1.1 – Polinom Kavramı

Etkinlik – 1.1

a. $\sqrt{2}$'nin kendisi ile çarpımlarından, $n \in N$ olmak üzere, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^n$ sayıları elde edilir.

n çift $\Rightarrow$ n=2k ve $k \in N$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^{2k} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^k = 2^k \in Z;$$

n tek $\Rightarrow$ n=2k+1 ve $k \in N$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^{2k+1} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^k \cdot \sqrt{2} = 2^k \cdot \sqrt{2} \text{ olur.}$$

Öyleyse; tüm elemanlar arasındaki toplama ve çarpma işlemleri ile elde edilecek sonuçlar ya bir tam sayı, ya bir tam sayı ile $\sqrt{2}$'nin çarpımı, ya da bunların toplamı biçiminde olacaktır.

$a_1+b_1\sqrt{2}$ ve $a_2+b_2\sqrt{2}$ gibi böyle iki genel terimin toplamı

$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$$
$$=c_1+d_1\sqrt{2} \quad (c_1,d_1 \in Z)$$

ve çarpımı da

$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)$$
$$=a_1a_2+b_1\sqrt{2}\cdot b_2\sqrt{2}+a_1b_2\sqrt{2}+a_2b_1\sqrt{2}$$
$$=c_2+d_2\sqrt{2} \text{ olur. } (c_2,d_2 \in Z)$$

Bu sayıların tümü $a,b \in Z$ olmak üzere, $a+b\sqrt{2}$ biçiminde sayılardır. O halde; $Z \cup \{\sqrt{2}\}$ kümesinin elemanlarına Z'deki toplama ve çarpma işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebilecek tüm elemanların kümesi,

$$Z_{[\sqrt{2}]}=\left\{x \mid x=a+b\sqrt{2};\ a,b \in Z\right\} \text{ dir.}$$

b. Tam sayıların birbirleriyle tüm çarpımları;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0=1,\ \left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ldots,$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ olmak üzere, $\frac{1}{2}$ nin tüm kuvvetleri ve bu kuvvetlerin tam sayılarla çarpımları; bu çarpımlardan elde edilebilecek tüm toplamlar $Z_{\left[\frac{1}{2}\right]}$ kümesinin elemanları olacaktır.

O halde; $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n \in Z$ ve $n \in N$ olmak üzere;

$$Z_{\left[\frac{1}{2}\right]}=\left\{x \mid x=a_0+a_1\left(\frac{1}{2}\right)+a_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

olur.

c. $i^0=1$ olmak üzere, i'nin kendisi ile çarpımlarından i^n sayıları elde edilir.

$n=4k,\ k \in N \Rightarrow i^n=i^{4k}=\left[\left(i^2\right)^2\right]^k=\left[(-1)^2\right]^k=1^k=1;$

$n=4k+1,\ k \in N \Rightarrow i^n=i^{4k+1}=i^{4k}\cdot i=i;$

$n=4k+2,\ k \in N \Rightarrow i^n=i^{4k+2}=i^{4k}\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1;$

$n=4k+3,\ k \in N \Rightarrow i^n=i^{4k+3}=i^{4k}\cdot i^2\cdot i=1\cdot(-1)\cdot i=-i$

olur.

1, i, -1 ve $-i$ sayılarının birbirleriyle ve kümenin diğer gerçek sayı elemanlarıyla çarpımları ya "a" gibi bir gerçek sayı ya da, $b \in R$ olmak üzere, "$b\cdot i$" gibi bir sayı verecektir. Bu sayılar ve bunlardan elde edilecek tüm toplamlar $R_{[i]}$ nin elemanı olacaktır. Buna göre;

$$R_{[i]}=\left\{x \mid x=a+bi;\ a,b \in R;\ i^2=-1\right\} \text{ olur.}$$

Etkinlik – 1.2

Belirtilen işlem özeliklerinin Z ve R kümelerinde sağlandığını, dolayısıyla $(Z,+,\cdot)$ ve $(R,+,\cdot)$ sistemlerinin değişmeli, birim elemanlı birer halka olduğunu biliyorsunuz. $Z_{[\sqrt{2}]}$, $Z_{\left[\frac{1}{2}\right]}$, $R_{[i]}$ kümeleri, toplama ve çarpma işlemlerinin Z ve R'deki tüm özelikleri Z'ye ya da R'ye katılan yeni elemanlara da uygulanarak elde edilmiştir. Daha işin başında, işlemlerin özeliklerinin yeni elemanlar için de geçerli olduğu varsayılmıştır.

Örneğin; $Z_{[\sqrt{2}]}$ kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. (Etkinlik-1.1.a) Toplama işleminin etkisiz elemanı 0 $\left(0+0\cdot\sqrt{2}\right)$; çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 $\left(1+0\cdot\sqrt{2}\right)$ dir. Toplama işlemine göre $a+b\sqrt{2}$ elemanının tersi $-a-b\sqrt{2}$ dir. Çarpma işleminin birleşme özeliği ve toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır. Diğer kümelerde de aynı işlem özeliklerinin varlığı kolayca gösterilebilir.

Buna göre; $\left(Z_{[\sqrt{2}]},+,\cdot\right)$, $\left(Z_{\left[\frac{1}{2}\right]},+,\cdot\right)$ ve $\left(R_{[i]},+,\cdot\right)$ sistemleri değişmeli, birim elemanlı birer halkadır.

Etkinlik – 1.3

a. Polinom; üç terimli; 6. dereceden; baş kat sayısı 5; sabit terimi $\sqrt{3}$

b. Polinom değil. $\left(-3x^{\frac{1}{2}} \notin R_{[x]}\right)$

c. Sabit polinomdur. $a_0 = \left[1+\sqrt[3]{2}+3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]$ gerçek sayısı üç terimin toplamından oluşuyorsa da, polinomun sıfırıncı dereceden olan terimidir. $P(x) = \left[1+\sqrt[3]{2}+3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]$ polinomu tek terimlidir. Baş kat sayısı da sabit terimi de a_0'dır.

d. Polinom değil. $\left(4x^{-1} \notin R_{[x]}\right)$

e. Polinom; üç terimli; 3. dereceden; baş kat sayısı $\frac{3}{4}$; sabit terimi $-0,\overline{6}$

f. Polinom; üç terimli; 3. dereceden; baş kat sayısı 1; sabit terimi $\left(\sqrt[7]{3}\right)^6$

Etkinlik – 1.4

a. x'e göre derecesi 5 $(x^5$ teriminden); y'ye göre derecesi 5 $(-4y^5$ teriminden); x ve y'ye göre derecesi 5'tir. (Tüm terimler 5. dereceden)

b. x'e göre derecesi 4 $(2x^4y$ teriminden); y'ye göre derecesi 4 $(y^4$ teriminden); x ve y'ye göre derecesi 6'dır. $(-3x^3y^3$ teriminden)

c. x'e, y'ye, x ve y'ye göre dereceleri sıfırdır.

Etkinlik – 1.5

a. $64-2\sqrt{5}$ **b.** $10+24\sqrt{3}+\sqrt[3]{9}$ **c.** $25+10\sqrt{3}$

Etkinlik – 1.6

$A = R_{[1]} = R$ ve $B = R_{[\sqrt{2}]} = R$ olup $A = B = R$'dir.

Etkinlik – 1.7

$P(x)$ polinomunda x yerine $x \in R$ koyduğumuzda elde ettiğimiz gerçek sayıyı $p(x)$ ile gösteriyoruz.

Önce, $P(x) \equiv Q(x) \Rightarrow p(x) = q(x)$ olduğunu gösterelim:

$$P(x) \equiv Q(x)$$
$$\Rightarrow p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n \equiv q_0 + q_1x + \ldots + q_nx^n$$
$$\Rightarrow p_0 = q_0,\ p_1 = q_1,\ \ldots,\ p_n = q_n$$

$\Rightarrow \forall x \in R$ için;

$$\begin{array}{l} p_0 = q_0 \\ p_1x = q_1x \\ \ldots \\ +\ \ p_nx^n = q_nx^n \\ \hline p(x) = q(x) \end{array}$$

olur.

Şimdi; $\forall x \in R$ için, $p(x) = q(x) \Rightarrow P(x) \equiv Q(x)$ olduğunu göstereim:

$\forall x \in R$ için, $p(x) = q(x)$

$\Rightarrow p(0) = q(0) \quad \Rightarrow \quad p_0 = q_0$

$\Rightarrow p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n = q_1x + q_2x^2 + \ldots + q_nx^n$

$\Rightarrow x\left(p_1 + p_2x + \ldots + p_nx^{n-1}\right) = x\left(q_1 + \ldots + q_nx^{n-1}\right)$

$\Rightarrow p_1 + p_2x + \ldots + p_nx^{n-1} = q_1 + q_2x + \ldots + q_nx^{n-1}$

Eşitliğin sol yanına $p_1(x)$, sağ yanına $q_1(x)$ diyelim.

$p_1(x) = q_1(x)$

$\Rightarrow p_1(0) = q_1(0) \quad \Rightarrow \quad p_1 = q_1$ olur.

Böyle devam edilerek, $p_2 = q_2,\ \ldots,\ p_n = q_n$ bulunur.

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının eşit dereceli terimlerinin kat sayıları eşit olarak bulunduğundan $P(x) \equiv Q(x)$ olur.

Etkinlik – 1.8

a. $2x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

b. $-x^3 - 6x^2 + 4x$

c. $2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 4$

d. $2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 3$

Etkinlik – 1.9

a. $-2x^4 + 3x^2 - 4x - 8$

b. $-x^3 + 7x^2 - 6x - 6$

c. $-2x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x - 8$

d. $-2x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5x - 8$

Etkinlik – 1.10

a. $3x^3 - 17x^2 - 8x + 12$

b. $-20x^2 - 26x + 2$

c. $3x^5 - 13x^4 - 25x^3 - 30x^2 - 3x + 18$

d. $-6x^4 + 6x^3 - 13x^2 - 7x - 2$

Etkinlik – 1.11

$A(x)=0$ veya $B(x)=0 \Rightarrow A(x)\cdot B(x)=0$ olduğunu gösterelim:

$A(x)=0$ olsun. Bu durumda $A(x)$'in kat sayıları $a_0=0$, $a_1=0$, ..., $a_n=0$ olacak ve bu kat sayılar çarpımın bütün terimlerinde çarpan olarak bulunacaktır. Bu çarpanlar çarpımdaki bütün kat sayıları sıfır yapacağından $A(x)\cdot B(x)=0$ olur.

Şimdi, $A(x)\cdot B(x)=0 \Rightarrow A(x)=0$ veya $B(x)=0$ olduğunu gösterelim: Bu durumda, $A(x)\neq 0$ iken $B(x)=0$ olduğunu göstermeliyiz.

$A(x)$'teki bütün kat sayıların sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Çarpımın sabit terimi $a_0\cdot b_0=0$ ve $a_0\neq 0$ olduğundan $b_0=0$ olur. Çarpımın 1. dereceden teriminin kat sayısı $a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0=0$ ve $a_0\neq 0$, $a_1\neq 0$, $b_0=0$ olduğundan $b_1=0$ olur. Böyle devam edildiğinde $B(x)$'in bütün kat sayılarının sıfır olduğu görülecektir.

Öyleyse; $B(x)=0$'dır.

Etkinlik – 1.13

a. $9x^2-16y^2$ **b.** $4x^4-y^6$

c. $x^4y^4-9x^2y^2z^2$ **d.** $x^4y^2+4x^2y+4$

e. $9x^2-24xy^2+16y^4$ **f.** $x^4-8x^2y^2+16y^4$

g. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$

h. $x^3-12x^2y^2+6xy^4-y^6$

i. $x^6+6x^5y+12x^4y^2+8x^3y^3$

j. x^3-8y^6 **k.** x^6+y^6

l. $9x^2+4y^2-12xy+6x-4y+1$

m. $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2$

n. $x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt$

o. x^4-16 **p.** x^5-32 **r.** $x^{12}-64$

Etkinlik – 1.14

a. $\binom{4}{0}(2x)^4+\binom{4}{1}(2x)^3y+\binom{4}{2}(2x)^2y^2+\binom{4}{3}2xy^3+\binom{4}{4}y^4$

$=16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$

b. $x^8-8x^6y^3+24x^4y^6-32x^2y^9+16y^{12}$

c. $x^5y^5-5x^4y^4+10x^3y^3-10x^2y^2+5xy-1$

d. $x^{10}y^5+10x^8y^4+40x^6y^3+80x^4y^2+80x^2y+32$

e. $x^{10}+5x^8y^2+10x^6y^4+10x^4y^6+5x^2y^8+y^{10}$

f. $x^6y^{12}-12x^5y^{10}z+60x^4y^8z^2-160x^3y^6z^3+240x^2y^4z^4-192xy^2z^5+64z^6$

Etkinlik – 1.15

a. $\binom{6}{2}(2x)^4y^2=240x^4y^2$

b. $\binom{4}{2}(x^2)^2(-3y^3)^2=54x^4y^6$

c. $\binom{5}{3}(x^2y)^2(-2)^3=-80x^4y^2$

Etkinlik – 1.16

1. $A(x)=1\cdot A(x) \Rightarrow \dfrac{A(x)}{1}=A(x)$

2. $A(x)=1\cdot A(x) \Rightarrow \dfrac{A(x)}{A(x)}=1$

3. $0\cdot A(x)=0 \Rightarrow \dfrac{0}{A(x)}=0 \qquad [A(x)\neq 0]$

4. Bölme tanımından,

$A(x)=B(x)\cdot C(x)\Rightarrow C(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ yazılır. (1)

$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, $B(x)=b$ ise $\text{der}[C(x)]=n$ olacaktır. $C(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$ olsun.

$$A(x)=B(x)\cdot C(x)$$
$$\Rightarrow a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=b\cdot\left(c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n\right)$$
$$\Rightarrow a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=bc_0+bc_1x+\ldots+bc_nx^n$$
$$\Rightarrow a_0=bc_0,\ a_1=bc_1,\ \ldots,\ a_n=bc_n$$
$$\Rightarrow c_0=\frac{a_0}{b},\ c_1=\frac{a_1}{b},\ \ldots,\ c_n=\frac{a_n}{b}$$
$$\Rightarrow C(x)=\frac{a_0}{b}+\frac{a_1}{b}x+\ldots+\frac{a_n}{b}x^n \text{ olur.} \qquad (2)$$

(1) ve (2)'den

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A(x)}{b}=\frac{a_0}{b}+\frac{a_1}{b}x+\frac{a_2}{b}x^2+\ldots+\frac{a_n}{b}x^n$$

bulunur.

5. $A(x)=B(x)\cdot C(x) \Rightarrow C(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ (1)

$A(x)=a\cdot x^m$ ve $B(x)=b\cdot x^n$ ise $C(x)$ de tek terimli olmak zorundadır. (Neden?) $C(x)=cx^p$ olsun.

$$A(x)=B(x)\cdot C(x) \Rightarrow ax^m=b\cdot x^n\cdot c\cdot x^p$$
$$\Rightarrow ax^m=b\cdot c\cdot x^{n+p}$$
$$\Rightarrow a=b\cdot c \text{ ve } m=n+p$$
$$\Rightarrow c=\frac{a}{b} \text{ ve } p=m-n$$
$$\Rightarrow C(x)=\frac{a}{b}x^{m-n} \text{ olur. (2)}$$

(1) ve (2)'den, $\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{a\cdot x^m}{b\cdot x^n}=\dfrac{a}{b}\cdot x^{m-n}$ bulunur.

6. $A(x)=B(x)\cdot C(x) \Rightarrow C(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ (1)

$A(x)=a_m\cdot x^m+a_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ldots+a_k\cdot x^k$ ve $B(x)=b\cdot x^n$ ise $\text{der}[C(x)]=m-n$ dir.

$$A(x)=B(x)\cdot C(x)$$
$$\Rightarrow a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_kx^k$$
$$=b\cdot x^n\left(c_{m-n}x^{m-n}+c_{m-n-1}x^{m-n-1}+\ldots+c_{k-n}x^{k-n}\right)$$
$$\Rightarrow a_m=bc_{m-n},\ \ a_{m-1}=bc_{m-n-1},\ \ldots,\ a_k=bc_{k-n}$$
$$\Rightarrow c_{m-n}=\frac{a_m}{b},\ \ c_{m-n-1}=\frac{a_{m-1}}{b},\ \ \ldots,\ c_{k-n}=\frac{a_k}{b}$$
$$\Rightarrow C(x)=\frac{a_m}{b}x^{m-n}+\frac{a_{m-1}}{b}x^{m-n-1}+\ldots+\frac{a_k}{b}x^{k-n} \text{ olur.} \quad (2)$$

(1) ve (2)'den

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A(x)}{b\cdot x^n}=\frac{a_m}{b}x^{m-n}+\frac{a_{m-1}}{b}x^{m-n-1}+\ldots+\frac{a_k}{b}x^{k-n} \text{ bulunur.}$$

Etkinlik – 1.17

$A(x)=x^2+a^2$ nin $B(x)=bx+c$ gibi bir böleninin bulunduğunu varsayalım. $A(x)$'in $B(x)$'e bölümü 1. dereceden $C(x)=dx+e$ gibi bir polinom olacaktır.

$$A(x)=B(x)\cdot C(x)$$
$$\Rightarrow x^2+a^2=(bx+c)(dx+e)$$
$$\Rightarrow x^2+a^2=bdx^2+(be+cd)x+ce$$
$$\Rightarrow bd=1, \quad (1)$$
$$be+cd=0, \quad (2)$$
$$ce=a^2 \text{ olur.} \quad (3)$$

(1)'den $d=\dfrac{1}{b}$ ve (3)'ten $e=\dfrac{a^2}{c}$ değerleri (2)'de yerlerine konulursa,

$$b\cdot\frac{a^2}{c}+c\cdot\frac{1}{b}=0 \Rightarrow \frac{ba^2}{c}=-\frac{c}{b}$$
$$\Rightarrow a^2b^2=-c^2 \text{ bulunur.} \quad (4)$$

$a\neq 0$ ve $b\neq 0$ iken (4) eşitliği sağlanamaz.

Etkinlik – 1.19

Bölüm $B(x)$; kalan $K(x)$ olsun.

a. $B(x)=3;$ $K(x)=-10$

b. $B(x)=0;$ $K(x)=2x^2-3x-5$

c. $B(x)=2;$ $K(x)=-x-2$

d. $B(x)=x^2+3x+6;$ $K(x)=14$

e. $B(x)=2x^2-3x-2;$ $K(x)=5$

f. $B(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{11}{4};$ $K(x)=\dfrac{71}{4}$

g. $B(x)=x^2+3x+2;$ $K(x)=10x+1$

h. $B(x)=x^2-4x;$ $K(x)=2x^2-8x-3$

i. $B(x)=x^4-2x^2-7;$ $K(x)=-12$

j. $B(x)=x^3-5;$ $K(x)=-9x^3+4$

k. $B(x)=x^2-\sqrt{2}x;$ $K(x)=2\sqrt{2}x-3$

l. $B(x)=x^2y^2-y;$ $K(x)=y^3$ veya
$B(y)=x^2y^2;$ $K(x)=-2xy$

Etkinlik – 1.20

a. 2 **b.** 6 **c.** 8

Etkinlik – 1.21

a. 8 **b.** $-5\sqrt{2}-5$ **c.** $63\sqrt{2}-37$ **d.** $-\dfrac{107}{8}$

e. $\dfrac{83}{27}$ **f.** $-8a^3-8a^2-6a-1$

Etkinlik – 1.22

$P(x)=(x-2)(x+1)\cdot B(x)+ax+b$ olsun.

$P(2)=18 \Rightarrow 2a+b=18;$ (1)
$P(-1)=0 \Rightarrow -a+b=0$ olur. (2)

(1) ve (2)'den $a=6$, $b=6$ bulunur.

$K(x)=6x+6$'dır.

Etkinlik – 1.23

a, b, c ikişer ikişer farklı olmak üzere, $P(x)$ polinomu $(x-a)(x-b)(x-c)$ ile bölünüyorsa; $x-a$, $x-b$, $x-c$ ile ayrı ayrı bölünebileceği açıktır.

$P(x)$ polinomu $x-a$, $x-b$, $x-c$ ile ayrı ayrı bölünüyorsa; bunun $(x-a)(x-b)(x-c)$ ile de bölünebileceğini gösterelim:

$P(x)$, $x-a$ ile bölündüğünden
$P(x)=(x-a)\cdot B_1(x)$ yazılabilir. (1)

$P(x)$, $x-b$ ile bölündüğünden
$P(b)=(b-a)\cdot B_1(b)=0 \Rightarrow B_1(b)=0$ olup $B_1(x)$, $x-b$ ile bölünür. $B_1(x)=(x-b)\cdot B_2(x)$ yazılır ve (1)'de yerine konulursa,

$P(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot B_2(x)$ elde edilir. (2)

$P(x)$, $x-c$ ile bölündüğünden
$P(c)=(c-a)\cdot(c-b)\cdot B_2(c)=0 \Rightarrow B_2(c)=0$ olup $B_2(x)$, $x-c$ ile bölünür. $B_2(x)=(x-c)\cdot B(x)$ yazılır ve (2)'de yerine konulursa,

$P(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot B(x)$ elde edilir.

Bu son eşitlik, $P(x)$'in $(x-a)(x-b)(x-c)$ ile bölünebildiğini gösterir.

Etkinlik – 1.24

$P(x)=a\cdot(x-1)(x-2)(x-3)+4$ eşitliğinden,
$P(-1)=28 \Rightarrow 8a+4=28 \Rightarrow a=3$ bulunur.
$P(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)+4 \Rightarrow P(2)=-8$ olur.

Etkinlik – 1.25

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)\cdot B(x) + x^3+2x^2-x-1$$

a. $P(1)=1+2-1-1=1$

b. $P(x)$'in $(x-1)(x-2)$ ile bölünmesinde kalan $ax+b$ gibi 1. dereceden bir polinom olacaktır.

$P(x)=(x-1)(x-2)\cdot B_1(x)+ax+b$ yazılır.

$P(1)=1=a+b;$ (1)
$P(2)=8+8-2-1=2a+b$ (2)

(1) ve (2)'den $a=12$, $b=-11$ bulunur.

$K(x)=12x-11$ olur.

c. Kalan en çok 2. dereceden olacaktır.
$P(x)=(x-1)(x-2)(x+2)\cdot B_2(x)+ax^2+bx+c$
bölme özdeşliğinden,

$P(1)=1=a+b+c;$ (1)
$P(2)=13=4a+2b+c;$ (2)
$P(-2)=1=4a-2b+c$ yazılır. (3)

(2)'den (3) çıkarılırsa, $b=3$ bulunur. $b=3$ değeri (1) ve (3)'te yerine konulursa,

$$\left.\begin{matrix} a+c=-2 \\ 4a+c=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=3 \\ c=-5 \end{matrix}\right\} \text{ bulunur.}$$

$K(x)=3x^2+3x-5$ olur.

Etkinlik – 1.26

a. $x-4$ **b.** $6x^2-6x-1$ **c.** -1 **d.** $-x^2+4x-1$

e. x^2 yerine $x-1$ konularak kalan bulunabilir.
Biz, polinomların bir modüle göre denkliğinden yararlanacağız:

$x^2-x+1 \equiv 0 \pmod{x^2-x+1}$
$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1) \equiv (x+1)\cdot 0 \pmod{x^2-x+1}$
$\Rightarrow x^3+1 \equiv 0 \pmod{x^2-x+1}$ olur.

x^3 yerine -1 koyalım:
$K_1(x)=-x^2-2x(-1)+3x^2-1$
$\Rightarrow K_1(x)=2x^2+2x-1$ bulunur.

$K_1(x)$'te x^2 yerine $x-1$ konulursa,

$K(x)=2(x-1)+2x-1 \Rightarrow K(x)=4x-3$ olur.

f. $7x^2-3x-3$

Etkinlik – 1.27

x yerine -2 konulursa,
$P(-2)=-32+16a-8b-2c-1=-11;$ (1)
x^2 yerine -2 konulursa,
$K(x)=4x+4a-2bx+6+cx-1=9x+13$ (2)
olur.

(1) ve (2)'den,

$$\left.\begin{aligned}16a-8b-2c&=22\\-2b+c+4&=9\\4a+5&=13\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}a&=2\\b&=0\\c&=5\end{aligned}\right\}\text{ bulunur.}$$

Etkinlik – 1.28

$P(x)$'in $(2x+1)(x^2+1)$ ile bölünmesinde kalan en çok 2. dereceden olur.

$P(x)=(2x+1)(x^2+1)\cdot B(x)+ax^2+bx+c$ yazılır.

$P(x)$'te x yerine $-\frac{1}{2}$ konulursa,

$P\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c=1;\qquad(1)$

x^2 yerine -1 konulursa,
$K_1(x)=-a+bx+c=-2x-3$ olur. (2)

(1) ve (2)'den,

$$\left.\begin{aligned}a-2b+4c&=4\\b&=-2\\-a+c&=-3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}a&=3\\b&=-2\\c&=0\end{aligned}\right\}\text{ bulunur.}$$

$K(x)=3x^2-2x$ olur.

Etkinlik – 1.29

$P(x)$'in $Q(x)$ ile bölünmesinde bölüm $B(x)$, kalan $K(x)$ olsun.

$P(x)=Q(x)\cdot B(x)+K(x)$ özdeşliğinde iki taraf $A(x)$ ile çarpılırsa,

$$A(x)\cdot P(x)=\underbrace{Q(x)\cdot A(x)}_{\text{Bölen}}\cdot\underbrace{B(x)}_{\text{Bölüm}}+\underbrace{A(x)\cdot K(x)}_{\text{Kalan}}\qquad(1)$$

elde edilir.

$\operatorname{der}[K(x)]<\operatorname{der}[Q(x)]$

$\Rightarrow\operatorname{der}[A(x)\cdot K(x)]<\operatorname{der}[A(x)\cdot Q(x)]$

olacağından (1) eşitliği bir bölme özdeşliğidir. O halde; $A(x)\cdot P(x)$'in $A(x)\cdot Q(x)$ ile bölünmesinde bölüm $B(x)$, kalan $A(x)\cdot K(x)$ olur.

Etkinlik – 1.30

$A(x)$ polinomu $B(x)\cdot C(x)$ polinomunu böldüğünden,
$B(x)\cdot C(x)\equiv0\pmod{A(x)}$ yazılır. (1)

$B(x)\not\equiv0\pmod{A(x)}$ olduğundan (1) denkliğinin iki yanı $B(x)$ ile bölündüğünde denklik bozulmayacaktır.

$[B(x)\cdot C(x)]:B(x)\equiv0:B(x)\pmod{A(x)}$

$\Rightarrow C(x)\equiv0\pmod{A(x)}$ bulunur.

özdeşliğinde iki taraf $A(x)$ ile çarpılırsa,

$$A(x)\cdot P(x)=\underbrace{Q(x)\cdot A(x)}_{\text{Bölen}}\cdot\underbrace{B(x)}_{\text{Bölüm}}+\underbrace{A(x)\cdot K(x)}_{\text{Kalan}}\qquad(1)$$

elde edilir.

$\operatorname{der}[K(x)]<\operatorname{der}[Q(x)]$

$\Rightarrow\operatorname{der}[A(x)\cdot K(x)]<\operatorname{der}[A(x)\cdot Q(x)]$

olacağından (1) eşitliği bir bölme özdeşliğidir. O halde; $A(x)\cdot P(x)$'in $A(x)\cdot Q(x)$ ile bölünmesinde bölüm $B(x)$, kalan $A(x)\cdot K(x)$ olur.

Etkinlik – 1.31

$P(x)$ polinomunun $A(x)\cdot B(x)$ ile bölünmesinde bölüm $Q_1(x)$, kalan $K(x)$ olsun.

$P(x)=A(x)\cdot B(x)\cdot Q_1(x)+K(x)$

$\Rightarrow P(x)-K(x)=A(x)\cdot B(x)\cdot Q_1(x)$ yazılır. (1)

$P(x)-K(x)$ polinomu $C(x)$ ile bölünebileceğinden $Q_1(x)$ polinomu $C(x)$ ile bölünmelidir.

$Q_1(x)=C(x)\cdot Q_2(x)$ yazılır ve (1)'de yerine konulursa,

$P(x)-K(x)=A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\cdot Q_2(x)$

$\Rightarrow P(x)=A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\cdot Q_2(x)+K(x)$ olur. (2)

$\operatorname{der}[K(x)]<\operatorname{der}[A(x)\cdot B(x)]$

$\Rightarrow\operatorname{der}[K(x)]<\operatorname{der}[A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)]$

olacağından (2) eşitliği bir bölme özdeşliğidir.

O halde; $P(x)$ polinomunun $A(x)\cdot B(x)$ ve $B(x)\cdot C(x)$ ile bölünmesinde kalanlar eşit ve $K(x)$ ise , $P(x)$'in $A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)$ ile bölünmesinde de kalan $K(x)$ olur.

Etkinlik – 1.32

Bölüm $B(x)$; kalan $K(x)$ olsun.

a. $B(x)=x^4+3x^3+7x^2+22x+66;\quad K(x)=197$

b. $B(x)=x^4-x^3-x^2+2x-2;\quad K(x)=1$

c. $B(x)=x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{15}{8}x-\frac{15}{16}$; $K(x)=\frac{17}{32}$

d. $B(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{8}x^2+\frac{15}{16}x-\frac{15}{32}$;

$K(x)=\frac{17}{32}$

e. $B(x)=\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{9}x^3-\frac{14}{27}x^2-\frac{1}{81}x-\frac{2}{243}$;

$K(x)=-\frac{247}{243}$

f. $B(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3-\frac{7}{16}x^2+\frac{1}{32}x+\frac{1}{64}$;

$K(x)=-\frac{31}{32}$

Etkinlik – 1.33

Bölüm $B(x)$; kalan $K(x)$ olsun.

a. $B(x)=x^2+4$; $K(x)=8(x+1)+1=8x+9$

b. $B(x)=x^2+1$; $K(x)=2x-3$

c. $B(x)=x^2-7x+9$; $K(x)=-108x-183$

d.

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\
 & & 2 & 0 & 2 & 4 \\ \hline
2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \mid 1 \\
 & & 2 & 4 & 10 & \\ \hline
2 & 1 & 2 & 5 & \mid 12 &
\end{array}$$

$B(x)=x^2+2x+5$;

$K(x)=12(x-2)+1 \Rightarrow K(x)=12x-23$

Etkinlik – 1.34

$(x-a)(x-b)$ ile bölmede açıkladığımız gibi yapınız.

Etkinlik – 1.35

Bölüm $B(x)$; kalan $K(x)$ olsun.

a. $B(x)=x^3+3x^2+9x+27$;

$K(x)=82(x+1)(x-1)-4(x-1)-2$

$\Rightarrow K(x)=82x^2-4x-80$

b. $B(x)=x^3+3x$; $K(x)=13x^2-4x+1$

c. $B(x)=x^3-5x^2+17x-53$;

$K(x)=162x^2-316x+160$

d.

$$\begin{array}{r|rrrrrrl}
 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 & & 2 & 4 & 6 & 12 & 26 & 44 \\ \hline
2 & 1 & 2 & 3 & 6 & 13 & 22 & \mid 45 \\
 & & 2 & 8 & 22 & 56 & 138 & \\ \hline
2 & 1 & 4 & 11 & 28 & 69 & \mid 160 & \\
 & & 2 & 12 & 46 & 148 & & \\ \hline
2 & 1 & 6 & 23 & 74 & \mid 217 & & \\
 & & 2 & 16 & 78 & & & \\ \hline
2 & 1 & 8 & 39 & \mid 152 & & &
\end{array}$$

$B(x)=x^2+8x+39$;

$$K(x)=1529(x-2)^3+217(x-2)^2+160(x-2)+45$$

Etkinlik – 1.36

a.

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=(x-a)\cdot B_1(x)+k_1 \\ B_1(x)=\left(x-\frac{c}{b}\right)\cdot B_2(x)+k_2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow P(x)=(x-a)\left(x-\frac{c}{b}\right)B_2(x)+k_2(x-a)+k_1$

$\Rightarrow P(x)=(x-a)\left(\frac{bx-c}{b}\right)B_2(x)+k_2(x-a)+k_1$

$\Rightarrow P(x)=(x-a)(bx-c)[B_2(x):b]+k_2(x-a)+k_1$

Bölüm, $B(x)=B_2(x):b$;

Kalan, $K(x)=k_2(x-a)+k_1$ olur.

b. .

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=\left(x-\frac{b}{a}\right)\cdot B_1(x)+k_1 \\ B_1(x)=\left(x-\frac{d}{c}\right)\cdot B_2(x)+k_2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow P(x)=\left(x-\frac{b}{a}\right)\left(x-\frac{d}{c}\right)\cdot B_2(x)+k_2\left(x-\frac{b}{a}\right)+k_1$

$\Rightarrow P(x)=\frac{ax-b}{a}\cdot\frac{cx-d}{c}\cdot B_2(x)+k_2\left(x-\frac{b}{a}\right)+k_1$

$\Rightarrow P(x)=(ax-b)(cx-d)\cdot[B_2(x):(a\cdot c)]+k_2\left(x-\frac{b}{a}\right)+k_1$

$B(x)=B_2(x):(a\cdot c)$;

$K(x)=k_2\left(x-\frac{b}{a}\right)+k_1$

Etkinlik – 1.37

Bölüm $B(x)$; kalan $K(x)$ olsun.

a. $B(x) = x+1;$ $K(x) = 3x-2$

b. $B(x) = 2x-3;$ $K(x) = 2x-3$

c. $B(x) = 2x+1;$ $K(x) = 3$

d. $B(x) = x^2-1;$ $K(x) = x^2-2x-1$

Etkinlik – 1.38

$P(x)$ polinomu $(x-a)^n$ ile bölünüyorsa, $P(x)$ ve bunun $x-a$ ile $n-1$ kere art arda bölünmesiyle elde edilecek bölümlerin $x-a$ ile bölüneceği açıktır.

Bunun karşıtını ispatlayalım:

$P(x)$, $x-a$ ile bölünüyorsa ,
$P(x) = (x-a)\cdot P_1(x)$ yazılır. (1)

$P_1(x)$, $x-a$ ile bölünüyorsa ,
$P_1(x) = (x-a)\cdot P_2(x)$ yazılır. (2)
(1) ve (2)'den,
$P(x) = (x-a)^2\cdot P_2(x)$ elde edilir. (3)

$P_2(x)$, $x-a$ ile bölünüyorsa ,
$P_2(x) = (x-a)\cdot P_3(x)$ yazılır. (4)
(3) ve (4)'ten,
$P(x) = (x-a)^3\cdot P_3(x)$ elde edilir. (3)
Böyle devam edilerek,
$P(x) = (x-a)^n\cdot P_n(x)$ bulunur.

Etkinlik – 1.39

$P(x)$'i $x+1$'in kuvvetlerine göre açalım:

$$P(x) = (x+1)^4 - 3(x+1)^3 + (x+1)^2 - (x+1) + 3$$

$$\Rightarrow P\left(2\sqrt[3]{2}-1\right) = \left(2\cdot\sqrt[3]{2}\right)^4 - 3\left(2\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3 + \left(2\cdot\sqrt[3]{2}\right)^2 - 2\cdot\sqrt[3]{2} + 3$$

$$\Rightarrow P\left(2\sqrt[3]{2}-1\right) = 30\cdot\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4} - 45 \text{ bulunur.}$$

Etkinlik – 1.40

İspatı $R_{[x,y]}$ kümesinde yapalım:

m. dereceden homojen bir $P(x,y)$ polinomu, n. dereceden homojen bir $Q(x,y)$ polinomuna bölünüyorsa; bölümün $(m-n)$. dereceden homojen bir $B(x,y)$ polinomu olacağı açıktır.

($Q(x,y)$'nin her teriminin $B(x,y)$'nin her terimi ile çarpımı, m. dereceden bir terim verecektir.)

$P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ simetrik iken, $B(x,y)$'nin de simetrik olacağını gösterelim:

$$P(x,y) = Q(x,y)\cdot B(x,y)$$
$$\Rightarrow P(y,x) = Q(y,x)\cdot B(y,x) \text{ olur.}$$

$P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ simetrik olduğundan,

$$P(x,y) = P(y,x)$$
$$\Rightarrow Q(x,y)\cdot B(x,y) = Q(y,x)\cdot B(y,x)$$
$$\Rightarrow B(x,y) = B(y,x) \text{ bulunur.}$$

Bu da bölümün simetrik olduğunu gösterir.

Etkinlik – 1.41

a. Örnek-1.35'teki gibi yapınız. Bölüm 1'dir.

b. $P(x,y,z)$'nin $(x-y)(y-z)(x-z)$ ile bölünebileceği Örnek-1.35'teki gibi gösterilir. Bölünen 5. dereceden, bölen 3. dereceden homojen ve simetrik olduğundan, bölüm 2. dereceden homojen ve simetrik olacaktır. Öyleyse; bölme özdeşliği,

$$xy^4 - yx^4 + yz^4 - zy^4 + zx^4 - xz^4$$
$$= (x-y)(y-z)(x-z)\cdot\left[k_1\cdot(x^2+y^2+z^2) + k_2\cdot(xy+yz+xz)\right]$$

olarak yazılır.

$(x,y,z) = (1,-1,0)$ için $2k_1 - k_2 = -1;$ (1)

$(x,y,z) = (1,0,2)$ için $5k_1 + 2k_2 = -7;$ (2)

olur. (1) ve (2)'den $k_1 = k_2 = -1$ bulunur.

Bölüm , $-x^2 - y^2 - z^2 - xy - yz - xz$ olur.

Bölendeki $x-z$ çarpanı $z-x$ olarak değiştirilirse bölüm de, $x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$ biçiminde yazılabilir.