar kümesinde " \sqrt{x} ", " $\sqrt[3]{x}$ ",... gibi ifadeleri içeren denklemler yazılamaz. Çünkü bu kümede bu ifadeler birden fazla değere aynı anda karşılık gelirler.

Verilen denklemin karmaşık sayılar kümesinde yazılamayacağını gözden kaçırdık diyelim:

" $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{3}$ ise" diye söze devam edilemez.

Bu, $1 - \sqrt{3}$ değerinin negatif olması ile ilgili değildir.

Karmaşık sayılarda $\sqrt{x} = \sqrt{3} - 1$ eşitliği de yazılamaz. Çünkü; \sqrt{x} ifadesi bu iki değeri de aynı zamanda temsil eder.

Döne döne aynı şeyleri söylediğimin farkındayım. Ama; sembolün yanlış kullandığımız anlamı zihinlere öyle kazınmış ki, ancak böyle söyleyebilirim sanıyorum.

Öyleyse; bu soru nasıl sorulmalı?

Şöyle:

" z_k , z karmaşık sayısının z_0 ve z_1 kareköklerinden birini göstermek üzere;

$$z^2 - 16 \cdot z_k = 12 \text{ ise } z + 2 \cdot z_k \text{ kaçtır?}";$$

Ya da şöyle:

$$"x^4 - 16x = 12 \text{ ise } x^2 + 2x \text{ kaçtır?}"$$