1.1 – Polinom Kavramı

Etkinlik – 1.1

a. Tam sayılar kümesinde karesi 2 olan sayı yoktur. Z dışındaki böyle bir sayıyı $\sqrt{2}$ ile gösteriniz. $Z \cup \{\sqrt{2}\}$ kümesinin elemanlarına Z'deki toplama ve çarpma işlemlerini uygulayarak elde edebileceğiniz tüm elemanların kümesini ortak özelik yöntemi ile yazınız.

(Z'deki işlem özeliklerinin $\sqrt{2}$ elemanına da aynen uygulanacağını varsayınız.

Örneğin;

$(\sqrt{2})^0 = 1$, $(\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$,

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,...

$5\cdot\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, $(-2)\cdot 3\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$,...

$\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+(-3\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$,...

olacağını dikkate alınız.)

Elde edeceğiniz kümeye, Z'nin $\sqrt{2}$ ile genişletilmişi denir. Bu küme $Z_{[\sqrt{2}]}$ ile gösterilir.

b. Tam sayılar kümesinde $2x = 1$ denklemini sağlayan bir sayı yoktur. Z dışındaki bu sayıyı $\frac{1}{2}$ ile gösteriniz. $R \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ kümesinin elemanlarına Z'deki toplama ve çarpma işlemlerini uygulayarak elde edebileceğiniz tüm elemanların kümesini ortak özelik yöntemi ile yazınız.

Elde edeceğiniz küme Z'nin $\frac{1}{2}$ ile genişletilmişidir. $Z_{\left[\frac{1}{2}\right]}$ ile gösterilir.

c. Gerçek sayılar kümesinde karesi -1 olan sayı yoktur. R dışındaki böyle bir sayıyı "i" ile gösteriniz. $R \cup \{i\}$ kümesinin elemanlarına R'deki toplama ve çarpma işlemlerini uygulayarak elde edebileceğiniz tüm elemanların kümesini ortak özelik yöntemi ile yazınız

($i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i\cdot i = i^2 = -1$,

$i\cdot i\cdot i = i^3 = i^2\cdot i = -1\cdot i = -i$,

$i^4 = i^2\cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$, $i^5 = i^4\cdot i = 1\cdot i = i$,...

olacağını dikkate alınız.)

Elde edeceğiniz küme R'nin "i" ile genişletilmişidir. $R_{[i]}$ ile gösterilir.

Etkinlik – 1.2

Etkinlik–1.1'de elde ettiğiniz kümelerde, toplama ve çarpma işlemlerinin aşağıda belirtilen özelikleri sağladığını gösteriniz.

a. Bu kümeler toplama işlemine göre kapalıdır.

b. Bu kümelerde toplama işleminin değişme ve birleşme özelikleri vardır.

c. Toplama işlemine göre birim eleman vardır ve bu sıfırdır.

d. Her "a" elemanının toplama işlemine göre tersi vardır ve bu " $-a$ " ile gösterilir.

Bir küme ile bu kümede tanımlı bir işlem yukarıdaki özelikleri sağlıyorsa, bu küme ve bu işlemin oluşturduğu sisteme **değişmeli grup** denir.

Bu özeliklerin Z, Q ve R kümelerinde geçerli olduğunu biliyorsunuz. Öyleyse; $(Z,+)$ $(Q,+)$ $(R,+)$ sistemlerinin birer değişmeli grup olduklarını hemen söyleyebilirsiniz. $Z_{[\sqrt{2}]}$, $Z_{\left[\frac{1}{2}\right]}$, $R_{[i]}$ kümelerinde de bu işlem özeliklerinin sağlandığını göstermekle $(Z_{[\sqrt{2}]},+)$, $\left(Z_{\left[\frac{1}{2}\right]},+\right)$, $(R_{[i]},+)$ sistemlerinin de birer değişmeli grup olduklarını göstermiş olacaksınız.

Devam ediniz.

e. Bu kümeler çarpma işlemine göre kapalıdır.

f. Çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

g. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.

Bir küme ve bu kümede tanımlı iki işlem yukarıdaki 7 özeliği sağlıyorsa, bu küme ile bu iki işlemin oluşturduğu sisteme **halka** denir. $(Z,+,\cdot)$ $(Q,+,\cdot)$ $(R,+,\cdot)$ sistemleri birer halkadır. Siz **e**, **f** ve **g**'deki özeliklerin de sağlandığını göstermekle $(Z_{[\sqrt{2}]},+,\cdot)$, $\left(Z_{\left[\frac{1}{2}\right]},+,\cdot\right)$, $(R_{[i]},+,\cdot)$ sistemlerinin de birer halka olduğunu göstermiş olacaksınız.

Devam ediniz.

h. Bu kümelerde çarpma işleminin değişme özeliği vardır.

i. Çarpma işlemine göre birim eleman vardır ve bu 1'dir.

Bir küme ve bu kümede tanımlı iki işlem yukarıdaki 9 özeliği sağlıyorsa, bu küme ile bu iki işlemin oluşturduğu sisteme **değişmeli, birim elemanlı halka** denir. $(Z,+,\cdot)$ $(Q,+,\cdot)$ $(R,+,\cdot)$ sistemleri değişmeli ve birim elemanlı birer halkadır. Siz **h** ve **i**'deki özeliklerin de sağlandığını göstermekle $\left(Z_{[\sqrt{2}]},+,\cdot\right)$, $\left(Z_{\left[\frac{1}{2}\right]},+,\cdot\right)$, $\left(R_{[i]},+,\cdot\right)$ sistemlerinin de değişmeli, birim elemanlı birer halka olduğunu göstermiş olacaksınız.

Tersten giderek, "$\left(Z_{[\sqrt{2}]},+,\cdot\right)$ sistemi değişmeli, birim elemanlı halkadır." demekle de, $Z_{[\sqrt{2}]}$ kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin yukarıda uzun uzadıya sıraladığımız özeliklerini bir çırpıda belirtmiş olursunuz.

Etkinlik-1.1'de Z ve R kümelerine bu kümelerde bulunmayan, bir biçimde tanımlanmış ($x^2=2$, 2x=1, $x^2=-1$ gibi.) bir x elemanı eklediniz. $Z\cup\{x\}$ ve $R\cup\{x\}$ kümelerinin elemanlarına Z ve R'de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerini uygulayarak daha geniş kümeler elde ettiniz.

Bir sayı kümesi, bu kümede bulunmayan kısıtsız ($x^2=2$, $x^2=3$, 2x=1, $x^2=-1$ gibi hiçbir koşulla sınırlanmamış) ve tanımsız bir x elemanı ile de genişletilebilir.

Bu bölümde, gerçek sayıların R kümesini (ya da R'nin Z ve Q gibi alt kümelerini) böyle belirsiz bir x elemanı ile genişletecek ve elde edeceğimiz kümenin elemanlarının özeliklerini inceleyeceğiz.

$R\cup\{x\}$ kümesinin tüm elemanlarına R'deki toplama ve çarpma işlemleri uygulandığında elde edilecek tüm elemanların kümesi;

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$$R_{[x]} = \left\{P(x) \middle| P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\right\}$$

olur.

! R'deki toplama ve çarpma işlemleri $R\cup\{x\}$ kümesinin elemanlarına, x'in bir gerçek sayıyı gösterdiği durumlarda uygulandığı gibi uygulanır. $x \in R$ iken, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ biçimindeki sayı ifadeleri birer gerçek sayıya karşılık gelirler. Dolayısıyla; siz bugüne değin bu tür sayı ifadeleri arasındaki toplama, çıkarma, çarpma işlemlerini yapageldiniz. Burada yaptığımız; R evrenine, evrenin dışından bir x belirsizi katmak ve bu belirsize R evreninin kurallarını uygulamaktır.

$R_{[x]}$ kümesine, R'nin x ile **genişletilmiş**i denir. Toplama ve çarpma işlemlerinin $R_{[x]}$ kümesinde sağladığı özeliklere göre; $\left(R_{[x]},+,\cdot\right)$ sistemi değişmeli, birim elemanlı bir halkadır.

Tanım – 1.1

Gerçek sayılar kümesinin x *belirsizi ile genişletilmişi olan* $R_{[x]}$ *kümesinin her elemanı,*

$n \in N$ *ve* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ *olmak üzere;*

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ *biçimindedir.*

Bu elemanların her birine gerçek kat sayılı ***polinom*** *(çok terimli) denir.*

Örnek – 1.1

x, y, t harfleri birer belirsizi göstermek üzere; aşağıdaki ifadelerin her biri bir polinomdur.

I. 0 IV. $3+x-x^2$

II. $-\frac{3}{5}x$ V. $y^5+\frac{\sqrt{2}}{3}y^2$

III. $2x-3$ VI. $2t^7+5t^3+3$

I, II, III ve IV'teki polinomlar $R_{[x]}$ kümesinin, I ve V'teki polinomlar $R_{[y]}$ kümesinin, I ve VI'daki polinomlar $R_{[t]}$ kümesinin elemanlarıdır.

$R_{[x]}$, $R_{[y]}$, $R_{[t]}$ kümeleri, gerçek sayılar kümesinin bir belirsizle genişletilmesi yoluyla elde edilen, aynı yapıda kümelerdir. Sadece, bu kümelerde belirsizler farklı harflerle gösterilmişlerdir. Bununla birlikte, x ile y arasında bir ilişki kurulmadan '$R_{[x]} = R_{[y]}$' demek de doğru değildir.

x ile y arasında belirtilecek bir ilişkiye göre, $R_{[x]}$ ile $R_{[y]}$ arasında da bir ilişki kurulabilir. Bu konuda önümüzdeki sayfalarda bilgi verilecektir.

$2x-3$ ifadesinin $2x+(-3)$ anlamında, $3+x-x^2$ ifadesinin de $3+1\cdot x+(-1)\cdot x^2$ anlamında olduğu toplama ve çarpma işleminin özeliklerinin sonucudur.

✚ Bir polinomun terimleri, toplamanın birleşme özeliği gereğince, istenilen sırada yazılabilir. Biz daha kullanışlı bulduğumuz için, terimleri genellikle x'in azalan kuvvetlerine göre sıralayacağız.

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ gibi.}$$

Tanım – 1.2

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ *polinomunda,*
a_0 *terimine polinomun **sabit terimi**;*
a_kx^k *teriminde* $a_k \in R$ *'ye terimin **kat sayısı** ve* $k \in N$ *'ye **terimin derecesi**;*
*kat sayısı sıfırdan farklı olan en büyük dereceli terimin derecesine **polinomun derecesi**;*
*sıfırdan farklı olmak üzere, en büyük dereceli terimin kat sayısına polinomun **baş kat sayısı** denir.*
Polinomun derecesi $\operatorname{der}[P(x)]$ *ile gösterilir.*

Örneğin; $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 4$ polinomu 4. derecedendir. $(\operatorname{der}[P(x)] = 4)$ Baş kat sayısı 3, sabit terimi -4' tür. $-5x^2$ teriminin kat sayısı -5, derecesi 2'dir. $2x$ teriminin kat sayısı 2, derecesi 1'dir. Sabit terim $-4x^0$ biçiminde yazılabileceğinden, derecesi 0'dır.

Tanım – 1.3

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ *polinomunda,*
a_0 *dışındaki kat sayılar sıfır ise* $P(x) = a_0$ *;*
tüm kat sayılar sıfır ise $P(x) = 0$ *olur.*
$P(x) = a_0$ *polinomuna **sabit polinom**;*
$P(x) = 0$ *polinomuna **sıfır polinomu** denir.*
*Sabit polinomun derecesi **sıfır;** sıfır polinomunun derecesi **belirsiz**dir.*

Örneğin; $P(x) = 7$ ve $Q(x) = -2\sqrt{3}$ birer sabit polinom; $R(x) = 0$ sıfır polinomudur.

Etkinlik – 1.3

Aşağıda verilen çok terimlilerin polinom olup olmadıklarını belirtiniz. Polinom olanlarının terim sayılarını, derecelerini, baş kat sayılarını ve sabit terimlerini bulunuz.

a. $\sqrt{3} - \frac{2}{3}x + 5x^6$ **b.** $2x^2 - 3\sqrt{x}$

c. $1 + \sqrt[3]{2} + 3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$ **d.** $7 + \frac{4}{x} - 3x^4$

e. $\frac{3}{4}x^3 + 0,6x^2 - 0,\overline{6}$ **f.** $x^3 - 2x^5 + \left(\sqrt[7]{3}\right)^6$

✚ R kümesini x belirsizi ile genişleterek elde ettiğimiz $R_{[x]}$ kümesinin elemanlarını gerçek kat sayılı polinomlar olarak tanımladık. Böyle polinomlara **R üzerinde tanımlı polinomlar** da denir. Aynı genişletme işlemi Z kümesi üzerinde yapıldığında elde edilecek $Z_{[x]}$ kümesinin elemanlarının terimlerinin kat sayıları birer tam sayı olur. Buna dayanarak, $Z_{[x]}$ kümesinin elemanlarına **tam kat sayılı polinomlar** (ya da **Z üzerinde tanımlı polinomlar**) denir. Aynı şekilde; $Q_{[x]}$ kümesinin her elemanı da birer **rasyonel kat sayılı polinom**dur.

Örneğin; $P(x) = 3x^4 - 5x^2 - 4$ polinomu tam kat sayılı bir polinom; $Q(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3$ polinomu rasyonel kat sayılı bir polinomdur. Her iki polinomun da aynı zamanda gerçek kat sayılı birer polinom olduğu açıktır.

✚ R kümesi yalnız x belirsizi ile genişletilmek yerine, x ve y gibi iki belirsizle de genişletilebilir. Ya da, $R_{[x]}$ kümesi bir y belirsizi ile yeniden genişletilebilir. Her iki durumda da elde edilecek küme aynı $R_{[x,y]}$ kümesidir.

$R_{[x,y]}$ kümesinin her elemanı iki belirsizli, gerçek kat sayılı birer polinomdur. Bu polinomların ax^my^n biçimindeki terimlerin toplamlarından oluşacağı açıktır. Böyle bir terimin derecesi $m + n$ olarak tanımlanır. En büyük dereceli terimin derecesi polinomun da derecesi olur.

$P(x, y)$ polinomlarında x'e göre, ya da y'ye göre derecelerden de söz edilebilir.

Örneğin; $P(x, y) = 3x^2y^3 + 5x^4y^2 - 4x^3 + 2y - 3$ polinomunun derecesi 6'dır. $(5x^4y^2$ teriminden$)$

Polinomun x'e göre derecesi 4 $(5x^4y^2$ terimi$)$;
y'ye göre derecesi 3'tür. $(3x^2y^3$ terimi$)$

Etkinlik – 1.4

Aşağıda verilen polinomların x'e göre, y'ye göre, x ve y'ye göre derecelerini belirtiniz.

a. $P(x, y) = 2x^3y^2 - 3x^4y + x^5 - 4y^5$

b. $P(x, y) = 2x^4y - 3x^3y^3 + 5xy^3 - 2x + y^4 + 1$

c. $P(x, y) = 3\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$

✚ $P(x)$ polinomunda x belirsizi bir gerçek sayı olarak seçilirse, her $x \in R$ için $P(x) \in R$ olur. Bu durumda $P(x)$ polinomu R'den R'ye bir fonksiyonun, x değerine karşılık gelen değerini gösterir.

Örneğin; $P: R \to R$; $P(x) = 3x^2 - x + 5$ fonksiyonunda $P(1) = 3\cdot(1)^2 - (1) + 5 \Rightarrow P(1) = 7$ ve $P(\sqrt{2}) = 3\cdot(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 5 \Rightarrow P(\sqrt{2}) = 11 - \sqrt{2}$ dir.

$P(x)$ bir polinom olmak üzere;
$P: R \to R$, y=$P(x)$ türünden fonksiyonlara **polinom fonksiyonlar** denir.

Etkinlik – 1.5

R'de P ve Q fonksiyonlarının kuralları $P(x) = x^2 - 2x - 5$ ve $Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$ olarak verilmiştir.

a. $P(\sqrt{5}) + Q(5)$ değerini bulunuz.

b. $P[Q(\sqrt{3})]$ değerini bulunuz.

c. $Q[P(\sqrt{3})]$ değerini bulunuz.

Etkinlik – 1.6

$A = \{y \mid y = P(1),\ P(x) \in R_{[x]}\}$ ve

$B = \{y \mid y = P(\sqrt{2}),\ P(x) \in R_{[x]}\}$ kümeleri veriliyor.

A ve B kümeleri arasındaki bağıntıyı belirtiniz.

✚ $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinomunda x belirsizinin yerine herhangi bir gerçek sayının konulabileceğini biliyorsunuz. Yalnız; x yerine bir gerçek sayı konulduğunda elde edilen değere polinomun değeri değil, polinoma karşılık gelen fonksiyonun değeri demek daha uygun olur. Örneğin; $P(2)$ ifadesi polinomlar kümesinde sabit polinomlardan biri olarak bulunsa da, bize önce P fonksiyonunun $x = 2$'deki değerini çağrıştırmalıdır.

Bir $P(x)$ polinomunda x yerine 0 ve 1 konulduğunda elde edilecek $P(0)$ ve $P(1)$ değerleri polinomun kat sayıları ile ilgilidir. $P(0) = a_0$ ve $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ olur.

O halde, **bir polinomda x yerine 0 konulursa polinomun sabit terimi; 1 konulursa polinomun kat sayılarının toplamı elde edilir.**
Kısaca; P(x) polinomunun sabit terimi P(0), kat sayılarının toplamı P(1) dir.

Örnek – 1.2

$P(x) = 3(x-2)^5 + (x^2-1)^3$ polinomunun açılımında, kat sayılar toplamını ve polinomun sabit terimini bulunuz.

Çözüm

Kuvvet alma işlemleri yapıldığında elde edilecek polinomun kat sayılarının toplamı,

$P(1) = 3\cdot(1-2)^5 + (1^2-1)^3 = -3$; sabit terimi de

$P(0) = 3\cdot(0-2)^5 + (0^2-1)^3 = -97$ olur.

Polinomların Eşitliği

Tanım – 1.4

Eşit dereceli terimlerinin kat sayıları eşit olan polinomlara ***eşit polinomlar*** *denir.*

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ ve

$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ polinomlarında

$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$ ise

$A(x) = B(x)$ olur.

Örnek – 1.3

a. $x^5 - 3x^2 + 7x + 2 = x^5 - 3x^2 + 7x + 2$ dir.

b. $ax^3 - (2b-3)x^2 + 2x - 4 = -5x^2 - (c-1)x + d - 2$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 0 \\ -(2b-3) &= -5 \\ 2 &= -(c-1) \\ -4 &= d-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 4 \\ c &= -1 \\ d &= -2 \end{aligned}\right\} \text{olmalıdır.}$$

Tanım-1.4, "İki polinomun eşit olması için gerek ve yeter koşul, bu iki polinomun eşit dereceli terimlerinin kat sayılarının eşit olmasıdır." söylemiyle teorem olarak da verilebilir. **Belirsiz kat sayılar teoremi** denilen bu teoremin ispatı eşitliğin, toplama işleminin ve sıfır polinomunun özeliklerinden yararlanılarak kolayca yapılabilir. İster tanım ister teorem sayınız; **polinomların eşitliği** kavramı uygulamalarımızda büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

$P(x)$ ifadesi $P(x)$ polinomunu gösterdiği gibi, P fonksiyonunun $x \in R$ 'ye karşılık gelen değerini de gösterir. Buna göre, $P(x) = 0$ eşitliği iki anlama gelir. Birincisi $P(x)$'in sıfır polinomu olduğu; ikincisi P fonksiyonunun x değeri için sıfır olduğudur. Size verilecek ifade içinde hangi anlamda kullanıldığını anlamanız zor olmaz. Yine de; karışıklığı gidermek için, $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının eşitliği $P(x) \equiv Q(x)$ biçiminde de gösterilebilir. $P(x)$ polinomu ile, x'in bir gerçek sayı olduğu $p(x)$ fonksiyonu arasındaki farkı ve ilişkiyi, şu teorem iyi açıklar:

Teorem – 1.1

$R_{[x]}$ *kümesinde;* $P(x) \equiv Q(x)$ *olması için gerek ve yeter koşul, her* $x \in R$ *için,* $p(x) = q(x)$ *olmasıdır.*

$P(x) \equiv Q(x)$ eşitliğine **özdeşlik** denir. Her $x \in R$ için sağlanan $p(x) = q(x)$ eşitliği de bir özdeşliktir. $p(x) \equiv q(x)$ yazılabilir. "Her $x \in R$ için" koşulu konulmadan yazılan "$p(x) = q(x)$" eşitliği ise, x'in bazı gerçek sayı değerleri için sağlanabilen bir denklemdir.

Biz, $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının eşitliğini, bunun bir özdeşlik olduğunun farkında olarak $P(x) = Q(x)$ biçiminde göstermeyi sürdüreceğiz.

Etkinlik – 1.7

Teorem-1.1'i, polinomların eşitliği kavramını ve gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin özelikleri ile eşitliğin sadeleşme özeliğini kullanarak ispatlayınız.

Örnek – 1.4

$P(x) = (x-2)^3 + (x+2)^2 + ax + b$ ve

$Q(x) = x^3 + cx^2 + 3x + 2$ polinomları veriliyor.

$P(x) = Q(x)$ olduğuna göre; a, b, c kat sayılarını bulunuz.

Çözüm

Teorem-1.1'e göre, iki polinom eşit ise, bu polinomlardan her $x \in R$ için elde edilecek gerçek sayı değerleri de eşit olacaktır. Öyleyse; x yerine işimizi kolaylaştıracak değerler koyalım:

$P(0) = Q(0) \Rightarrow -4 + b = 2$ (1)

$P(1) = Q(1) \Rightarrow 8 + a + b = c + 6$ (2)

$P(-1) = Q(-1) \Rightarrow -26 - a + b = c - 2$ (3)

(1) den $b = 6$ bulunur. Bu değer (2) ve (3) te yerine konulduğunda elde edilecek iki bilinmeyenli denklemlerden de $a = -13$ ve $c = -5$ bulunur.

✚ $R_{[x]}$ kümesinin elemanları olan $P(x)$ polinomlarında x yerine, $Q(x)$ gibi polinomlar da konulabilir. Örneğin; x yerine $2x-1$ koyduğumuz durumu ele alalım:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

$$\Rightarrow P(2x-1) = a_0 + a_1(2x-1) + \ldots + a_n(2x-1)^n$$

olur. Anlaşılabileceği gibi, $P(2x-1)$ polinomları R'nin $2x-1$ ile genişletilmişi olan $R_{[2x-1]}$ kümesinin elemanlarıdır. $P(2x-1)$ polinomunda parantezler açılıp terimler x'in artan derecelerine göre sıralanırsa;

$$P(2x-1) = C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$$

gibi, yine $R_{[x]}$ in elemanları olan polinomlar elde edilir. Buradan, $C(x)$ polinomlarının kümesinin $R_{[x]}$' in bir alt kümesi olduğu anlaşılıyor. Acaba bu küme $R_{[x]}$'e eşit midir? Birkaç sayfa ileride, $R_{[x]}$'in tüm elemanlarının $ax+b$ nin kuvvetleri türünden yazılabileceğini göreceğiz. Biz şimdiden, $C(x)$ polinomlarının kümesinin $R_{[x]}$'e eşit olduğunu söyleyelim. Ancak; durum her zaman böyle değildir. Örneğin; $P(x^2)$ polinomları x'in yalnız çift kuvvetlerinden oluşacağından, bunların kümesi $R_{[x]}$' in bir alt kümesi olmakla birlikte, $R_{[x]}$'e eşit olmaz. Her durumda geçerli olan şudur: **$R_{[x]}$ kümesinin elemanları olan $P(x)$ polinomlarında x yerine $Q(x)$ gibi polinomlar konulduğunda, yine $R_{[x]}$ kümesinin elemanları olan polinomlar elde edilir.**

Örnek – 1.5

$R_{[x]}$ te, $P(x)=x^3+2x^2-3x+4$ polinomu veriliyor. Aşağıdaki polinomları bulunuz.

a. $P(2x)$ **b.** $P(-x)$ **c.** $P(x^3)$ **d.** $P(x-2)$

Çözüm

a. $P(x)=x^3+2x^2-3x+4$

$\Rightarrow P(2x)=(2x)^3+2(2x)^2-3(2x)+4$

$\Rightarrow P(2x)=8x^3+8x^2-6x+4$

b. $P(x)=x^3+2x^2-3x+4$

$\Rightarrow P(-x)=(-x)^3+2(-x)^2-3(-x)+4$

$\Rightarrow P(-x)=-x^3+2x^2+3x+4$

c. $P(x)=x^3+2x^2-3x+4$

$\Rightarrow P(x^3)=(x^3)^3+2(x^3)^2-3(x^3)+4$

$\Rightarrow P(x^3)=x^9+3x^6-3x^3+4$

d. $P(x)=x^3+2x^2-3x+4$

$\Rightarrow P(x-2)=(x-2)^3+2(x-2)^2-3(x-2)+4$

Örnek – 1.6

$R_{[x]}$ te, $P(x)=x^3-3x+5$ polinomu veriliyor. $P(x+3)$ polinomunun kat sayılarının toplamını ve sabit terimini bulunuz.

Çözüm

$P(x+3)=Q(x)$ diyelim. $Q(x)$'in kat sayılarının toplamı $Q(1)$, sabit terimi $Q(0)$'dır.

$Q(1)=P(4)=4^3-3\cdot4+5=57$;

$Q(0)=P(3)=3^3-3\cdot3+5=23$ olur.

Alıştırmalar ve Problemler – 1.1

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri polinomdur? Polinom olanlarının derecelerini, baş kat sayılarını, terim sayılarını ve sabit terimlerini bulunuz.

a. $A(x)=x+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **b.** $B(x)=\sqrt[3]{2}+3(\sqrt[3]{2})^2$

c. $C(x)=2-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}$ **d.** $D(x)=3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}$

e. $E(x)=\dfrac{3}{4}x^4+0,4x^2$ **f.** $F(x)=0$

g. $G(x)=x^3-\sqrt{x}+\sqrt{3}$ **h.** $H(x)=x^3y-2y^2$

2. Aşağıdaki çok terimliler birer polinom olduğuna göre, her birinin derecesi en az kaçtır?

a. $A(x)=x^{\frac{6}{n}-n}+x^{1-n}-2x+3$

b. $B(x)=x^{2n-4}+2x^{7-n}+x^3-4$

c. $C(x)=x^{\frac{n}{3}}+x^{\frac{10}{n-1}}+2x^3-5$

d. $D(x)=x^m+mx^n+(m-3n)x^8-(m+n-8)\sqrt{x}$

3. Aşağıdaki polinomların açılımlarındaki kat sayılarının toplamlarını ve sabit terimlerini bulunuz.

a. $A(x)=(x-1)^6+2(x+1)^4$

b. $B(x-1)=(2x-1)^3-(x-2)^5$

c. $C(2x+1)=(x-3)^3+(x^3+2)^4$

d. $D(x,y)=(x^2-2y+3)^2+(xy^2+xy-2x^2)^3$

e. $E(x,y-2)=(x^2-2y)^2+(xy^2+xy-2)^3$

f. $F(x-1,y+1)=(x^3-y)^4+(x^2y+y^2-2)^2$

4. Tam sayılar kümesinde küpü 2 olan sayı yoktur. Z dışındaki böyle bir sayıyı $\sqrt[3]{2}$ ile, bunun karesini $\sqrt[3]{4}$ ile gösteriniz. $Z\cup\{\sqrt[3]{2}\}$ kümesinin elemanlarına Z'deki toplama ve çarpma işlemlerini uygulayarak elde edebileceğiniz tüm elemanların kümesini ortak özelik yöntemi ile yazınız.

5. $Z_{[\sqrt{2},\sqrt{3}]}$ kümesini ortak özelik yöntemi ile yazınız. ($\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ 'ü $\sqrt{6}$ ile gösteriniz.)

6. Aşağıdaki verilen kümeler arasındaki bağıntıları belirtiniz.

a. $Z_{[\sqrt{2}]}$ ile $Z_{[-\sqrt{2}]}$ **b.** $Z_{[\sqrt{2}]}$ ile $Z_{[\sqrt{3}]}$

c. $Z_{\left[\frac{1}{2}\right]}$ ile $Z_{\left[\frac{1}{3}\right]}$ **d.** $R_{[x]}$ ile $R_{[-x]}$

e. $R_{[x]}$ ile $R_{[2x]}$ **f.** $R_{[x-2]}$ ile $R_{[x+2]}$

g. $R_{[\sqrt{2}]}$ ile $R_{[\sqrt{2},\sqrt{3}]}$ **h.** $R_{[x]}$ ile $R_{[x,y]}$

7. Aşağıda verilen polinomlardan yararlanarak, yanlarında belirtilen polinomların açılımlarındaki kat sayıların toplamlarını ve sabit terimlerini bulunuz.

a. $A(x)=(x-1)^6+2(x+1)^4$; $A(x-2)$

b. $B(x-1)=(2x-1)^3-(x-2)^5$; $B(x)$

c. $C(2x+1)=(x-3)^3+(x^3+2)^4$; $C(x-1)$

d. $D(x,y)=(xy^2+xy-2x^2)^3$; $D(x-2,y+1)$

e. $E(x,y-2)=(x^2-2y-1)^2$; $E(x-2,y)$

f. $F(x-1,y+1)=(x^3-xy+2)^4$; $F(x,y)$

8. $P(x)=(x+1)^3-3x^2-2$ polinomu veriliyor. Aşağıda belirtilen polinomları bulunuz. (Oluşabilecek kuvvetleri açmayınız.)

a. $P(-x)$ **b.** $P(x+2)$ **c.** $P(x^2-2)$

9. $P(2x+3)=x^2-3x-2$ polinomu veriliyor. Aşağıda belirtilen değerleri bulunuz.

a. $P(-1)$ **b.** $P(6)$ **c.** $P(2\sqrt{3}-3)$

10. $P(x,y)=x^2-3xy^2+2x-3y+1$ polinomu veriliyor. Aşağıda belirtilen polinomları bulunuz.

a. $P(-x,2y)$ **b.** $P(y,x)$ **c.** $P(x+1,-y)$

d. $P(-1,y)$ **e.** $P(x,0)$ **f.** $P(-2x,y-1)$

11. $P(x-2,2y+1)=x^2-3xy^2-3y+1$ polinomu veriliyor. Aşağıda belirtilen değerleri bulunuz.

a. $P(-1,3)$ **b.** $P(\sqrt{2},-1)$ **c.** $P(\sqrt{3}+1,1-2\sqrt{2})$

12. Aşağıdaki eşitlikler iki polinomun eşitliğini göstermektedir. Buna göre, kat sayılardaki bilinmeyenleri bulunuz.

a. $(a-1)x^3+2(b+1)x^2-cx+d-2=0$

b. $(a+1)x^3+(b-2)x^2+cx+2-d=3\sqrt{2}$

c. $ax^3-(b-2)x^2+2x-c=3x^2+dx+1$

d. $ax^5+bx^3-\sqrt{5}x+c=dx^4+2x^3+ex$

e. $ax^3-(b-a)x^2+cx+b-d=2x^3+x^2-3$

f. $(a-1)x^3+bx^2+cx+d=bx^3-cx^2-(d+1)x+b-1$

13. Aşağıdaki eşitlikler iki polinomun eşitliğini göstermektedir. Buna göre, kat sayılardaki bilinmeyenleri bulunuz.

(Kuvvetleri ve çarpımları açmadan yapınız.)

a. $(2x-1)^3=ax^3+bx^2+cx+d$

b. $2x^2-3x+4=a(x+2)^2+b(x+2)+c$

c. $2x^3-3x^2-1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+cx+d$

d. $x^3-3x+2=(x^2+1)(ax+b)+cx+d$

14. $P(x^2+1)=2x^4+mx^2-3$ polinomu veriliyor. Aşağıda belirtilen koşullara göre m değerlerini bulunuz.

a. $P(3)=9$ dur.

b. $P(-1)=7$ dir.

c. $P(x)$ in sabit terimi 3'tür.

d. $P(x-1)$ in sabit terimi 5'tir.

15. $P(x)=(x-3)^{2m-3}+(x+1)^{m+1}$ polinomu veriliyor. Aşağıda belirtilen koşullara göre m değerini bulunuz.

a. $P(x)$ in kat sayılarının toplamı sıfırdır.

b. $P(x)$ in sabit terimi -26 'dır.

16. Üçüncü dereceden bir $P(x)$ polinomunun baş kat sayısı 2, sabit terimi -1 'dir. $P(-1)=2$ ve $P(-2)=-9$ olduğuna göre, $P(2)$ kaçtır?

17. $P(x)=(a+1)x^3-(b-a)x^2+cx+d$ ve $Q(x)=5x-1$ polinomları veriliyor. $P(x+1)=Q(x-1)$ olduğuna göre; a, b, c, d bilinmeyenlerini bulunuz.

18. $P(x+y,x-y)=2x+4y$ olduğuna göre; $P(x,y)$ polinomunu bulunuz.

19. $2P(x)-P(-x)=x^2-3x-3$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunun kat sayılarının toplamını ve sabit terimini bulunuz.

20. $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ polinomunun çift dereceli terimlerinin ve tek dereceli terimlerinin kat sayılarının toplamlarını $P(1)$ ve $P(-1)$ türünden ifade ediniz.

Bundan yararlanarak; $P(x)=(2x-1)^5$ polinomunun açılımındaki çift dereceli terimlerin kat sayılarının toplamını ve tek dereceli terimlerin kat sayılarının toplamını bulunuz.

1.2 – Polinomlar Kümesinde İşlemler

Polinomlar kümesini, $R\cup\{x\}$ kümesinin elemanlarına R kümesindeki toplama ve çarpma işlemlerini uygulayarak elde ettik.

Polinomlar kümesinin toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olduğunu;

polinomlar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin değişme ve birleşme özeliklerinin bulunduğunu;

çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinin olduğunu;

toplama işlemine göre birim elemanın $P(x)=0$ olduğunu;

çarpma işlemine göre birim elemanın $P(x)=1$ olduğunu;

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ polinomunun toplama işlemine göre tersinin $-P(x)$ olup $-P(x)=-a_0-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_nx^n$ olduğunu polinomlar kümesini nasıl elde ettiğimize bakarak hemen söyleyebiliriz.

Her ne kadar; polinomlar kümesini, $R\cup\{x\}$ kümesinin elemanlarına R'deki toplama ve çarpma işlemlerini uygulayarak elde ettiysek de, bu işlemleri yeniden gözden geçirmek yararlı olacaktır. Polinomlarda bölme işlemini ayrıca tanımlayacağız.

Toplama İşlemi

$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ ve

$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$ verilmiş olsun.

$A(x)+B(x)=a_0+b_0+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_n+b_n)x^n$ olur. $A(x)$ ve $B(x)$ polinomlarının derecelerinin eşit olmadığı durumlarda; herhangi birinde bulunmayan terimlerin, kat sayılarının sıfır olarak bulunduğu dikkate alınır. Toplama işleminin, benzer terimlerin (Belirsizlerinin dereceleri eşit olan terimler.) kat sayıları arasında yapıldığına dikkat ediniz.

$\text{der}[A(x)]=m$ ve $\text{der}[B(x)]=n$ ve $m>n$ ise

$\text{der}[A(x)+B(x)]=m$ olur. $m=n$ iken toplamın derecesi $\text{der}[A(x)+B(x)]\le m$ olabilir.

Örnek – 1.7

$P(x)=x^3-3x^2+7x+2$ ve $Q(x)=x^2-2x-5$ ise
$P(x)+Q(x)=(1+0)x^3+(-3+1)x^2+(7-2)x+2-5$
$\Rightarrow P(x)+Q(x)=x^3-2x^2+5x-3$ olur.

İşlem, toplananlar alt alta yazılarak da yapılabilir:

$$\begin{array}{rr} & x^3-3x^2+7x+2 \\ + & x^2-2x-5 \\ \hline & x^3-2x^2+5x-3 \end{array}$$

Örnek – 1.8

$P(x,y)=x^3-3x^2y+4xy^2+2y^3$ ve
$Q(x,y)=x^2y-2xy^2-y^4$ ise,
$P(x,y)+Q(x,y)=x^3-2x^2y+2xy^2+2y^3-y^4$ olur.

Örnek – 1.9

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$,
$Q(x) = x^5 - 2x - 3$ ve
$R(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ ise
$P(x) + Q(x) + R(x) = x^5 + 3x^3 - 9x^2 + x - 2$ olur.

Etkinlik – 1.8

$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$,
$Q(x) = 2x^4 + x^2 - x + 3$ ve
$R(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$ polinomları veriliyor.
Aşağıda belirtilen toplamları bulunuz.

a. $P(x) + Q(x)$ **b.** $P(x) + R(x)$
c. $Q(x) + R(x)$ **d.** $P(x) + Q(x) + R(x)$

Çıkarma İşlemi

Tanım – 1.5

$A(x) = B(x) + C(x)$ *ise,* $C(x)$*'e* $A(x)$ *ile* $B(x)$*'in farkı denir. Bu fark* $A(x) - B(x)$ *ile gösterilir.*

$A(x) = B(x) + C(x)$
$\Rightarrow A(x) + [-B(x)] = -B(x) + B(x) + C(x) = C(x)$ ve
$C(x) = A(x) - B(x)$ olduğundan,
$A(x) - B(x) = A(x) + [-B(x)]$ bulunur.

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ ve

$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ verilmiş olsun. Fark tanımına göre,

$A(x) - B(x) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n$ olur. $A(x)$ ve $B(x)$ polinomlarının derecelerinin eşit olmadığı durumlarda; herhangi birinde bulunmayan terimlerin, kat sayılarının sıfır olarak bulunduğu dikkate alınır.

$\text{der}[A(x)] = m$ ve $\text{der}[B(x)] = n$ ve $m > n$ ise

$\text{der}[A(x) - B(x)] = m$ olur. $m = n$ iken farkın derecesi $\text{der}[A(x) - B(x)] \le m$ olabilir. (Neden?)

Örnek – 1.10

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ ve $Q(x) = 2x^3 - x - 1$ ise
$P(x) - Q(x) = (1-2)x^3 + (-5-0)x^2 + (3-1)x - 4 - 1$
$\Rightarrow P(x) - Q(x) = -x^3 - 5x^2 + 2x - 5$ olur.

İşlem, çıkarılanın kat sayılarının işaretleri değiştirilerek alt alta toplama olarak da yapılabilir:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 3x - 4 \\ + \mp 2x^3 \mp 0x^2 \pm x \pm 1 \\ \hline -x^3 - 5x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

Etkinlik – 1.9

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 6$,
$Q(x) = 2x^4 + x^3 - x + 2$ ve
$R(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$ polinomları veriliyor.
Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $P(x) - Q(x)$ **b.** $P(x) - R(x)$
c. $P(x) - [Q(x) - R(x)]$ **d.** $[P(x) - Q(x)] - R(x)$

Çarpma İşlemi

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ ve

$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ verilmiş olsun.

$A(x) \cdot B(x)$ çarpımını bulma işlemi, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinin bir uygulamasıdır. Bunun için, $A(x)$in her terimi $B(x)$in her terimi ile ayrı ayrı çarpılır; elde edilen çarpımlar toplanır. Buna göre;

$$A(x) \cdot B(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots + a_mb_nx^{m+n} \text{ olur.}$$

Çarpımda, x^k nın kat sayısı olan ifadenin terimlerindeki indislerin toplamlarının k'ya eşit olduğuna dikkat ediniz. Ancak, bu çarpımı formül olarak kullanmayınız. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğini adım adım uygulayınız.

Örnek – 1.11

a. $-3 \cdot (x^2 + 2x - 1) = -3 \cdot x^2 + (-3) \cdot (-2x) + (-3) \cdot (-1)$
$= -3x^2 + 6x + 3$

b. $2x^2 \cdot (3x^3 - 2x - 1) = 6x^5 - 4x^3 - 2x^2$

c. $(2x - 3) \cdot (x^2 + 4) = 2x \cdot (x^2 + 4) - 3 \cdot (x^2 + 4)$
$= 2x^3 + 8x - 3x^2 - 12$

veya $(2x-3)\cdot(x^2+4)=2x^3+8x-3x^2-12$

d. $(x^3-2x^2+3)\cdot(x^2+x-3)$

$$\begin{aligned}&=x^3\cdot x^2+x^3\cdot x+x^3\cdot(-3)+(-2x^2)\cdot x^2\\&\quad+(-2x^2)\cdot x+(-2x^2)\cdot(-3)+3\cdot x^2\\&\quad+3\cdot x+3\cdot(-3)\\&=x^5+x^4-3x^3-2x^4-2x^3+6x^2\\&\quad+3x^2+3x-9\\&=x^5-x^4-5x^3+9x^2+3x-9\end{aligned}$$

İşlem, doğal sayılarda olduğu gibi, çarpanlar alt alta yazılarak da yapılabilir:

İnceleyiniz.

$$\begin{array}{rr} & x^3-2x^2+3\\ \times & x^2+x-3\\ \hline & -3x^3+6x^2-9\\ & x^4-2x^3+3x\\ + & x^5-2x^4+3x^2\\ \hline & x^5-x^4-5x^3+9x^2+3x-9\end{array}$$

e. $(x^3-3x^2y)\cdot(xy^2+2y^3)$

$$\begin{aligned}&=x^4y^2+2x^3y^3-3x^3y^3-6x^2y^4\\&=x^4y^2-x^3y^3-6x^2y^4\end{aligned}$$

Etkinlik – 1.10

$P(x)=x^2-5x-6$,
$Q(x)=2x^3+x-1$ ve
$R(x)=3x-2$ polinomları veriliyor.
Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $P(x)\cdot R(x)$ **b.** $4x\cdot P(x)-2\cdot Q(x)$
c. $P(x)\cdot[3\cdot Q(x)-x^2\cdot R(x)]$ **d.** $[2x\cdot P(x)-Q(x)]\cdot R(x)$

Teorem – 1.2

$R_{[x]}$ *kümesinde;* $A(x)\cdot B(x)=0$ *olması için gerek ve yeter koşul,* $A(x)=0$ *veya* $B(x)=0$ *olmasıdır.*

Teorem-1.2 apaçıkmış gibi görünebilir. Ancak, bir halkada çarpanlardan herhangi biri sıfır değil iken çarpımın sıfıra denk olabileceği dikkate alınmalıdır. Örneğin; $\left(\frac{Z}{4},+,\cdot\right)$ halkasında $2\cdot 2\equiv 0$'dır. Bu yüzden teoremin ispatlanması gerekir.

Etkinlik – 1.11

Teorem-1.2'yi ispatlayınız.

Polinomlarda çarpma işleminin özelikleri ile Teorem-1.2'den şu sonuç çıkarılır:

$A(x)\neq 0$ ve $B(x)\neq 0$

$\Leftrightarrow\ \operatorname{der}[A(x)\cdot B(x)]=\operatorname{der}[A(x)]+\operatorname{der}[B(x)]$

Özel Çarpmalar

Etkinlik – 1.12

Aşağıda sonuçları ile verilmiş çarpma işlemlerini yaparak sonuçların doğruluğunu denetleyiniz.

a. $(x-y)\cdot(x+y)=x^2-y^2$ (İki kare farkı)
b. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ (Tam kare)
c. $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ (Tam kare)
d. $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (Tam küp)
e. $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ (Tam küp)
f. $(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$ (İki küp farkı)
g. $(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$ (İki küp top.)
h. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$
i. $(x-y)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+y^{n-1})=x^n-y^n$
j. $(x+y)\cdot(x^{n-1}-x^{n-2}y+...+y^{n-1})=x^n+y^n$ (n tek)
k. $(x+y)\cdot(x^{n-1}-x^{n-2}y+...+y^{n-1})=x^n-y^n$ (nçift)

Etkinlik-1.12'de yaptığınız türden çarpma işlemleri ile sık sık karşılaşacaksınız. Bu özel çarpmaları aklınızda tutarak, böyle durumlarda doğrudan doğruya kullanmanız size çok zaman kazandıracaktır. Verilen eşitliklerin birer **özdeşlik** olduğuna dikkat ediniz.

Örnek – 1.12

a. $(x^2-2y)(x^2+2y)=(x^2)^2-(2y)^2=x^4-4y^2$

b. $(2x-3y)^2=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2$
$=4x^2-12xy+9y^2$

c. $(x+2y^2)^3=x^3+3x^2(2y^2)+3x(2y^2)^2+(2y^2)^2$
$=x^3+6x^2y^2+12xy^4+4y^4$

d. $(x^3-1)^3 = (x^3)^3 - 3(x^3)^2(1) + 3(x^3)(1)^2 - (1)^3$
$= x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1$

e. $(2x-3y)\cdot(4x^2+6xy+9y^2)$
$= (2x)^3 - (3y)^3 = 8x^3 - 27y^3$

f. $(x^2+3)\cdot(x^4-3x^2+9) = (x^2)^3 + (3)^3$
$= x^6 + 27$

g. $(2x-y-1)^2 = 4x^2 + y^2 + 1 - 4xy - 4x + 2y$

h. $(x-1)\cdot(x^3+x^2+x+1) = x^4 - 1$

i. $(x+1)\cdot(x^4-x^3+x^2-x+1) = x^5 + 1$

j. $(x+1)\cdot(x^3-x^2+x-1) = x^4 - x^3 + x^2 - x$
$+x^3 - x^2 + x - 1$
$= x^4 - 1$

Etkinlik – 1.13

Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız.

a. $(3x-4y)\cdot(3x+4y)$
b. $(2x^2-y^3)\cdot(2x^2+y^3)$
c. $(x^2y^2-3xyz)\cdot(x^2y^2+3xyz)$
d. $(x^2y+2)^2$
e. $(3x-4y^2)^2$
f. $(x+2y)^2\cdot(x-2y)^2$
g. $(x+1)^2\cdot(x-1)^3$
h. $(2x-y^2)^3$
i. $(x^2+2xy)^3$
j. $(x-2y^2)\cdot(x^2+2xy^2+4y^4)$
k. $(x^2+y^2)\cdot(x^4-x^2y^2+y^4)$
l. $(3x-2y+1)^2$
m. $(xy+xz+yz)^2$
n. $(x+y+z+t)^2$
o. $(x-2)\cdot(x^3+2x^2+4x+8)$
p. $(x+2)\cdot(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$
r. $(x^2+2)\cdot(x^{10}-2x^8+4x^6-8x^4+16x^2-32)$

Binom Açılımı

"Binom" sözcüğü "iki terimli" anlamına gelir. Bu kısımda bir iki terimlinin yüksek kuvvetlerinin nasıl bulunacağını öğreneceğiz. Bir iki terimlinin yüksek kuvvetleri ile ilgili problemler, **kombinasyon** kavramının çok güzel çözümler ürettiği bir uygulama alanıdır. **Kombinasyon** kavramı ve **binom açılımı** 3. bölümde ayrıntılı biçimde ele alınacaktır. Yine de; "Demir tavında dövülür." düşüncesi ile burada kısaca değineceğiz.

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinden her birine **n'nin r'li bir kombinasyonu** denildiğini ve n elemanlı bir kümenin r'li kombinasyonlarının sayısının,

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

olduğunu ilköğretim yıllarınızdan biliyorsunuz. Bu bilgilerinizi kısaca gözden geçirirseniz, aşağıda verilenleri daha kolay algılayabilirsiniz.

Teorem – 1.3

$n \in N$ *olmak üzere,*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

dir.

Bu teoremin ispatını 3. bölümde yapacaksınız.

Teorem-1.3'e göre, $x^{n-k}y^k$ biçimindeki bir terimin kat sayısı $\binom{n}{k}$ olur. Her terimde x ile y'nin kuvvetlerinin toplamı n'dir.

Örnek – 1.13

a. $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

b. $(x-2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-2y) + \binom{4}{2}x^2(-2y)^2$
$+\binom{4}{3}x(-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4$
$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

Örnek – 1.14

Aşağıdaki iki terimlilerin kuvvetlerinin açılımlarında ax^3y^k biçimindeki terimleri bulunuz.

a. $(2x+3y)^5$ **b.** $(x-2y^2)^4$ **c.** $(x^3-y^2)^6$

Çözüm

a. Açılımın her teriminde, iki terimlinin terimlerinin kuvvetlerinin toplamı 5 olacaktır. Buna göre;

aranılan terim, $\binom{5}{2}(2x)^3(3y)^2 = 720x^3y^2$ olur.

b. $\binom{4}{1}x^3(-2y^2)^1 = -8x^3y^2$

c. $\binom{6}{5}(x^3)^1(-y^2)^5 = -6x^3y^{10}$

Etkinlik – 1.14

Aşağıdaki kuvvet alma işlemlerini yapınız.

a. $(2x+y)^4$ **b.** $(x^2-2y^3)^4$ **c.** $(xy-1)^5$

d. $(x^2y+2)^5$ **e.** $(x^2+y^2)^5$ **f.** $(xy^2+2z)^6$

Etkinlik – 1.15

Aşağıdaki iki terimlilerin kuvvetlerinin açılımlarında ax^4y^k biçimindeki terimleri bulunuz.

a. $(2x+y)^6$ **b.** $(x^2-3y^3)^4$ **c.** $(x^2y-2)^5$

Alıştırmalar ve Problemler – 1.2

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\left(-\frac{2}{3}x\right)(6x^2)(4x^3)$

b. $(2x)^3(3x^2)^2\left(-\frac{2}{3}x^3\right)^3$

c. $2(x^2-5x-1)+x(x+1)$

d. $(x-2)(2x+3)-(x+2)(3x-2)$

e. $(x^2-1)(x^2-x-1)+(2-x)(x^3-x+1)$

f. $2x^2-(x^2-x-3)-(x-1)(x-2)$

g. $-[-x-(x-y)]-[-y-(x+y)]$

h. $(x+2)(y-2)-(xy-2)$

i. $xy^2(3x^2-y)-3x^2y(xy+2y^2)$

j. $(x^2-y)(x-y^2)-(xy-1)(xy+2)$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $(2x-1)(x^2+x-1)$

b. $(2x+1)^2-2x^2$

c. $2(x^2-2)^2-x(x+2)^2$

d. $(x^2-2x)^2-(2x^2-1)^2$

e. $(3x-1)^3-(x-3)^3$

f. $(x^2-3)^3+x(3-x)^3$

g. $(x+2y-1)^2$

h. $(x-y-z)^2-(x+y-z)^2$

i. $(xy^2-2)^3$

j. $(x^2+y^2-2z)^2-(x^2-y^2+2z)^2$

k. $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$

l. $(x-y)(x+y)^2-(x+y)(x-y)^2$

m. $(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)$

n. $(x+3)(x^4-3x^3+9x^2-27x+81)$

o. $(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

p. $(x^2+1)(x^6-x^4+x^2-1)$

3. $A(x)=x^3-x-2$, $B(x)=x^3+x^2$, $C(x)=x^4+2$ ve $D(x)=x^2+x-1$ olduğuna göre, aşağıdaki polinomları bulunuz.

a. $2A(x)-xD(x)$ **b.** $B(x)+x^2C(x)$

c. $A(x)\cdot B(x)-C(x)\cdot D(x)$ **d.** $B^2(x)-D(x^2)$

e. $(x+1)B(x)+C(2x)$ **f.** $A(x^2)-D(x^3)$

g. $(x+1)B(x)-xD(x+1)$ **h.** $B(x-1)\cdot C(x-1)$

i. $B(x^2)\cdot C(x^2)$ **j.** $A(x^2)\cdot D(2x)$

4. $P(x)=x^3+2x^2-x-1$, $Q(x)=x^2+x+2$ ve $R(x)=x^4-x^2-3$ polinomları veriliyor.

Aşağıdaki polinomların derecelerini, baş kat sayılarını ve sabit terimlerini bulunuz.

a. $P(x)+Q(x)$ **b.** $P(x)-Q(x)+R(x)$

c. $P(x)+xQ(x)$ **d.** $P(x)\cdot R(x)$

e. $[P(x)-R(x)]\cdot Q(x)$ **f.** $P^2(x)-Q^3(x)$

g. $P(x^2)\cdot R(2x)$ **h.** $P^2(x^3)\cdot Q^3(x^2)$

i. $P(x+1)\cdot Q(x^2)\cdot R(x+1)$

j. $P^3(x)\cdot Q^2(x^2)\cdot R(x^3)$

5. Aşağıdaki polinomların açılımlarındaki 4. dereceden terimlerin kat sayılarını bulunuz.

a. $(x^4-2x^3+3x^2-x+1)^2$

b. $(x^3-x^2+x-1)(x^2-2x+2)$

c. $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$

d. $(x-1)^3(x+2)^2$

e. $(x^2-x-1)(x^2+2x-3)(2x+1)$

f. $(x^2-1)(x^2+2)(x^2-3)(x^2+4)(x^2-5)$

6. Aşağıdaki kuvvet alma işlemlerini yapınız.

a. $(x+2)^4$ **b.** $(x-3)^5$

c. $(2x-1)^4$ **d.** $(x^2+2)^5$

e. $(2x+y^2)^4$ **f.** $(xy+3)^5$

g. $(x^3-y^2)^4$ **h.** $(x^2y+2xy^2)^4$

7. Aşağıdaki polinomların açılımlarındaki 6. dereceden terimlerin kat sayılarını bulunuz.

a. $(2x+1)^7$ **b.** $(x-2)^8$

c. $(2x-3)^6$ **d.** $(x^2+2)^5$

e. $(2x^3+3)^4$ **f.** $(1-x^3)^5$

g. $(x^2-x)^6$ **h.** $(x^2-x+1)^4$

8. Aşağıdaki iki terimlilerin kuvvetlerinin açılımında ax^4y^k biçimindeki terimleri bulunuz.

a. $(x+2y)^7$ **b.** $(x^2-y)^8$

c. $(2x-3y)^6$ **d.** $(xy+2y^2)^5$

e. $(x^2+3xy)^4$ **f.** $(y^2-x^4)^5$

9. $P(x)=(x^2-x-1)^4+(x^2+x+1)^4$ polinomunun açılımında;

a. çift dereceli terimlerin kat sayılarının toplamını bulunuz.

b. tek dereceli terimlerin kat sayılarının toplamını bulunuz.

10. $P(x)=x^3-3x^2+2x-5$ ve $Q(x)=a(x-1)(x+1)(x-2)+b(x+1)(x-2)+c(x+1)+d$ polinomları veriliyor.

$P(x)=Q(x)$ olduğuna göre; a, b, c, d kat sayılarını bulunuz.

11. $P(x)=x^3+2x^2+3x-4$ ve $Q(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ polinomları veriliyor.

$P(x)=Q(x)$ olduğuna göre; a, b, c, d kat sayılarını bulunuz.

12. $P(x)=x^4+3x^3+ax^2+bx+c$ ve $Q(x)=(x^2+2x-1)(dx^2+ex+2)$ polinomları veriliyor.

$P(x)=Q(x)$ olduğuna göre; a, b, c, d, e kat sayılarını bulunuz.

13. $P(x)=x^4+ax^3+5x^2+bx+4$ ve $Q(x)=(x^2+cx+2)^2$ polinomları veriliyor.

$P(x)=Q(x)$ olduğuna göre; a, b, c kat sayılarını bulunuz.

14. Aşağıdaki koşulları sağlayan $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

a. $x^4+x^2+1=(x^2+ax+1)\cdot P(x)$

b. $x^3+ax^2+x+b=(x^2+2x+3)\cdot P(x)$

c. $x^3+ax^2+bx-2=(x+1)^2\cdot P(x)$

d. $x^3+ax+2=(x+b)^2\cdot P(x)$

e. $x^4+ax^2+b=(x^2-2x+2)\cdot P(x)$

f. $x^3+ax^2-8x+b=(x^2+x+1)\cdot P(x)$

15. $P(x)=x^4-4x^3+2x^2+4x+1$ polinomu veriliyor.

Karesi $P(x)$'e eşit olan polinomları bulunuz.

16. $P(x)=x^4+ax^3+bx+4$ polinomu bir polinomun karesi olduğuna göre, a ve b kat sayılarını bulunuz.

17. $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+4x+1$ polinomu bir polinomun karesi olduğuna göre, a ve b kat sayılarını bulunuz.

18. $P(x)=8x^6+12x^5+ax^4-11x^3+bx^2+3x-1$ polinomu bir polinomun küpü olduğuna göre, a ve b kat sayılarını bulunuz.

19. Aşağıdaki koşulları sağlayan $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

a. $P(x)+P(x+1)=4x-4$

b. $P(x)+P(x-1)=2x^2-6x+1$

c. $P(x)+P(2x)=5x^2+6x+4$

d. $P(x)+P(x^2)=x^4+2x^2+x+4$

20. $P(x)\cdot P(x^2)=x^3+ax^2+bx+4$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

21. $P(x)=(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ polinomunun bir tamkare olduğunu gösteriniz.

22. $(x^2-1)\cdot P(x)=x^4-2x^3+ax^2+bx+3$ olduğuna göre, $P(x)$ polinomunu bulunuz.

23. $A(x)=x^3+6x^2+4x-3$ polinomu veriliyor. $B(x)=A(x+b)$ polinomunda b kaç olmalıdır ki, x^2 nin kat sayısı sıfır olsun?

24. $A(x)=x^4+8x^3-4x^2+2$ polinomu veriliyor. $B(x)=A(x+b)$ polinomunda b kaç olmalıdır ki, x^3 ün kat sayısı sıfır olsun?

25. $P(x,y)=x^2-2y^2-xy+x-5y+k$ polinomu, x ve y'ye göre 1. dereceden tam kat sayılı iki polinomun çarpımı olarak yazılabildiğine göre, k kaçtır?

26. $P(x,y,z)=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ ve

$$Q(x,y,z)=(x+y)(y+z)(x+z)\cdot\left[k_1(x^2+y^2+z^2)+k_2(xy+yz+xz)\right]$$

polinomları veriliyor.

$P(x,y,z)=Q(x,y,z)$ olduğuna göre, k_1 ve k_2 kat sayılarını bulunuz.

27. 2. dereceden öyle bir polinom bulunuz ki;

$$P(x)-P(x-1)=x$$

olsun. Bundan yararlanarak,

$$1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

28. 3. dereceden öyle bir polinom bulunuz ki;

$$P(x)-P(x-1)=x^2$$

olsun. Bundan yararlanarak,

$$1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğunu gösteriniz.

29. 4. dereceden öyle bir polinom bulunuz ki;

$$P(x) - P(x-1) = x^3$$

olsun. Bundan yararlanarak,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

30. 3. dereceden öyle bir polinom bulunuz ki;

$$P(x) - P(x-1) = x(x+1)$$

olsun. Bundan yararlanarak, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1)$ toplamını bulunuz.

31. 4. dereceden öyle bir polinom bulunuz ki;

$$P(x) - P(x-1) = x(x+1)(x+2)$$

olsun. Bundan yararlanarak, $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)(n+2)$ toplamını bulunuz.

32. $(2x-1)(2x+1)(2x+3) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$ özdeşliğinden ve 27., 28., 29. alıştırmaların sonuçlarından yararlanarak, $1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)$ toplamını bulunuz.

1.3 – Bölme İşlemi

Tanım – 1.6

$R_{[x]}$ *kümesinde sıfırdan farklı* $A(x)$ *ve* $B(x)$ *polinomları için* $A(x) = B(x) \cdot C(x)$ *eşitliğini sağlayan bir* $C(x)$ *polinomu varsa; "*$B(x)$*,* $A(x)$*'i* ***böler****." denir ve bu* $B(x) | A(x)$ *ile gösterilir.*

$C(x)$ *polinomuna* $A(x)$*'in* $B(x)$*'e* ***bölüm****ü denir. Bu da,* $C(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ *veya* $C(x) = A(x) : B(x)$ *ile gösterilir.*

Burada, $A(x)$*'e* ***bölünen*** $B(x)$*'e* ***bölen*** *adı verilir.*

Örneğin; $(x-1) \cdot (x+2) = x^2 + x - 2$ olduğundan $(x-1)$ polinomu $(x^2 + x - 2)$ polinomunu böler. $\dfrac{x^2 + x - 2}{x-1} = x + 2$ olur. Bu işlemde, $(x^2 + x - 2)$ bölünen, $(x-1)$ bölen, $(x+2)$ bölümdür.

Bir polinom diğerini bölmeyebilir. Örneğin; $x + 3 = (x^2 + 1) \cdot C(x)$ eşitliğini sağlayan bir $C(x)$ polinomunun bulunamayacağı açıktır. (Sol yanın derecesi sağ yanınkinden küçüktür.) Demek ki; $(x^2 + 1)$ polinomu $(x+3)$ polinomunu bölmez. O halde; $R_{[x]}$ bölme işlemine göre kapalı değildir.

$R_{[x]}$'in çarpma işlemine göre kapalı olmaması, derecesi sıfırdan farklı bir polinomun çarpma işlemine göre tersinin bulunmamasından kaynaklanır. $A(x)$ ve $B(x)$, derecesi sıfırdan farklı iki polinom olmak üzere, $A(x) \cdot B(x) = 1$ koşulu sağlanamaz. (Neden?) $A(x)$'in de $B(x)$'in de çarpma işlemine göre tersleri yoktur.

Tanım-1.6'dan, polinomların eşitliği kavramından da yararlanılarak şu sonuçlar çıkarılır:

$R_{[x]}$ kümesinde;

1. Her $A(x)$ polinomu için, $\dfrac{A(x)}{1} = A(x)$ tir.

2. $A(x) \neq 0$ olmak üzere, $\dfrac{A(x)}{A(x)} = 1$ dir.

3. $A(x) \neq 0$ olmak üzere, $\dfrac{0}{A(x)} = 0$ dır.

4. $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $b \in R - \{0\}$ ve $B(x) = b$ olmak üzere;

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b}x + \frac{a_2}{b}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{b}x^n \text{ dir.}$$

5. $A(x) = a \cdot x^m$, $B(x) = b \cdot x^n$ ve $m \geq n$ olmak üzere;

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a \cdot x^m}{b \cdot x^n} = \frac{a}{b} \cdot x^{m-n} \text{ dir.}$$

6.
$A(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + a_{m-2} \cdot x^{m-2} \ldots + a_k \cdot x^k$,
$B(x) = b \cdot x^n$ ve $n \leq k$ olmak üzere;

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_m}{b} \cdot x^{m-n} + \frac{a_{m-1}}{b} \cdot x^{m-n-1} + \ldots + \frac{a_k}{b} \cdot x^{k-n}$$

dir.

Etkinlik – 1.16

Tanım-1.6'nın yukarıda belirttiğimiz sonuçlarını, polinomların eşitliği kavramından da yararlanarak, ispatlayınız.

Tanım-1.6'nın sonuçları, bir polinomun bir sabit polinoma, bir tek terimli polinomun bir tek terimli polinoma, bir polinomun bir tek terimli polinoma nasıl bölüneceğinin kurallarını ortaya koymaktadır. Örneklerle gösterelim:

Örnek – 1.15

a. $(2x^2-3x+6):2=\dfrac{2x^2-3x+6}{2}=\dfrac{2}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{2}$
$=x^2-\dfrac{3}{2}x+3$

b. $\dfrac{4x^7}{6x^3}=\dfrac{2}{3}x^4$; $\dfrac{6x^4}{\sqrt{3}x^3}=2\sqrt{3}x$; $\dfrac{9x^9}{3x^9}=3$

c. $(x^5-3x^4+6x^2):(3x^2)=\dfrac{x^5-3x^3+6x^2}{3x^2}$
$=\dfrac{x^5}{3x^2}-\dfrac{3x^3}{3x^2}+\dfrac{6x^2}{3x^2}$
$=\dfrac{1}{3}x^3-x+2$

Etkinlik – 1.17

$R_{[x]}$ kümesinde; $0\neq a,b,c\in R$ olmak üzere, $A(x)=x^2+a^2$ polinomunun $B(x)=bx+c$ gibi bir böleninin bulunamayacağını, bölme tanımı ve polinomların eşitliği kavramından yararlanarak, gösteriniz.

Bir polinomun diğer bir polinomu tam bölemediği durumlarda **kalanlı bölme** söz konusudur. Bir polinomun, bunu bölen herhangi bir polinoma nasıl bölüneceğini de kalanlı bölme ile birlikte ele alacağız.

Tanım – 1.7

$R_{[x]}$ kümesinde; bir $P(x)$ polinomunu derecesi en az 1 olan bir $Q(x)$ polinomuna bölmek demek,

$P(x)=Q(x)\cdot B(x)+K(x)$,

$K(x)=0$ veya $\text{der}[K(x)]<\text{der}[Q(x)]$

koşulunu sağlayan $B(x)$ ve $K(x)$ polinomlarını bulmak demektir.

*Burada, $B(x)$'e **bölüm**; $K(x)$'e **kalan** denir. $P(x)$ **bölünen**, $Q(x)$ **bölen**, $B(x)$ **bölüm** ve $K(x)$ **kalan** olmak üzere; $P(x)=Q(x)\cdot B(x)+K(x)$ eşitliğine de **bölme özdeşliği** adı verlir.*

Birkaç $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom çifti alarak, tanımda belirtilen koşulları sağlayan $B(x)$ ve $K(x)$ polinomlarını nasıl bulabileceğimizi; başka bir deyişle $P(x)$'in $Q(x)$'e bölünmesindeki bölüm ve kalanı nasıl bulabileceğimizi araştıralım.

Örnek – 1.16

a. $P(x)=x^5+1$ ve $Q(x)=x^3+1$ verilmiş olsun.

$P(x)$'in $Q(x)$ ile bölünmesindeki bölüm ve kalanı bulalım:

$\text{der}[R(x)]<3$ olmak üzere;

$x^5+1=(x^3+1)\cdot B(x)+K(x)$

eşitliğini sağlayan $B(x)$ ve $K(x)$ polinomlarını bulacağız.

$B(x)$'in baş terimi b_nx^n olsun.

$x^5=x^3\cdot b_nx^n \Rightarrow b_n=1$ ve $n=2$ olur.

$B(x)$'in baş terimi x^2 olacaktır.

Burada, $B(x)=x^2+B_1(x)$ yazabiliriz.

$$x^5+1=(x^3+1)\cdot[x^2+B_1(x)]+K(x)$$

$$\Rightarrow x^5+1=x^5+x^2+(x^3+1)\cdot B_1(x)+K(x)$$

x^5+x^2 yi x^5+1 den alt alta çıkaralım. (Bunun ne işe yarayacağını az ilerde göreceksiniz.)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^5+1 \\ \mp x^5\mp x^2 \end{array}\right\}=(x^3+1)\cdot B_1(x)+K(x)$$

$$\Rightarrow P_1(x)=-x^2+1=(x^3+1)\cdot B_1(x)+K(x)$$

Bu son eşitliğin sağlanması için, $B_1(x)=0$ ve $K(x)=-x^2+1$ olmalıdır.

Öyleyse; $B(x)=x^2$ ve $K(x)=-x^2+1$ olur.

b. $P(x)=x^3-2x^2+3$'ün $Q(x)=x^2+x+1$ ile bölünmesindeki bölüm ve kalanı bulalım:

$\text{der}[K(x)]<2$ olmak üzere;

$x^3-2x^2+3=(x^2+x+1)\cdot B(x)+K(x)$ eşitliğini sağlayan $B(x)$ ve $K(x)$ polinomlarını bulacağız.

$B(x)$'in baş terimi x olacaktır.
$B(x)=x+B_1(x)$ diyelim.

$$x^3-2x^2+3=(x^2+x+1)\cdot[x+B_1(x)]+K(x)$$

$$\Rightarrow x^3-2x^2+3=x^3+x^2+x+(x^2+x+1)\cdot B_1(x)+K(x)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^3-2x^2+3 \\ \mp x^3\mp x^2\mp x \end{array}\right\}=(x^2+x+1)\cdot B_1(x)+K(x)$$

$$\Rightarrow P_1(x)=-3x^2-x+3=(x^2+x+1)\cdot B_1(x)+K(x)$$

Bu son eşitliğin sağlanması için $B_1(x)=-3$ olmalıdır. $B_1(x)=-3$ ise,

$$-3x^2-x+3=-3x^2-3x-3+K(x)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x^2-x+3 \\ \pm 3x^2\pm 3x\pm 3 \end{array}\right\}=K(x)$$

$$\Rightarrow K(x)=2x+6 \quad \text{bulunur.}$$

$B(x)=x-3$ ve $K(x)=2x+6$ olur.

Yukarıda aşama aşama yaptığımız işlemleri aşağıdaki gibi topluca gösterebiliriz:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2+3 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} \underline{\mp x^3\mp x^2\mp x} & x-3 \\ -3x^2-x+3 & \\ \underline{\pm 3x^2\pm 3x\pm 3} & \\ 2x+6 & \end{array}$$

Örnek-1.15'te ortaya koyduğumuz bölme tekniğini özetleyelim:

$P(x)$'in derecesi $Q(x)$'in derecesinden büyük veya dereceler eşit iken, $P(x)$ polinomunu $Q(x)$ polinomuna bölmek için;

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & B(x) \\ \cline{1-1} K(x) & \end{array}$$

1. $P(x)$ ve $Q(x)$ yandaki gibi yerleştirilir.

2. $P(x)$'in baş terimi $Q(x)$'in baş terimine bölünür ve bölüm $B(x)$'in baş terimi olarak yazılır.

3. $B(x)$'in baş terimi $Q(x)$'in her terimi ile çarpılarak elde edilen polinom, $P(x)$'in altına ters işaretle yazılarak $P(x)$ ile toplanır. $P_1(x)$ polinomu elde edilir.

4. $P_1(x)=0$ veya $\text{der}[P_1(x)]<\text{der}[Q(x)]$ ise bölme bitmiştir. Değilse; $P_1(x)$'in baş terimi $Q(x)$'in baş terimine bölünür. Elde edilen bölüm $B(x)$'in ikinci terimi olarak yazılır. 3. maddedeki gibi devam edilir.

5. İşlemlere $K(x)=0$ veya $\text{der}[K(x)]<\text{der}[Q(x)]$ olana kadar devam edilir.

Örnek – 1.17

Aşağıdaki bölme işlemini inceleyiniz.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-3x^2+2x+3 & x^2+2x-1 \\ \cline{2-2} \underline{\mp 2x^4\mp 4x^3\pm 2x^2} & 2x^2-4x+7 \\ -4x^3-x^2+2x+3 & \\ \underline{\pm 4x^3\pm 8x^2\mp 4x} & \\ 7x^2-2x+3 & \\ \underline{\mp 7x^2\mp 14x\pm 7} & \\ -14x+10 & \end{array}$$

Teorem – 1.4

$R_{[x]}$ *kümesinde her* $P(x)$ *ve derecesi sıfırdan büyük olan her* $Q(x)$ *polinomu için;*

$P(x)=Q(x)\cdot B(x)+K(x)$,

$K(x)=0$ veya $\text{der}[K(x)]<\text{der}[Q(x)]$

koşulunu sağlayan birer ve yalnız birer $B(x)$ *ve* $K(x)$ *polinomları vardır.*

İspat

$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n$ olsun.

1. $P(x) = 0$ ve $n \geq 1$ iken;

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x) \Rightarrow 0 = Q(x) \cdot 0 + 0$

olacağından, $B(x) = 0$ ve $K(x) = 0$ polinomları vardır ve birer tanedir.

2. $m < n$ iken;

$P(x) = Q(x) \cdot 0 + K(x)$ olacağından, $B(x) = 0$ ve $K(x) = P(x)$ olarak vardır ve birer tanedir.

Örneğin; $P(x) = x^2 + 5$ ve $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ ise $x^2 + 5 = (x^3 - 2x^2 + 3) \cdot 0 + K(x)$ olacaktır. Bu durumda bölüm $B(x) = 0$ ve kalan $K(x) = x^2 + 5$ tir.

3. $m \geq n \geq 1$ iken;

$P(x)$'in baş terimi $a_m x^m$ ve $Q(x)$'in baş terimi $q_n x^n$ olsun. $K(x) = 0$ veya $der[K(x)] < der[Q(x)]$ koşuluyla, $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ eşitliğini sağlayan $B(x)$ polinomunun baş terimi $\frac{a_m}{q_n} x^{m-n}$ olup vardır ve bir tanedir. Bölme eşitliğinde $B(x)$ yerine, $B(x) = \frac{a_m}{q_n} x^{m-n} + B_1(x)$ konularak kısaltmalar yapılırsa bölme eşitliği $P_1(x) = Q(x) \cdot B_1(x) + K(x)$'e dönüşür. (Örnek-1.15'e bakınız.) Bu eşitlikten de $B(x)$'in ikinci terimi ($B_1(x)$'in baş terimi) bir tane olarak bulunur. Böyle devam edilerek $B(x)$in sabit terimine kadar inilirse $B(x)$ bir tane olarak elde edilecektir. Bu durumda $K(x)$ de vardır ve bir tanedir. (Neden?)

Bölüm ve kalanın tekliği şöyle de gösterilebilir:

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ (1)

eşitliğini $B(x)$ ve $K(x)$'ten başka $B_1(x)$ ve $K_1(x)$ de sağlasın.

$K_1(x) = 0$ veya $der[K_1(x)] < der[Q(x)]$ koşuluyla,

$P(x) = Q(x) \cdot B_1(x) + K_1(x)$ (2) olur.

(1) ve (2) taraf tarafa çıkarılırsa,

$$0 = Q(x) \cdot [B(x) - B_1(x)] + K(x) - K_1(x)$$

$$\Rightarrow Q(x) \cdot [B(x) - B_1(x)] = K_1(x) - K(x) \text{ bulunur.}$$

Son eşitlikte, $B(x) = B_1(x)$ ise $K(x) = K_1(x)$ olacağından, $B(x)$ ve $K(x)$'in tekliği gösterilmiş olur. $B(x) \neq B_1(x)$ iken $K(x) \neq K_1(x)$ olacağından, eşitliğin iki yanının dereceleri eşit olamaz. Çünkü

$der[B(x) - B_1(x)] > der[K_1(x) - K(x)]$ tir. (neden?)

Demek ki; $B(x) = B_1(x)$ ve $K(x) = K_1(x)$ olmak zorundadır. $B(x)$ ve $K(x)$'in tekliği ispatlanmıştır.

Örnek – 1.18

$P(x) = x^5 + x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomunun $Q(x) = x^3 + 2x - 3$ polinomu ile bölünmesinde kalan, $K(x) = x^2 + 3x - 2$ olduğuna göre a, b, c kat sayılarını bulunuz.

Çözüm

$P(x)$'i $Q(x)$ ile bölerek elde edeceğimiz belirsiz kat sayılı kalanı $x^2 + 3x - 2$'ye eşitleyeceğiz:

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^3 + ax^2 + bx + c & x^3 + 2x - 3 \\ \cline{2-2} \mp x^5 \mp 2x^3 \pm 3x^2 & x^2 - 1 \\ \cline{1-1} \quad -x^3 + (a+3)x^2 + bx + c & \\ \quad \pm x^3 \pm 2x \mp 3 & \\ \cline{1-1} \qquad (a+3)x^2 + (b+2)x + c - 3 & \end{array}$$

$$(a+3)x^2 + (b+2)x + c - 3 = x^2 + 3x - 2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+3=1 \\ b+2=3 \\ c-3=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=-2 \\ b=1 \\ c=1 \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

Etkinlik – 1.18

$R_{[x]}$'te; $der[K(x)] < der[B(x)]$ koşulu konulmazsa, $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ eşitliğini sağlayan, sınırsız sayıda $[B(x), K(x)]$ polinom çiftinin bulunabileceğini örneklerle gösteriniz.

Örneğin; $P(x) = x^3 + 2x^2$ ve $Q(x) = 2x + 3$ alarak, $B(x)$ yerine rastgele polinomlar koyunuz ve bunlara karşılık gelen $K(x)$ polinomlarını bulunuz.

Etkinlik – 1.19

Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

a. $(3x-4):(x+2)$

b. $(2x^2-3x-5):(x^3+2x-1)$

c. $(2x^2+3x-4):(x^2+2x-1)$

d. $(x^2-3x-4):(x-3)$

e. $(2x^3-x^2-5x+3):(x+1)$

f. $(x^2-3x+4):(2x+5)$

g. $(x^4+2x^3-3x^2+2x-3):(x^2-x-2)$

h. $(x^5-4x^3-3):(x^3-2)$

i. $(x^6-4x^4-3x^2+2):(x^2-2)$

j. $(x^9-6x^6-3x^3-1):(x^6-x^3+1)$

k. $(x^4-2\sqrt{2}x^3+4x^2-3):(x^2-\sqrt{2}x+2)$

l. $(2x^3y^2-x^2y^4-2xy+2y^3):(2x-y^2)$

✚ $P(x)=Q(x)\cdot B(x)+K(x)$ eşitliği bir bölme özdeşliği, $der[P(x)]=m$ ve $der[Q(x)]=n$ olsun.

1. $m<n$ ise, $B(x)=0$ ve $P(x)=K(x)$ olur. (?)

2. $m\geq n$ ise, $der[B(x)]=m-n$ olur. (Neden?)

Etkinlik – 1.20

$der[P(x)]=6$ ve $der[Q(x)]=4$ olduğuna göre, aşağıdaki polinomların derecelerini bulunuz.

a. $P(x):Q(x)$ **b.** $P^3(x):Q(x^3)$ **c.** $P(x^2):Q(2x)$

Bir Polinomun x – a ile Bölünmesindeki Kalanın Bulunması

Teorem – 1.5

$R_{[x]}$ kümesinde bir $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölünmesindeki kalan, $P(x)$ polinomunda x yerine a konulmasıyla elde edilecek olan $P(a)$ gerçek sayısıdır.

İspat

$R_{[x]}$ kümesinde; bir $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölünmesinde bölüm $B(x)$ ve kalan k olsun. Bölen 1. dereceden olduğundan, k'nın bir gerçek sayı olacağı açıktır. Bu durumda bölme özdeşliği;

$$P(x)=(x-a)\cdot B(x)+k$$

olacaktır. Bu özdeşlikte x yerine a konulursa;

$$P(a)=k$$

elde edilir.

Teorem-1.5'ten şu sonuçlar çıkarılır:

1. $P(x)$ polinomunun $x+a$ ile bölünmesinde kalan $P(-a)$ dır.

2. $P(x)$ polinomunun $ax+b$ ile bölünmesinde kalan $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ dır.

Bu sonuçlar ispat gerektirmeyecek kadar açıktır.

Örnek – 1.19

$R_{[x]}$ kümesinde $P(x)=2x^3-3x^2+4$ polinomu verilmiş olsun.

a. $P(x)$ in $x-2$ ile bölünmesindeki kalan,

$P(2)=8$ olur.

b. $P(x)$ in $x+1$ ile bölünmesindeki kalan,

$P(-1)=-1$ olur.

c. $P(x)$ in $2x-1$ ile bölünmesindeki kalan,

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$ olur.

d. $P(x)$ in $2x+3$ ile bölünmesindeki kalan,

$P\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{2}$ olur.

Örnek – 1.20

$R_{[x]}$ kümesinde bir $P(x)$ polinomunun $x+2$ ile bölünmesindeki kalan -1; $x-3$ ile bölünmesindeki kalan 24'tür.

$P(x)$ in $(x+2)(x-3)$ ile bölünmesindeki kalan kaçtır?

Çözüm

$(x+2)(x-3)$ böleni 2. dereceden olduğundan, kalan en çok 1. dereceden, $K(x)=mx+n$ gibi bir polinom olacaktır. Buna göre; bölme özdeşliği, $P(x)=(x+2)(x-3)\cdot B(x)+mx+n$ olarak yazılır.

$P(-2)=-1$ ve $P(3)=24$ olarak verilmiştir.

$P(-2)=-2m+n=-1$ ve (1)

$P(3)=3m+n=24$ olur. (2)

(1) ve (2)'den $m=5$ ve $n=9$ bulunur.

Buna göre; kalan $K(x)=5x+9$ dur.

Etkinlik – 1.21

$P(x)=x^3-2x^2+3x-1$ polinomunun aşağıdaki iki terimlilere bölünmesindeki kalanları bulunuz.

a. $x-3$ **b.** $x+\sqrt{2}$ **c.** $\sqrt{2}x-6$
d. $4x+6$ **e.** $3x-5$ **f.** $2x+4a$

Etkinlik – 1.22

$P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölünmesinde kalan 18'dir. $P(x)$, $x+1$ ile bölündüğüne göre, $(x-2)(x+1)$ ile bölünmesinde kalan ne olur?

Teorem – 1.6

a, b, c *ikişer ikişer farklı üç gerçek sayıyı göstermek üzere;* $R_{[x]}$ *kümesinde bir* $P(x)$ *polinomunun* $(x-a)(x-b)(x-c)$ *ile bölünebilmesi için gerek ve yeter koşul,* $P(x)$ *in* $x-a$, $x-b$ *ve* $x-c$ *ile ayrı ayrı bölünebilmesidir.*

Etkinlik – 1.23

Teorem-1.6'yı ispatlayınız.

Örnek – 1.21

$P(x)=x^4-4x^3+ax^2+bx+c$ polinomu $(x-1)(x+2)(x-3)$ çarpımı ile bölünebildiğine göre; a, b, c kat sayılarını bulunuz.

Çözüm

$P(1)=-3+a+b+c=0$; (1)

$P(-2)=48+4a-2b+c=0$; (2)

$P(3)=-27+9a+3b+c=0$ verilmiştir. (3)

İlköğretim yıllarınızda, birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerini çözmeyi öğrenmiştiniz. Bu bölümde, bu denklem sistemlerini, bilinmeyen sayısını da arttırarak yeniden ele alacağız. Burada şu kadarını söyleyelim:

(2)'den (1)'i ve (3)'ten (2)'yi taraf tarafa çıkarırsak;

$$\left.\begin{aligned} a-b&=-17 \\ a+b&=15 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi elde edilir.

Bu sistemin çözümünden $a=-1$ ve $b=16$ bulunur. Bu değerler ilk denklemlerin herhangi birinde yerlerine konulursa $c=-12$ elde edilir.

Tanım – 1.8

$R_{[x]}$ *kümesinde; sıfırdan farklı bir* $P(x)$ *polinomu için* $P(x_1)=0$, $P(x_2)=0$, $P(x_3)=0$, ... *olacak biçimde* x_1, x_2, x_3,... *gerçek sayıları varsa; bu sayılara* $P(x)$ *polinomunun kökleri denir.*

$P(x_k)=0$ ise $P(x)$ polinomunun $x-x_k$ ile bölünebileceği açıktır.

Teorem-1.6 ve Tanım-1.8'den şu sonuçlar çıkarılır:

1. Bir $P(x)$ polinomu $x-a$, $x-b$, $x-c$ ile bölündüğünde aynı k kalanını veriyorsa, $(x-a)(x-b)(x-c)$ ile bölündüğünde de aynı k kalanını verir.

İspat

$Q(x)=P(x)-k$ polinomu $x-a$, $x-b$, $x-c$ ile bölüneceğinden, $(x-a)(x-b)(x-c)$ ile de bölünür. Buna göre,

$$Q(x)=P(x)-k=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot B(x)$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot B(x)+k \text{ olur.}$$

2. $R_{[x]}$ kümesinde n. dereceden, baş kat sayısı a_n olan bir $P(x)$ polinomunun x_1, x_2, … , x_n gibi ikişer ikişer birbirinden farklı n tane kökü varsa,

$$P(x)=a_n\cdot(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n) \text{ dir.}$$

İspat

$P(x)$ polinomu $x-x_1$, $x-x_2$,..., $x-x_n$ ile ayrı ayrı bölüneceğinden, $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ ile de bölünür. Bu son çarpım n. dereceden olacağından bölüm a gibi bir gerçek sayıdır. Polinomların eşitliği kavramının tanımına göre; bu a sayısının, $P(x)$'in baş kat sayısı olacağı açıktır.

Etkinlik – 1.24

3. dereceden bir $P(x)$ polinomunun $x-1$, $x+2$ ve $x-3$ ile bölünmesindeki kalanlar eşit olup 4'tür. $P(x)$'in $x+1$ ile bölünmesindeki kalan 28 ise, $x-2$ ile bölünmesindeki kalan kaçtır?

Etkinlik – 1.25

Bir $P(x)$ polinomunun $(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)$ ile bölünmesindeki kalan x^3+2x^2-x-1 dir.

a. $P(x)$'in $x-1$ ile bölünmesinde kalan kaçtır?

b. $P(x)$'in $(x-1)(x-2)$ ile bölünmesinde kalan nedir?

c. $P(x)$'in $(x-1)(x-2)(x+2)$ ile bölünmesinde kalan nedir?

Bir Polinomun x^n – a ile Bölünmesindeki Kalanın Bulunması

Tanım – 1.9

$R_{[x]}$ *kümesinde,* $\text{der}[B(x)] \neq 0$ *olmak üzere;*

$P(x)$, $K(x)$ *ve* $B(x)$ *polinomları verildiğinde,* $P(x)-K(x)$ *farkı* $B(x)$ *ile bölünebiliyorsa, "*$P(x)$ *polinomu* $B(x)$ *modülüne göre* $K(x)$*'e denktir" denir.*

Bu denklik, $P(x) \equiv K(x) \pmod{B(x)}$ *ile gösterilir.*

$R_{[x]}$ kümesinde,

$\beta = \{(P(x),K(x)) \mid P(x)-K(x)\ B(x) \text{ ile bölünür.}\}$

bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir.

$P(x) \equiv K(x)$ yazılabilmesi, $(P(x),K(x)) \in \beta$ olmasındandır.

$P(x) \equiv K(x) \pmod{B(x)}$ denkliğinin, tam sayılar kümesinde gördüğünüz $a \equiv b \pmod{m}$ denkliğinin tüm özeliklerini taşıdığı ispatlanabilir. Böyle denklikler taraf tarafa toplanabilir; çarpılabilir; denkliğin iki tarafına denk polinomlar eklenebilir veya çıkarılabilir; denkliğin iki tarafı denk polinomlarla çarpılabilir;...

Tanım-1.9'a göre; $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ biçimindeki bölme özdeşliği, $P(x) \equiv K(x) \pmod{B(x)}$ denkliğini gerektirir. Öyleyse; bu denkliği sağlayan en küçük dereceli $K(x)$ polinomu $P(x)$'in $Q(x)$ ile bölünmesindeki kalandır.

Örnek – 1.22

a. $P(x) = x^3-4x^2+3x-2$ polinomunun x^2+2 modülüne göre en küçük dereceli dengini bulalım:

$$3x-2 \equiv 3x-2 \pmod{(x^2+2)} \qquad (1)$$

$$x^2+2 \equiv 0 \pmod{(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow x^2 \equiv -2 \pmod{(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow -4x^2 \equiv 8 \pmod{(x^2+2)} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot x \equiv -2 \cdot x \pmod{(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow x^3 \equiv -2x \pmod{(x^2+2)} \text{ olur.} \qquad (3)$$

(1), (2) ve (3) denklikleri taraf tarafa toplanırsa, $x^3-4x^2+3x-2 \equiv x+6 \pmod{(x^2+2)}$ elde edilir. $K(x) = x+6$ polinomu, $P(x)$'in x^2+2 ile bölünmesindeki kalandır.

Bir denklikte bir polinomun yerine bunun denginin konulabileceği açıktır. Bulduğumuz denkliğin bir bakımdan, $P(x)$'te x^2 yerine bunun x^2+2 modülüne dengi olan -2'nin konulmasıyla elde edildiğine dikkat ediniz.

b. $P(x) = x^3-4x^2+3x-2$ polinomunun x^3-2 modülüne göre en küçük dereceli dengini bulalım:

$x^3 \equiv 2 \pmod{(x^3-2)}$ olduğundan;

$$P(x) \equiv 2-4x^2+3x-2 \pmod{(x^3-2)}$$

$$\Rightarrow P(x) \equiv -4x^2+3x \pmod{(x^3-2)} \text{ bulunur.}$$

$K(x) = -4x^2 + 3x$ polinomu, $P(x)$'in $x^3 - 2$ ile bölünmesindeki kalandır.

Teorem – 1.7

$R_{[x]}$ *kümesinde bir* $P(x)$ *polinomunun* $x^n - a$ *ile bölünmesindeki kalan,* $P(x)$ *polinomunda* x^n *yerine* a *konulmasıyla elde edilecek olan* $K(x)$ *polinomudur.*

İspat

$x^n \equiv a \ (\text{mod } (x^n - a))$ denkliğine dayanılarak, $P(x)$'in n'den büyük dereceli her teriminin yerine n'den küçük dereceli dengi konulabilir. n'den küçük dereceli bu terimlerin toplamı yine n'den küçük dereceli olan $K(x)$ polinomunu verecektir. $K(x)$ polinomu ,

$K(x) = 0$ veya $\text{der}[K(x)] < n$;

$P(x) = (x^n - a) \cdot B(x) + K(x)$

koşulunu sağlayacağından, $P(x)$'in $x^n - a$ ile bölünmesindeki kalan olur.

Teorem-1.7'nin şu sonuçları, ispat gerektirmeyecek kadar açıktır.

1. $P(x)$'in $x^n + a$ ile bölünmesindeki kalan, $P(x)$'te x^n yerine $-a$ konulmasıyla elde edilecek olan $K(x)$ polinomudur.

2. $P(x)$'in $x^n - x$ ile bölünmesindeki kalan, $P(x)$'te x^n yerine x konulmasıyla elde edilecek olan $K(x)$ polinomudur.

Bu sonucu aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz:

3. $\text{der}[C(x)] < n$ olmak üzere; $P(x)$'in $x^n - C(x)$ ile bölünmesindeki kalan, $P(x)$'te x^n yerine $C(x)$ konulmasıyla elde edilecek olan $K(x)$ polinomudur.

Örnek – 1.23

$P(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 2$ polinomunun aşağıda verilen polinomlara bölünmesindeki kalanları bulunuz.

a. $x^2 - 3$ **b.** $x^3 + x$ **c.** $x^2 - x - 2$

Çözüm

a. $P(x) = (x^2)^2 - 3x^2 + 4x + 2$

$\Rightarrow K(x) = (3)^2 - 3(3) + 4x + 2$

$\Rightarrow K(x) = 4x + 2$ bulunur.

b. $P(x) = (x^3) \cdot x - 3x^2 + 4x + 2$

$\Rightarrow K(x) = (-x) \cdot x - 3x^2 + 4x + 2$

$\Rightarrow K(x) = -4x^2 + 4x + 2$ bulunur.

c. $P(x) = (x^2)^2 - 3x^2 + 4x + 2$

$\Rightarrow K_1(x) = (x+2)^2 - 3(x+2) + 4x + 2$

$\Rightarrow K_1(x) = x^2 + 5x$ elde edilir.

$K_1(x)$, bulacağımız kalana denk bir polinomdur. Burada da x^2 yerine $x + 2$ koyarsak;

$K(x) = 6x + 2$ bulunur.

Örnek – 1.24

$P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1$ polinomunun $x^2 + x + 1$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

Çözüm

I. yol

$P(x)$ polinomunda x^2 yerine $-x - 1$ koyacağız:

$P(x) = (x^2)^2 \cdot x - 3(x^2) \cdot x + 2(x^2) + 1$

$\Rightarrow K_1(x) = (-x-1)^2 \cdot x - 3(-x-1) \cdot x + 2(-x-1) + 1$

$\Rightarrow K_1(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ bulunur.

$K_1(x)$, bulacağımız kalana denk bir polinomdur. Burada da x^2 yerine $-x - 1$ koyacağız:

$K_1(x) = x^2 \cdot x + 5x^2 + 2x - 1$

$\Rightarrow K_2(x) = (-x-1) \cdot x + 5(-x-1) + 2x - 1$

$\Rightarrow K_2(x) = -x^2 - 4x - 6$ olur.

Bir kere daha x^2 yerine $-x - 1$ koyarsak kalanı elde ederiz:

$\Rightarrow K_2(x) = -(x^2) - 4x - 6$

$\Rightarrow K(x) = -(-x-1) - 4x - 6$

$\Rightarrow K(x) = -3x - 5$ bulunur.

II. yol

$x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{x^2+x+1}$ denkliğinde iki tarafı $x-1$ ile çarpalım.

$(x-1)\cdot(x^2+x+1) \equiv (x-1)\cdot 0 \pmod{x^2+x+1}$

$\Rightarrow x^3-1 \equiv 0 \pmod{x^2+x+1}$

$\Rightarrow x^3 \equiv 1 \pmod{x^2+x+1}$ elde edilir.

$P(x)$'te x^3 yerine 1 koyalım:

$P(x)=x^3\cdot x^2-3x^3+2x^2+1$

$\Rightarrow K_1(x)=(1)\cdot x^2-3(1)+2x^2+1$

$\Rightarrow K_1(x)=3x^2-2$ olur. Burada x^2 yerine $-x-1$ koyarsak kalanı elde ederiz:

$K(x)=3(-x-1)-2 \Rightarrow K(x)=-3x-5$ bulunur.

Etkinlik – 1.26

$P(x)=x^5-2x^4+3x^2-1$ polinomunun aşağıdaki polinomlara bölünmesindeki kalanları bulunuz.

a. x^2+1 **b.** x^3-3 **c.** x^2+x
d. x^3-2x **e.** x^2-x+1 **f.** x^3+x-2

Etkinlik – 1.27

$P(x)=x^5+ax^4+bx^3-3x^2+cx-1$ polinomunun $x+2$ ile bölünmesindeki kalan -11 ve x^2+2 ile bölünmesindeki kalan $9x+13$ olduğuna göre; a, b, c kat sayılarını bulunuz.

Etkinlik – 1.28

Bir $P(x)$ polinomunun $2x+1$ ile bölünmesindeki kalan 1 ve x^2+1 ile bölünmesindeki kalan $-2x-3$ olduğuna göre; $(2x+1)(x^2+1)$ ile bölünmesindeki kalan nedir?

Teorem – 1.8

Bir $P(x)$ *polinomunun bir* $Q(x)$ *polinomu ile bölünmesinde bölüm* $B(x)$ *ve kalan* $K(x)$ *ise;* $A(x)\cdot P(x)$*'in* $A(x)\cdot Q(x)$ *ile bölünmesinde, bölüm* $B(x)$ *ve kalan* $A(x)\cdot K(x)$ *polinomlarıdır.*

Etkinlik – 1.29

Teorem-1.8'i bölme özdeşliğinden yararlanarak ispatlayınız.

Teorem-1.8'den şu sonuç çıkarılır:

Bir $P(x)$ polinomunun $A(x)\cdot Q(x)$ ile bölünmesinde kalan $K(x)$ ise; $P(x)$'in $A(x)$ ile bölünmesinde kalan, $K(x)$'in $A(x)$ ile bölünmesindeki kalana eşittir.

Gerçekten; $P(x)$'in $A(x)\cdot Q(x)$ ile bölünmesinde bölüm $B(x)$ ve kalan $K(x)$ ise;

$P(x)=A(x)\cdot Q(x)\cdot B(x)+K(x)$

olacağından $P(x)$ in $A(x)$ ile bölünmesinde bölüm $Q(x)\cdot B(x)$, kalan ise $K(x)$'in $A(x)$ ile bölünmesindeki kalan olacaktır.

Örnek – 1.25

$P(x)$'in $(x+1)(x^2+1)$ ile bölünmesindeki kalan x^2-3x+4 ise;

a. $x+1$ ile bölünmesinde kalan kaçtır?

b. x^2+1 ile bölünmesinde kalan kalan nedir?

Çözüm

$P(x)$'in $x+1$ ile bölünmesindeki kalan, x^2-3x+4'ün $x+1$ ile bölünmesindeki kalana eşit olacaktır. x^2-3x+4'te x yerine -1 konulursa,

$K(x)=(-1)^2-3(-1)+4 \Rightarrow K(x)=8$ bulunur.

Bunu bir de, yukarıdakini açıklayacak biçimde yapalım:

$P(x)=(x+1)(x^2+1)\cdot B(x)+x^2-3x+4$

$\Rightarrow K(x)=(-1)^2-3(-1)+4 \Rightarrow K(x)=8$ olur.

Örnek – 1.26

$P(x)$ polinomunun $(x+2)^2$ ile bölünmesindeki kalan $2x+5$ olduğuna göre; $(x-2)\cdot P(x)$'in $(x-2)(x+2)$ ile bölünmesinde kalan nedir?

Çözüm

Teorem-1.8'e göre; $P(x)$'in $(x-2)(x+2)^2$ ile bölünmesindeki kalan,

$(x-2)(2x+5)=2x^2+x-10$'dur.

$P(x)$'in $(x-2)(x+2)=x^2-4$ ile bölünmesindeki kalan, $2x^2+x-10$'un x^2-4 ile bölünmesindeki kalana eşit olup $x-2$'dir.

Teorem – 1.9

$R_{[x]}$ kümesinde; $A(x)$ polinomu $B(x)$ polinomunu bölmüyor ancak $B(x)\cdot C(x)$ polinomunu bölüyorsa; $A(x)$ polinomu $C(x)$ polinomunu böler.

Etkinlik – 1.30

Teorem-1.9'u bölme eşitliğinden ve polinomların denkliği kavramından yararlanarak ispatlayınız.

Teorem – 1.10

Bir $P(x)$ polinomunun $A(x)\cdot B(x)$ çarpımı ile bölünmesindeki kalan ile $B(x)\cdot C(x)$ ile bölünmesindeki kalanlar eşit ve $K(x)$ ise; $A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)$ ile bölünmesindeki kalan da $K(x)$ polinomudur.

Etkinlik – 1.31

Teorem-1.10'u, Teorem-1.9'dan ve bölme özdeşliğinden yararlanarak ispatlayınız.

Örnek – 1.27

4. dereceden bir $P(x)$ polinomunun $(x-1)(x+2)$ ve $(x-1)(x-2)$ ile bölünmesindeki kalanlar eşit olup $-8x+6$'dır. $P(x)$'in $x+1$ ile bölünmesinde kalan -10; $x-3$ ile bölünmesinde kalan -18 olduğuna göre, $P(x)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm

Teorem-1.10'a göre; $P(x)$'in $(x-1)(x+2)(x-2)$ ile bölünmesindeki kalan da $-8x+6$'dır. Polinom 4. dereceden olduğundan bölme özdeşliği,

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-2)(ax+b)-8x+6$ olur.

$P(-1)=-10 \Rightarrow a-b=4$; (1)

$P(3)=-18 \Rightarrow 3a+b=0$ dır. (2)

(1) ve (2)'den $a=1$ ve $b=-3$ bulunur.

$P(x)=(x-1)(x+2)(x-2)(x-3)-8x+6$

$\Rightarrow P(x)=x^4-4x^3-x^2+8x-6$ olur.

Bir Polinomun x – a ile Bölünmesi

Bir $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ ile bölünmesinde, $Q(x)$ birinci dereceden bir polinom ise; bölme işlemi kısa yoldan yapılabilir. Şimdi, **Horner yöntemi** denilen bu yöntemi elde edeceğiz:

$Q(x)=x-a$ ve $der[P(x)]=n$ ise, bölümün derecesi $der[B(x)]=n-1$ olur. $k\in R$ de kalan olsun.

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ve

$B(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0$ diyelim.

Bu durumda bölme özdeşliği,

$$P(x)=(x-a)\cdot B(x)+k$$

$$\Rightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 = (x-a)\left(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0\right)+k$$

$$\Rightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 = b_{n-1}x^n+\left(b_{n-2}-ab_{n-1}\right)x^{n-1}+\ldots +\left(b_0-ab_1\right)x-ab_0+k$$

biçiminde yazılır ve kat sayılar eşitlenirse;

$a_n=b_{n-1}$, $a_{n-1}=b_{n-2}-ab_{n-1}$,…, $a_1=b_0-ab_1$ ve $a_0=-ab_0+K$ eşitlikleri elde edilir. Bunlardan da

$b_{n-1}=a_n$, $b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$,…, $b_0=a_1+ab_1$ ve $k=a_0+ab_0$ bulunur. Bu sonuçlar aşağıdaki gibi düzenlenirse **Horner yöntemi** elde edilmiş olur:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\
 & \downarrow & ab_{n-1} & ab_{n-2} & \ldots & ab_1 & ab_0 \\
\hline
a & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_0 & |\ k
\end{array}$$

İşlem çizelgesinden anlaşılacağı üzere, $P(x)$ polinomunu $x-a$ ile bölmek için;

1. $P(x)$ polinomunun kat sayıları bir satıra aralıklı olarak, azalan derecelerin sırasıyla yazılır. Bulunmayan ara terimlerin kat sayıları da sıfır olarak yazılmalıdır. Bir satır aşağıdan, bunların altına yatay bir çizgi çizilir.

2. a_n kat sayısı olduğu gibi, çizginin altına b_{n-1} olarak yazılır. b_{n-1}'in soluna düşey bir çizgi çizilir ve çizginin soluna, $x-a$'nın a'sı yazılır.

3. a ile b_{n-1}'in çarpımı yatay çizginin üzerine, a_{n-1}'in altına yazılır. $a_{n-1}+ab_{n-1}$ toplamı çizginin altına b_{n-2} olarak yazılır. a ile b_{n-2}'in çarpımı yatay çizginin üzerine, a_{n-2}'in altına yazılır. $a_{n-2}+ab_{n-2}$ toplamı çizginin altına b_{n-3} olarak yazılır. İşlemler böylece, b_0 ve k elde edilene kadar sürdürülür.

4. Son sayı olan k kalanı düşey bir çizgi ile soldan ayırılır. Yatay çizginin altnda, iki düşey çizginin arasında kalan kat sayılar, azalan derece sırasında, bölümün kat sayılarıdır.

Örnek – 1.28

$P(x)=x^5-3x^3+4x+2$ polinomunu $x-2$ ile bölelim:

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 1 & 0 & -3 & 0 & 4 & 2 \\ & & 2 & 4 & 2 & 4 & 16 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 8 & 18 \end{array}$$

Bölüm $x^4+2x^3+x^2+2x+8$ ve kalan 18'dir.

ax – b ile Bölme

Bir $P(x)$ polinomunun $ax-b$ ile bölünmesinde; bölüm $B(x)$, kalan k olsun. Bölme özdeşliği, $P(x)=(ax-b)\cdot B(x)+k$ olur.

Bölme özdeşliğinde $ax-b=\left(x-\frac{b}{a}\right)\cdot a$ yazılırsa,

$P(x)=\left(x-\frac{b}{a}\right)\cdot \underbrace{a\cdot B(x)}_{B_1(x)}+k$ elde edilir.

Buna göre, $P(x)$'in $ax-b$ ile bölünmesi işlemi şöyle yapılır:

Önce; $P(x)$, $x-\frac{b}{a}$ ile bölünür. Bu işlemle elde edilen $B_1(x)$ bölümü, bulunacak olan $B(x)$ bölümünün a kat sayısı ile çarpımıdır. Bu durumda; $B_1(x)$'in kat sayıları a ile bölünerek, aranılan $B(x)$ bölümünün kat sayıları elde edilir. Kalanda bir değişiklik olmadığına dikkat ediniz.

Örnek – 1.29

$P(x)=2x^4-3x^3+4x+1$ polinomunu $2x-1$ ile bölelim. $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ olduğundan; $P(x)$'i $x-\frac{1}{2}$ ile bölecek, elde edilecek bölümün kat sayılarını da 2 ile böleceğiz:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ & & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & -2 & -1 & \frac{7}{2} & \frac{11}{4} \end{array}$$

Bölümün kat sayıları $\frac{2}{2}$, $\frac{-2}{2}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{\frac{7}{2}}{2}$ olup bölüm $x^3-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$ ve kalan $\frac{11}{4}$'tür.

Etkinlik – 1.32

$P(x)=x^5-2x^3+x^2-1$ polinomunu aşağıdaki polinomlara bölünüz.

a. $x-3$ **b.** $x+1$ **c.** $x+\frac{1}{2}$

d. $2x+1$ **e.** $3x-2$ **f.** $4x-2$

(x – a)(x – b) ile Bölme

$P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölünmesinde; bölüm $B_1(x)$, kalan k_1 olsun. Bölme özdeşliği, $P(x)=(x-a)\cdot B_1(x)+k_1$ olur. (1)

$B_1(x)$ polinomunun $x-b$ ile bölünmesinde; bölüm $B(x)$, kalan k_2 olsun. Bölme özdeşliği, $B_1(x)=(x-b)\cdot B(x)+k_2$ olur. (2)

(2)'deki $B_1(x)$ değeri (1)'de yerine konulursa;

$P(x)=(x-a)(x-b)\cdot B(x)+\underbrace{k_2(x-a)+k_1}_{K(x)}$ bulunur.

Bu son eşitlik bir bölme özdeşliğidir.

Bu açıklamaya göre; bir $P(x)$ polinomunun $(x-a)(x-b)$ ile bölünmesi işlemi şöyle yapılır:

1. $P(x)$, $x-a$ ile bölünür. $B_1(x)$ bölümü ve k_1 kalanı bulunur.

2. $B_1(x)$, $x-b$ ile bölünür. $B(x)$ bölümü ve k_2 kalanı bulunur.

Aranılan bölüm $B(x)$, kalan $k_2(x-a)+k_1$ olur.

Örnek – 1.30

$P(x)=x^4-2x^2+x+1$ polinomunu $(x-1)(x+2)$ ile bölelim:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
 & & -2 & 2 & -2 & \\
\hline
-3 & 1 & -1 & 1 & -2 &
\end{array}$$

Bölüm $B(x)=x^2-x+1$ ve

kalan $K(x)=-2(x-1)+1 \Rightarrow K(x)=-2x+3$ olur.

Etkinlik – 1.33

$P(x)=x^4-2x^3+x^2-3$ polinomunu aşağıdaki polinomlara bölünüz.

a. $(x+1)(x-3)$ **b.** $x(x-2)$

c. $(x+2)(x+3)$ **d.** $(x-2)^2$

Etkinlik – 1.34

Bir $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölünmesinde bölüm $B_1(x)$ ve kalan k_1;

$B_1(x)$'in $x-b$ ile bölünmesinde bölüm $B_2(x)$ ve kalan k_2;

$B_2(x)$'in $x-c$ ile bölünmesinde bölüm $B(x)$ ve kalan k_3 ise;

$P(x)$ polinomunun $(x-a)(x-b)(x-c)$ ile bölünmesindeki bölümün $B(x)$ ve kalanın $K(x)=k_3(x-a)(x-b)+k_2(x-a)+k_1$ olduğunu gösteriniz.

Bunu genelleştirerek, bir $P(x)$ polinomunun $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_n)$ çarpımı ile bölünmesindeki bölüm ve kalanı ifade ediniz.

Etkinlik – 1.35

$P(x)=x^6-x^4+x^2-4x+1$ polinomunu aşağıdaki polinomlara bölünüz.

a. $(x-1)(x+1)(x-3)$ **b.** $x(x-2)(x+2)$

c. $(x+1)^2(x+3)$ **d.** $(x-2)^4$

Etkinlik – 1.36

a. Bir $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölünmesinde bölüm $B_1(x)$ ve kalan k_1;

$B_1(x)$'in $x-\frac{c}{b}$ ile bölünmesinde bölüm $B_2(x)$ ve kalan k_2 ise;

$P(x)$ polinomunun $(x-a)(bx-c)$ ile bölünmesindeki bölümün $B(x)=B_2(x):b$ ve kalanın $K(x)=k_2(x-a)+k_1$ olduğunu gösteriniz.

b. Bir $P(x)$ polinomunun $x-\frac{b}{a}$ ile bölünmesinde bölüm $B_1(x)$ ve kalan k_1;

$B_1(x)$'in $x-\frac{d}{c}$ ile bölünmesinde bölüm $B_2(x)$ ve kalan k_2 ise;

$P(x)$ polinomunun $(ax-b)(cx-d)$ ile bölünmesindeki bölümün $B(x)=B_2(x):(a\cdot c)$ ve kalanın $K(x)=k_2\left(x-\frac{b}{a}\right)+k_1$ olduğunu gösteriniz.

Etkinlik-1.36'da bir $P(x)$ polinomunun $(ax-b)(cx-d)$ ile nasıl bölüneceğini göstermiş oldunuz. Şöyle ki;

$P(x)$ polinomunu $(ax-b)(cx-d)$ ile bölmek için;

1. $P(x)$, $\left(x-\frac{b}{a}\right)\left(x-\frac{d}{c}\right)$ ile bölünür. Kalan yazılır.

2. $P(x)$'in, $\left(x-\frac{b}{a}\right)\left(x-\frac{d}{c}\right)$ ile bölünmesinde elde edilen bölümün kat sayıları $a \cdot c$ ile bölünerek, istenilen bölümün kat sayıları bulunur.

Örnek – 1.31

$P(x)=6x^3+13x^2+3x-5$'in $(2x-1)(3x+2)$ ile bölünmesinde bölüm ve kalanı bulunuz.

Çözüm

$P(x)$'i önce $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ ile böleceğiz:

	6	13	3	-5
		3	8	11/2
$\frac{1}{2}$	6	16	11	| 1/2
		-4	-8	
$-\frac{2}{3}$	6	12	| 3	

$K(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \Rightarrow K(x)=3x-1$;

$B(x)=\frac{6}{6}x+\frac{12}{2} \Rightarrow B(x)=x+2$ olur.

Etkinlik – 1.37

Aşağıda verilen bölme işlemlerindeki bölümleri ve kalanları bulunuz.

a. $(2x^3+x^2+x-3):[(x-1)(2x+1)]$

b. $(12x^3-8x^2-25x+15):[(2x+3)(3x-2)]$

c. $(16x^4+36x^3+4x^2-9x+1)$
$:[(x+2)(2x-1)(4x+1)]$

d. $(16x^6-20x^5+40x^4-28x^3+26x^2-2x):(2x-1)^4$

Teorem – 1.11

$R_{[x]}$ kümesinde; bir $P(x)$ polinomunun $(x-a)^n$ ile $(n>1)$ bölünebilmesi için gerek ve yeter koşul, $P(x)$ ve bunun $x-a$ ile $n-1$ kere art arda bölünmesiyle elde edilecek olan bölümlerin $x-a$ ile bölünebilmesidir.

Etkinlik – 1.38

Teorem-1.11'i ispatlayınız.

Örnek – 1.32

$P(x)=x^5-2x^3+ax^2+bx+c$ polinomu $(x-1)^3$ ile bölünebildiğine göre; a, b, c kat sayılarını bulunuz.

Çözüm

I. yol

$P(x)$'in $x-1$ ile bölünmesinde bölüm $P_1(x)$;

$P_1(x)$'in $x-1$ ile bölünmesinde bölüm $P_2(x)$ olsun. $P(x)$, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ polinomları $x-1$ ile bölünebilmelidir. Başka bir deyişle; $P(x)$, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ polinomlarının $x-1$ ile bölünmesindeki kalanlar sıfır olmalıdır. Bu kalanlar Horner yöntemi ile kolayca bulunur:

	1	0	-2	a	b	c
		1	1	-1	$a-1$	$a+b-1$
1	1	1	-1	$a-1$	$a+b-1$	| $a+b+c-1$
		1	2	1	a	
1	1	2	1	a	| $2a+b-1$	
		1	3	4		
1	1	3	4	| $a+4$		

$P(x)$'in $x-1$ ile bölünmesinde kalan
$K(x)=a+b+c-1$;
$P_1(x)$'in $x-1$ ile bölünmesinde kalan
$K_1(x)=2a+b-1$;
$P_2(x)$'in $x-1$ ile bölünmesinde kalan
$K_2(x)=a+4$ olur.

$$\left.\begin{aligned} a+b+c-1&=0\\ 2a+b-1&=0\\ a+4&=0 \end{aligned}\right\}$$ sistemi çözülerek

$a=-4$, $b=9$ ve $c=-4$ bulunur.

II. yol

Polinomların eşitliği kavramından yararlanabiliriz:

$P(x)$'in $(x-1)^3$ ile bölünmesinde bölüm 2.den olup baş katsayısı 1 olacaktır. (Neden?) Kalan da sıfır olacağından, bölme özdeşliği;

$P(x)=(x-1)^3(x^2+dx+e)$ olarak yazılabilir.

$$P(x)=(x-1)^3(x^2+dx+e)$$
$$\Rightarrow x^5-2x^3+ax^2+bx+c=(x-1)^3(x^2+dx+e)$$
$$\Rightarrow x^5-2x^3+ax^2+bx+c = (x^3-3x^2+3x-1)(x^2+dx+e)$$

Eşit derecelerin kat sayıları eşitlenirse,

$0=d-3$ (x^4 ün kat sayıları);
$-2=3-3d+e$ (x^3 ün kat sayıları);
$a=-1+3d-3e$ (x^2 nin kat sayıları);
$b=-d+3e$ (x'in kat sayıları);
$c=-e$ (sabit terimler) elde edilir.

Bu sistemin çözülmesiyle $a=-4$, $b=9$, $c=-4$, $d=3$ ve $e=4$ bulunur.

Böylece; bölüm de x^2+3x+4 olarak bulunmuş olur.

Bir Polinomun x – a nın Kuvvetlerine Göre Açılması

$P(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ polinomunu $(x-2)^3$ ile bölerek başlayalım:

	2	−3	4	1
		4	2	12
2	2	1	6	13
		4	10	
2	2	5	16	
		4		
2	2	9		

Bölüm $B(x)=2$ ve

kalan $K(x)=9(x-2)^2+16(x-2)+13$ olur.

Bölme özdeşliği $P(x)=(x-2)^3\cdot B(x)+K(x)$ olup bölüm ve kalan bu özdeşlikte yerlerine konulursa,

$P(x)=2(x-2)^3+9(x-2)^2+16(x-2)+13$ elde edilir. Bu son ifade; $P(x)$'in, $x-2$'nin kuvvetlerine göre açılmış biçimidir.

Bu örnek bize; bir polinomun, $x-a$'nın kuvvetlerine göre nasıl açılacağının yöntemini vermektedir. Şöyle ki;

n. dereceden bir polinomu $x-a$'nın kuvvetlerine göre açmak için;

1. Polinom $(x-a)^n$ ye bölünür.

2. Elde edilen bölüm ve kalan, bölme özdeşliğinde yerlerine konulur.

Bölme özdeşliğinin bu son biçimi; polinomun, $x-a$'nın kuvvetlerine göre açılmış biçimidir.

Etkinlik – 1.39

$P(x)=x^4+x^3-2x^2-4x+1$ polinomunu veriliyor. $P(2\sqrt[3]{2}-1)$ değerini bulunuz.
(Polinomu $x+1$'in kuvvetlerine göre açmanız işinizi kolaylaştırır.)

Simetrik ve Homojen Polinomlar

Tanım – 1.10

*Birden fazla belirsizli polinom kümelerinde; bir polinomun belirsizlerinin yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilen tüm polinomlar yine ilk polinoma eşit kalıyorsa böyle polinomlara **simetrik polinomlar** denir.*

Örnek – 1.33

a. $P(x,y)=2xy+3x+3y+5$ polinomunda $P(y,x)=2yx+3y+3x+5$ olup $P(x,y)=P(y,x)$ olduğundan $P(x,y)$ simetriktir.

b. $P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x^2y+2y^2z+2z^2x+1$ polinomu simetrik değildir. $P(x,y,z)\neq P(y,x,z)$

Polinomun simetrik olması için $2x^2z$, $2xz^2$, $2yz^2$ terimlerinin de bulunması gerekirdi.

Tanım – 1.11

Birden fazla belirsizli polinom kümelerinde; bütün terimlerinin dereceleri eşit olan polinomlara ***homojen polinomlar*** *denir.*

Örnek – 1.34

a. $P(x,y)=x^2+y^2+xy$ polinomu ikinci dereceden simetrik ve homojen bir polinomdur.

b. $P(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+x^2y+2y^2z+3z^2x$ polinomu 3. dereceden homojen bir polinomdur. Simetrik değildir.

c. $P(x,y)=(x+y)^{10}$ polinomu 10. dereceden simetrik ve homojen bir polinomdur. (İki terimlinin açılımında her terimin derecesi 10 olacaktır.)

d. $P(x,y)=x^2+y^2$ polinomu 2. dereceden simetrik ve homojen bir polinomdur.
$P(x,y,z)=x^2+y^2$ polinomu 2. dereceden homojen bir polinomdur. Ancak, simetrik değildir.
($P(y,z,x)=y^2+z^2$ olduğuna dikkat ediniz)

✚ $R_{[x,y]}$ kümesinde; $(k_1,k_2,...,k_n\in R)$

1. 1. dereceden simetrik ve homojen her polinom $k_1(x+y)$ biçimindedir.

2. 2. dereceden simetrik ve homojen her polinom $k_1(x^2+y^2)+k_2xy$ biçimindedir.

3. 3. dereceden simetrik ve homojen her polinom $k_1(x^3+y^3)+k_2(x^2y+xy^2)$ biçimindedir.

4. 4. dereceden simetrik ve homojen her polinom $k_1(x^4+y^4)+k_2(x^3y+xy^3)+k_3x^2y^2$ biçimindedir.

$R_{[x,y,z]}$ kümesinde; $(k_1,k_2,...,k_n\in R)$

1. 1. dereceden simetrik ve homojen her polinom $k_1(x+y+z)$ biçimindedir.

2. 2. dereceden simetrik ve homojen her polinom $k_1(x^2+y^2+z^2)+k_2(xy+xz+yz)$ biçimindedir.

3. 3. dereceden simetrik ve homojen her polinom

$$k_1(x^3+y^3+z^3)$$
$$+k_2(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2)$$
$$+k_3xyz$$

biçimindedir.

4. 4. dereceden simetrik ve homojen her polinom

$$k_1(x^4+y^4+z^4)$$
$$+k_2(x^3y+x^3z+xy^3+y^3z+xz^3+yz^3)$$
$$+k_3(x^2yz+y^2xz+xyz^2)$$
$$+k_4(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$$

biçimindedir.

Simetrik polinomlarda aynı türden terimlerin kat sayılarının eşit olacağına dikkat ediniz. Örneğin; son maddede x^3y ile y^3z aynı türden terimler olup kat sayıları k_2 dir. (Belirsizleri değiştirilerek birinden diğeri elde edilebilen terimler aynı türden terimlerdir.)

Teorem – 1.12

Aynı polinom kümelerinde; $(R_{[x,y]},\ R_{[x,y,z]}$ gibi.)

simetrik ve homojen bir polinom, simetrik ve homojen bir polinom ile bölünüyorsa, bölüm de simetrik ve homojendir.

Etkinlik – 1.40

Teorem-1.12'yi ispatlayınız.

Örnek – 1.35

$P(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+mxyz$ polinomunun $x+y+z$ ile bölünebilmesi için m kaç olmalıdır. Bölümü bulunuz.

Çözüm

Verilen polinom, 3. dereceden homojen ve simetrik bir polinomdur. Bu polinom $x+y+z$ ile bölünürse, bölüm 2. dereceden homojen ve simetrik olacaktır. 2. dereceden homojen ve simetrik polinomların $R_{[x,y,z]}$'deki genel biçimi,

$$k_1(x^2+y^2+z^2)+k_2(xy+yz+xz)\text{'dir.}$$

Bu durumda bölme özdeşliği,

$$x^3+y^3+z^3+mxyz=(x+y+z)\cdot\left[k_1\left(x^2+y^2+z^2\right)+k_2(xy+yz+xz)\right]$$

olarak yazılır.

$(x,y,z)=(1,0,0)$ koyularak $k_1=1$;

$(x,y,z)=(1,1,0)$ koyularak $k_2=-1$;

$(x,y,z)=(1,1,1)$ koyularak $m=-3$ bulunur.

Demek ki; $m=-3$ için, verilen polinom $x+y+z$ ile bölünür ve bölüm, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$ olur.

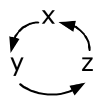
✚ Polinomlarda bir de **periyodik simetri** diyebileceğimiz bir tür simetri söz konusudur.

Örneğin;

$P(x,y,z)=x^3\left(y^2-z^2\right)+y^3\left(z^2-x^2\right)+z^3\left(x^2-y^2\right)$ polinomunda,

$P(y,x,z)=y^3\left(x^2-z^2\right)+x^3\left(z^2-y^2\right)+z^3\left(y^2-x^2\right)$ olup $P(x,y,z)=-P(y,x,z)$ 'dir. (Çarpmaları yapıp görünüz.) Dolayısıyla, bu polinom simetrik değildir.

Ancak; belirsizlerin yerleri yandaki gibi periyodik olarak değiştirilirse,



$P(x,y,z)=P(y,z,x)=P(z,x,y)$

olduğu görülür. (Doğruluğunu gösteriniz.) Böyle polinomlara **periyodik simetrik polinomlar** denir. Simetrinin bu türü de uygulamalarda çok işe yarar. Şöyle ki;

Periyodik simetrik bir $P(x,y,z)$ polinomu $x-y$ ile bölünüyorsa, $y-z$ ve $z-x$ ile de bölünür; $x-y-z$ ile bölünüyorsa, $y-z-x$ ve $z-x-y$ ile de bölünür;...

Örnek – 1.36

$P(x,y,z)=x^3\left(y^2-z^2\right)+y^3\left(z^2-x^2\right)+z^3\left(x^2-y^2\right)$ polinomunun $(x-y)(y-z)(x-z)$ ile bölünebileceğini gösteriniz. Bölümü bulunuz.

Çözüm

Polinomda x yerine y konulursa,

$P(y,y,z)=y^3\left(y^2-z^2\right)+y^3\left(z^2-y^2\right)=0$ olup polinom $x-y$ ile bölünür. Polinom periyodik simetrik olduğundan $y-z$ ve $x-z$ ile de bölünür. Öyleyse; polinom $(x-y)(y-z)(x-z)$ ile bölünür. Bölünen 5. dereceden homojen ve periyodik simetrik; bölen 3. dereceden homojen ve periyodik simetrik olduğundan, bölüm 2. dereceden homojen ve simetrik olur. Diğer taraftan; $P(x,y,z)$ polinomu x, y ve z'ye göre 3. derecedendir. Bölen de x, y ve z'ye göre 2. dereceden olduğundan, bölümde x^2, y^2 ve z^2li terimler bulunmaz. Öyleyse; bölme özdeşliği,

$$x^3\left(y^2-z^2\right)+y^3\left(z^2-x^2\right)+z^3\left(x^2-y^2\right)=(x-y)(y-z)(x-z)[k(xy+yz+zx)]$$

olarak yazılır.

$(x,y,z)=(1,0,-1)$ için $k=1$ bulunur.

Bölüm $xy+yz+xz$ 'dir.

Etkinlik – 1.41

a. $P(x,y,z)=xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$ polinomunun $(x-y)(y-z)(x-z)$ ile bölünebileceğini gösteriniz.Bölümü bulunuz.

b. $P(x,y,z)=xy^4-yx^4+yz^4-zy^4+zx^4-xz^4$ polinomunun $(x-y)(y-z)(x-z)$ ile bölünebileceğini gösteriniz.Bölümü bulunuz.

Alıştırmalar ve Problemler – 1.3

1. Aşağıda verilen bölme işlemlerini yapınız. Her işlemde bölüm ve kalanı belirtiniz.

a. $\left(-4x^3-3x^2+6\right):(2)$

b. $\left(6x^2+4x-3\right):\left(3x^2\right)$

c. $(3x-7):(2x+1)$

d. $(2x+3):\left(x^2+2x+2\right)$

e. $\left(x^2+3x-6\right):\left(x^2+2x+2\right)$

f. $\left(4x^3-3x^2+5x-1\right):(2x+3)$

g. $\left(x^3+4x-2\right):\left(x^2-x+2\right)$

h. $\left(4x^5-x\right):\left(2x^3+x\right)$

i. $\left(2x^6+3x^2-x+1\right):\left(x^3+x+1\right)$

j. $\left(x^6+3x^4-2x^2+4\right):\left(x^4+2x^2+2\right)$

k. $\left(-4x^5-3x^3+6x\right):\left(2x^3-3x\right)$

l. $\left(x^8+4x^4-3\right):\left(x^2+2\right)$

m. $\left(x^3-3x^2y+2xy^2-y^3\right):(x+2y)$

n. $\left(x^6+x^4y^2+3y^4\right):\left(x^2+y^2\right)$

2. Aşağıda verilen eşitlikleri sağlayan $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

a. $2x^3+11x^2-4x-3=(2x+3)P(x)+6x^2-5x$

b. $8x^2=\left(x^2+5\right)P(x)+\left(1+x^2\right)\left(5-x^2\right)$

c. $\left(x^2+x\right)\left(x^2-2\right)=\left(x^2+2\right)P(x)+2x^3-4x^2$

d. $(2x-1)\left(x^2-1\right)=(2x+1)P(x)-2x(x+2)$

3. $P(x)=x^5+2x^4-x^3-x-1$ polinomunun, aşağıda verilen polinomlarla bölünmesindeki kalanları bulunuz.

a. $x-1$ **b.** $x+2$

c. $x-\sqrt{2}$ **d.** $x+\sqrt{3}$

e. $2x-3$ **f.** $2x+1$

g. x^2-2 **h.** x^2+3

i. x^2+x **j.** x^2-2x

k. x^3-3 **l.** x^3-x

m. x^2-2x-1 **n.** x^3+x^2-1

o. x^4+x^2 **p.** x^3+2x

4. Aşağıda verilen her polinom, yanında verilen polinom ile bölünebildiğine göre; kat sayılardaki bilinmeyenleri bulunuz.

a. x^3+ax^2-4x-3 ; $x+2$

b. x^3+2x^2+mx+4 ; $x-2$

c. $2x^3+mx^2+2x+3$; $2x+1$

d. x^3+ax^2+bx+2 ; x^2+1

e. x^4+x^3+mx+n ; x^2+1

f. x^4-3x^2+ax+b ; x^2+x

g. $x^5+3x^4+ax^2+bx+c$; x^3+2

h. $ax^4-2x^3+3x^2+bx+c$; x^3-2x

i. x^3+ax^2-4x+b ; $(x+1)(x-2)$

j. x^3+mx^2+nx+4 ; $(x-1)(x+2)$

k. ax^5+2x^3-3x+b ; $x(x-1)$

l. ax^5-x^3+bx+c ; $(x-1)(x+1)(x-2)$

m. $x^4+x^3+ax^2+bx+c$; $(x-2)\left(x^2+2\right)$

n. $x^6+x^4+ax^3+bx^2+cx+d$; $x^2\left(x^2+2\right)$

5. $P(x)=x^5+2x^3-3x^2-x-1$ polinomunun, aşağıda verilen polinomlarla bölünmesindeki bölümleri ve kalanları bulunuz.

a. $x-1$ **b.** $(x+1)(x-2)$

c. $x(x+2)$ **d.** $(x-2)(x+3)$

e. $x(x+3)(x-3)$ **f.** $(x-1)(x+1)(x-2)$

g. $(x-2)^2$ **h.** $(x+1)^3$

i. $(x-1)^4$ **j.** $(x+1)(x+2)^2$

k. $x^2(x+1)^2$ **l.** $(x-1)^2(x+1)^3$

6. Aşağıda verilen bölme işlemlerindeki bölümleri ve kalanları bulunuz.

a. $\left(x^3+5x^2-4x-3\right):(x-3)$

b. $\left(x^4-6x^3+3x^2+x+2\right):(x+2)$

c. $\left(2x^4-3x^2+5x+6\right):(2x-5)$

d. $\left(6x^5+4x^4-3x^2+x-1\right):(3x+2)$

e. $\left(x^4-2x^3+3x^2+5x-1\right):[(x-2)(x-3)]$

f. $\left(x^6+4x^2\right):[x(x+2)(x+3)]$

g. $\left(x^5+x^3-4x^2+3x-2\right):[(x-2)(x+3)(x-4)]$

h. $\left(x^6+x^4-2x^3\right):[x(x+1)(x-2)(x+4)]$

7. Aşağıda verilen bölme işlemlerindeki bölümleri ve kalanları bulunuz.

a. $\left(4x^5+2x^3-x^2-3x+1\right):[(x+2)(2x+1)]$

b. $\left(x^3+x+1\right):[(2x-1)(3x+1)]$

c. $\left(18x^4-9x^3-56x^2\right):[(x-2)(2x+3)(3x-1)]$

d. $\left(81x^4-54x^3+9x-3\right):(3x-1)^3$

e. $\left(36x^4-108x^3+65x^2-12\right):\left[(3x-2)(2x-3)^2\right]$

f. $\left(16x^6+24x^4+x\right):\left[(2x-1)^2(2x+1)^2\right]$

8. Aşağıda verilen her polinom, yanında verilen polinom ile bölünebildiğine göre; kat sayılardaki bilinmeyenleri bulunuz.

a. x^3+mx^2-3x+n ; x^2+x+1

b. x^4+mx^2+4x+n ; x^2-x+2

c. x^4+mx^2+n ; $(x-1)^2$

d. $x^4+x^3+ax^2+bx+c$; $(x-2)^3$

e. ax^5+bx^4+1; $(x-1)^2$

f. $ax^{n+1}+bx^n+1$; $(x-1)^2$

9. $P(x)=8x^3-4x^2+ax+b$ polinomundaki bilinmeyen kat sayıları, aşağıda verilen koşullara göre bulunuz.

a. $P(x)$'in $x+1$ ve $x-2$ ile bölünmesindeki kalanlar, sırasıyla -8 ve 43'tür.

b. $P(x)$'in $2x-1$ ve $2x+3$ ile bölünmesindeki kalanlar, sırasıyla 4 ve -40'tır.

c. $P(x)$'in x^2+1 ile bölünmesindeki kalan $2x+1$'dir.

d. $P(x)$'in x^2+x-1 ile bölünmesindeki kalan $12x-5$'tir.

10. $P(x)=x^5-2x^4+ax^3+bx^2+3x+c$ polinomundaki bilinmeyen kat sayıları, aşağıda verilen koşullara göre bulunuz.

a. $P(x)$'in $x-1$ ve $x+2$ ile bölünmesindeki kalanlar 4'tür. $P(x)$, $x-2$ ile bölünmektedir.

b. $P(x)$'in $x+2$ ile bölünmesinde kalan 10; x^2+1 ile bölünmesinde kalan $2x-1$'dir

c. $P(x)$'in x^3+x ile bölünmesindeki kalan $3x+5$'tir.

d. $P(x)$'in $x+1$, $x-2$, $x+2$ ile bölünmesindeki kalanlar, sırasıyla **6**, -25 ve 5 'tir.

e. $P(x)$'in x^3+x+1 ile bölünmesindeki kalan x^2+x+1'dir.

11. Bir $P(x)$ polinomu $x-3$ ile bölünmekte, $x-1$ ile bölündüğünde 4 kalanını vermektedir. $P(x)$'in $(x-1)(x-3)$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

12. Bir $P(x)$ polinomunun $x+1$ ile bölünmesinde kalan -4, x^2+1 ile bölünmesinde kalan $x+7$'dir. $P(x)$'in $(x+1)(x^2+1)$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

13. Bir $P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölünmesinde kalan -1, x^2-x ile bölünmesinde kalan -3'tür. $P(x)$'in $(x-2)(x^2-x)$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

14. Bir $P(x)$ polinomunun $(x-1)(x+2)(x+3)$ ile bölünmesinde kalan x^2-x+2'dir.

a. $P(x)$'in $x+3$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

b. $P(x)$'in $(x-1)(x+2)$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

15. Bir $P(x)$ polinomunun $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ ile bölünmesinde kalan x^3-x^2-x-2'dir.

a. $P(x)$'in $(x-1)(x+2)$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

b. $P(x)$'in $(x-1)(x+1)$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

c. $P(x)$'in $(x-1)(x^2+x+1)$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

16. Bir $P(x)$ polinomunun $(x+2)^4$ ile bölünmesinde kalan x^3+x+1'dir.

a. $P(x)$'in $x+2$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

b. $P(x)$'in $(x+2)^2$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

c. $P(x)$'in $(x+2)^3$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

17. Bir $P(x)$ polinomunun $(2x+1)^4$ ile bölünmesinde kalan $8x^3+14x^2+7x+2$'dir.

a. $P(x)$'in $2x+1$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

b. $P(x)$'in $(2x+1)^2$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

c. $P(x)$'in $(2x+1)^3$ ile bölünmesindeki kalanı bulunuz.

18. $P(x)=x^3+3x^2+ax+b$ polinomundaki bilinmeyen kat sayıları, aşağıda verilen koşullara göre bulunuz.

a. $P(x)$'in $(x+2)(x-3)$ ile bölünmesinde kalan $12x+25$'tir.

b. $P(x)$'in x^2+3x-4 ile bölünmesinde kalan $2x+3$'tür.

c. $P(x)$'in x^3+2x^2+x+3 ile bölünmesinde kalan x^2+x-4'tür.

d. $P(x)$'in $(x+1)^2$ ile bölünmesinde kalan $x-2$'dir.

19. $P(2x+1)=8x^3+4x^2-2x-6$ veriliyor.

a. $P(x)$'in $x-1$ ile bölünmesinde kalan kaçtır.

b. $P(x-2)$'nin $x+1$ ile bölünmesinde kalan kaçtır.

c. $P(x)$'in $(x+1)(x-3)$ ile bölünmesinde kalan nedir?

d. $P(x+2)$'nin $(x+3)(x+5)$ ile bölünmesinde kalan nedir?

e. $P(x)$'in x^2+2 ile bölünmesinde kalan nedir?

f. $P(x+2)$'nin x^2+2 ile bölünmesinde kalan nedir?

g. $P(2x^2+1)$'in $x-2$ ile bölünmesinde kalan kaçtır?

h. $P(x^2+2)$'nin x^2-3 ile bölünmesinde kalan nedir?

20. $P(x)=x^5-x^4+x^3+ax^2+bx+c$ polinomundaki bilinmeyen kat sayıları, aşağıda verilen koşullara göre bulunuz.

a. $P(x)$'in $x(x+1)(x-2)$ ile bölünmesinde kalan $4x^2+4x-3$'tür.

b. $P(x)$'in $(x-1)(x^2+1)$ ile bölünmesinde kalan x^2-x-1'dir.

c. $P(x)$'in x^3+2 ile bölünmesinde kalan $x+1$'dir.

d. $P(x)$'in x^3-x-2 ile bölünmesinde kalan $3x^2-x+7$'dir.

21. $P(x)=x^4+2x^3+ax^2+bx+c$ polinomunun x^3+x^2-2x-1 ile bölünmesinde kalan $2x^2+x-2$ olduğuna göre; a, b, c kat sayılarını bulunuz.

22. 3. dereceden bir $P(x)$ polinomu $(x+1)(x-2)$ ile bölündüğünde bölüm $B(x)$, kalan $2x-3$ olmaktadır. $P(x)$ polinomu $(x-1)(x+2)$ ile bölündüğünde kalan $-4x-11$'dir.

$B(x)$ polinomunu bulunuz.

23. 4. dereceden bir $P(x)$ polinomu x^2+x ve x^2-2 ile ayrı ayrı bölündüğünde kalanlar eşit olup $12x-8$'dir. $P(x)$ polinomu $x-1$ ile bölünebildiğine göre, $P(x)$ polinomunu bulunuz.

24. 3. dereceden öyle bir $P(x)$ polinomu bulunuz ki, $(2x-1)(x+2)$ ile bölünmesinde kalan $-4x$; $(x-2)(2x+1)$ ile bölünmesinde kalan $-10x+12$ olsun.

25. 3. dereceden bir $P(x)$ polinomunun $(x-2)(x+3)$ ve $(x-2)(x-3)$ ile bölünmesinde kalanlar eşit olup $3x-2$'dir. $P(x)$'in $x+1$ ile bölünmesinde kalan 19 olduğuna göre; $P(x)$ polinomunu bulunuz.

26. Bir $P(x)$ polinomunun $(x-1)(x-2)$ ile bölünmesinde kalan $9x-10$; $(x-1)(x+3)$ ile bölünmesinde kalan $4x-5$'tir. $P(x)$ polinomunun $(x-1)(x-2)(x+3)$ ile bölünmesinde kalan nedir?

27. 4. dereceden bir $P(x)$ polinomunun $(x-2)^2$ ve $(x-2)(x+2)$ ile bölünmesinde kalanlar eşit olup $2x-3$'tür. $P(x)$'in $x-1$ ve $x+1$ ile bölünmesinde kalanlar sırasıyla 5 ve -41 olduğuna göre, $P(x)$ polinomunu bulunuz.

28. 4. dereceden bir $P(x)$ polinomunun x^2+1 ve $(x+1)^2$ ile bölünmesinde kalanlar eşit olup $3x+2$'dir. $P(x)$'in $x-1$ ile bölünmesinde kalan 21 olduğuna göre, $P(x)$ polinomunu bulunuz.

29. $P(x)=x^4-4x^3+3x^2+2x+4$ polinomunun x^2+ax'in kuvvetlerine göre yazılabilmesi için a kaç olmalıdır?

$P(x)$'i x^2+ax'in kuvvetlerine göre yazınız.

30. $x^7+2x^6+ax^2+bx+1=(x^2-x+1)\cdot P(x)$ eşitliğini sağlayan bir $P(x)$ polinomu bulunduğuna göre; a ve b kat sayılarını bulunuz.

31. Aşağıda verilen her polinomun, yanında verilen polinom ile bölünebildiğini gösteriniz.

a. $(x^n-1)(x^{n+1}-1)$; $(x+1)(x-1)^2$
b. $x^{3m+2}+x^{3n+1}+x^{3p}$; x^2+x+1
c. $x^3-3abx+a^3+b^3$; $x+a+b$
d. $x^{6n+2}+x^{3n+1}+1$; x^2-x+1
e. $x^{4m+4}+x^{4n+3}+x^{4p+2}+x^{4q+1}$; $x^4+x^3+x^2+x$

32. Aşağıda verilen her polinomu, yanında verilen polinom ile bölünüz.

a. $x^n-nx+n-1$; $(x-1)^2$
b. $(n-1)x^n-nx^{n-1}+1$; $(x-1)^2$
c. $x^n-x^{n-2}-2x+2$; $(x-1)^2$
d. $nx^{n+2}-x^{n+1}-(n+1)x^n+x+1$; $(x+1)(x-1)^2$

33. $P(x)=x^2+mx+n$ polinomu $A(x)=x^3+ax^2-4x+3$ ve $B(x)=x^3+bx^2+x-2$ polinomlarının ikisini de bölmektedir.

Buna göre; a, b, m, n kat sayılarını bulunuz.

34. $P(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ polinomunun $(x-y)(y-z)(x-z)$ ile bölünebileceğini gösteriniz. Bölümü bulunuz.

35. $P(x,y,z)=(x+y+z)^4+x^4+y^4+z^4$
$-(x+y)^4-(y+z)^4-(x+z)^4$

polinomunun $xyz(x+y+z)$ ile bölünebileceğini gösteriniz. Bölümü bulunuz.

36. $(x^2+xy+y^2)^3=(x+y)^6-3xy(x+y)^4$
$+3x^2y^2(x+y)^2-x^3y^3$

olduğunu gösteriniz.