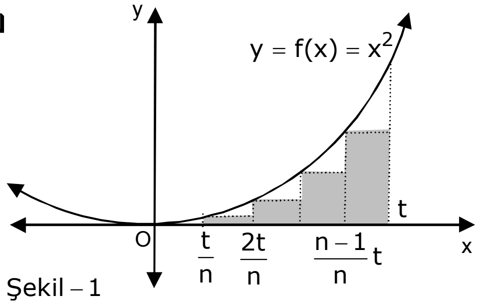
Örnek Problem - I

$y = f(x) = x^2$ eğrisi, $x = t$ doğrusu ve x ekseninin sınırladığı alanı bulunuz.

Çözüm



Şekil – 1

$[0,t]$ aralığını n tane eş alt aralığa ayıralım.

Bir alt aralığın **norm**u $\left|\frac{t}{n}\right|$ olur.

Bu alt aralıkların uç noktalarının,

$P = \left\{0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \frac{3t}{n}, \ldots, \frac{(n-1)t}{n}, t\right\}$ kümesine,

$[0,t]$ aralığının bir **düzgün bölüntüsü** denir.

$\left[0, \frac{t}{n}\right]$, $\left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right]$, … , $\left[\frac{(n-1)t}{n}, t\right]$ aralıklarında fonksiyonun en küçük değerlerini birer kenar kabul eden, diğer kenar uzunlukları $\left|\frac{t}{n}\right|$ olan dikdörtgenlerle oluşturulan taralı şeklin alanına, f fonksiyonunun P bölüntüsüne ait **alt toplamı** denir; $A(f,P)$ ile gösterilir.

$$A(f,P) = \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{2t}{n}\right) + \ldots + \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)$$

$$\Rightarrow A(f,P) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{k\cdot t}{n}\right) \text{ dir.}$$

Bu alt toplamın n sonsuza giderken limitini bulalım:

$$A_{Alt} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{2t}{n}\right) + \ldots + \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)\right]$$

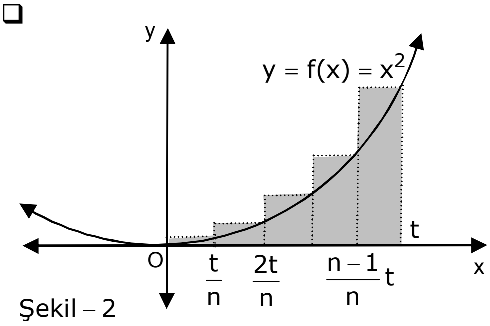
$$\Rightarrow A_{Alt} = \lim_{n\to\infty}\frac{t}{n}\cdot\left[f\left(\frac{t}{n}\right) + f\left(\frac{2t}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)\right]$$

$$\Rightarrow A_{Alt} = \lim_{n\to\infty}\frac{t}{n}\cdot\left[\frac{t^2}{n^2} + \frac{4t^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2t^2}{n^2}\right]$$

$$\Rightarrow A_{Alt} = \lim_{n\to\infty}\frac{t^3}{n^3}\cdot\left[1^2 + 2^2 + \ldots (n-1)^2\right]$$

$$\Rightarrow A_{Alt} = \lim_{n\to\infty}\frac{t^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$$

$$\Rightarrow A_{Alt} = \frac{1}{3}\cdot t^3 \text{ olarak bulunur.}$$



Şekil – 2

$\left[0, \frac{t}{n}\right]$, $\left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right]$, … , $\left[\frac{(n-1)t}{n}, t\right]$ aralıklarında fonksiyonun en büyük değerlerini birer kenar kabul eden, diğer kenar uzunlukları, yine $\left|\frac{t}{n}\right|$ olan dikdörtgenlerle oluşturulan taralı şeklin alanına da, f fonksiyonunun P bölüntüsüne ait **üst toplamı** denir; $Ü(f,P)$ ile gösterilir.

$$Ü(f,P) = \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{2t}{n}\right) + \ldots + \frac{t}{n}\cdot f(t)$$

$$\Rightarrow Ü(f,P) = \sum_{k=1}^{n}\frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{k\cdot t}{n}\right) \text{ dir.}$$

Bir de; bu üst toplamın n sonsuza giderken limitini bulalım:

$$A_{Üst} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{t}{n}\cdot f\left(\frac{2t}{n}\right) + \ldots + \frac{t}{n}\cdot f(t)\right]$$

$$\Rightarrow A_{Üst} = \lim_{n\to\infty}\frac{t}{n}\cdot\left[f\left(\frac{t}{n}\right) + f\left(\frac{2t}{n}\right) + \ldots + f(t)\right]$$

$$\Rightarrow A_{Üst} = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n}\cdot\left[\frac{t^2}{n^2}+\frac{4t^2}{n^2}+\ldots+\frac{n^2t^2}{n^2}\right]$$

$$\Rightarrow A_{Üst} = \lim_{n\to\infty} \frac{t^3}{n^3}\cdot\left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right]$$

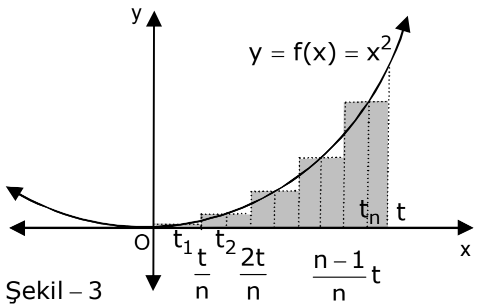
$$\Rightarrow A_{Üst} = \lim_{n\to\infty} \frac{t^3}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$\Rightarrow A_{Üst} = \frac{1}{3}\cdot t^3$ olarak bulunur.

$y = f(x) = x^2$ eğrisi, $x = t$ doğrusu ve x ekseninin sınırladığı alanın ölçüsüne A diyelim.

$$A_{Alt} \le A \le A_{Üst}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}t^3 \le A \le \frac{1}{3}t^3$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}t^3 \quad \text{olur.}$$

❑



Şekil – 3

$0 \le x_1 \le \frac{t}{n}$, $\frac{t}{n} \le x_2 \le \frac{2t}{n}$, ... , $\frac{(n-1)t}{n} \le x_n \le t$

ve $\left|\frac{t}{n}\right| = \Delta x$ olmak üzere;

$f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x$ toplamına f fonksiyonunun P bölüntüsüne ait **Riemann Toplamı** denir. $R(f,P)$ ile gösterilir.

$$R(f,P) = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x$$

$$\Rightarrow R(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x \quad \text{dir.}$$

$$A(f,P) \le R(f,P) \le Ü(f,P)$$

olacağı ve bu toplamların n sonsuza giderken limitlerinin birer reel sayı olduğu durumlarda,

$$A_{Alt} = A_{Riemann} = A_{Üst}$$

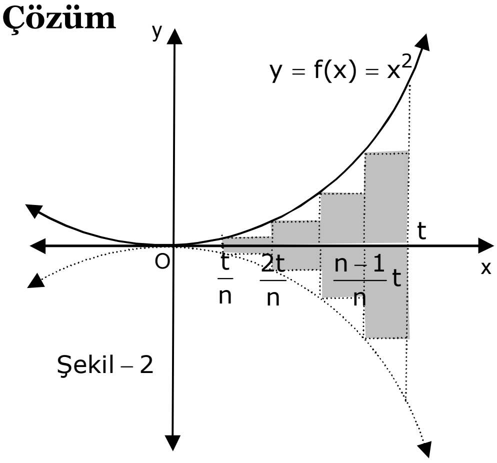
olacağı açıktır.

Örneğimizdeki Riemann Toplamının n sonsuza giderken limiti de; bize $y = f(x) = x^2$ eğrisi, $x = t$ doğrusu ve x ekseninin sınırladığı alanı verecektir.

Örnek Problem - II

$y = f(x) = x^2$ eğrisi, $x = t$ doğrusu ve x ekseninin sınırladığı alanın, x ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan şeklin hacmini bulunuz.

Çözüm



Şekil – 2

Oluşan şekil, şekil-2'de taralı biçimde gösterilen, Taban tabana yapıştırılmış disklerin oluşturduğu şekildir.

Bu disklerin taban yarıçapları küçükten büyüğe $f\left(\frac{t}{n}\right)$, $f\left(\frac{2t}{n}\right)$, ... , $f\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)$ olup herbirinin kalınlığı $\frac{t}{n}$ kadardır. Buna göre; oluşacak hacım,

$$V = \lim_{n\to\infty} \pi\cdot\frac{t}{n}\cdot\left[f^2\left(\frac{t}{n}\right)+f^2\left(\frac{2t}{n}\right)+\ldots+f^2\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)\right]$$

$$\Rightarrow V = \lim_{n\to\infty} \pi\cdot\frac{t}{n}\cdot\left[\frac{t^4}{n^4}+\frac{(2t)^4}{n^4}+\ldots+\frac{(n-1)^4\cdot t^4}{n^4}\right]$$

$$\Rightarrow V = \lim_{n\to\infty} \pi\cdot\frac{t^5}{n^5}\cdot\left[1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4\right]$$

$$\Rightarrow V = \lim_{n\to\infty} \pi\frac{t^5}{n^5}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)(3n^2-3n-1}{30}$$

$\Rightarrow V = \frac{\pi}{5}\cdot t^5$ olarak bulunur.