

Örnek Problem-1

İkinci dereceden P polinom fonksiyonunun baş kat sayısı 1'dir.

$y = P(x)$ eğrisi, $y = x^2 \cdot (x-2)^2$ eğrisine iki farklı noktada teğet olduğuna göre; değme noktalarını bulunuz.

Çözüm

$y = P(x) = x^2 + ax + b$ olsun.

$$x^2 \cdot (x-2)^2 = x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (x-2)^2 - x^2 - ax - b = 0$$

Bu denklemin iki tane iki kat kökü olmalıdır.

Bu kökler m ve n olsun.

Değme noktaları $(m, P(m))$ ve $(n, P(n))$ olur.

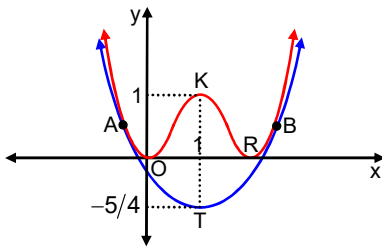
$$x^2 \cdot (x-2)^2 - x^2 - ax - b = (x-m)^2 \cdot (x-n)^2$$

Çarpma işlemleri yapıp eşit dereceli x'lerin kat sayıları eşitlenirse,

$$\left. \begin{array}{l} -2m - 2n = -4 \quad (1) \\ m^2 + n^2 + 4mn = 3 \quad (2) \\ -2mn^2 - 2m^2n = -a \quad (3) \\ m^2n^2 = -b \quad (4) \end{array} \right\} \text{ sistemi elde edilir.}$$

$$m < n \text{ sayılırsa; } m = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad n = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$a = -2, \quad b = -\frac{1}{4}, \quad P(m) = P(n) = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$



Parabolün denklemi, $y = x^2 - 2x - 1/4$;

eğrilerin birbirlerine değme noktaları,

$$A\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ ve } B\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{4}\right);$$

eğrilerin ekstremum noktaları,

$$O(0, 0), \quad R(2, 0), \quad K(1, 1), \quad T(1, -5/4) \text{ olur.}$$

Örnek Problem-2

İkinci dereceden P polinom fonksiyonunun baş kat sayısı 1'dir.

$y = P(x)$ eğrisi $y = x^2 \cdot (x-2)^2$ eğrisine bir noktada teğettir.

Eğrilerin, başka ortak noktaları olmadığına göre; değme noktalarının kümesini bulunuz.

Çözüm

$y = P(x) = x^2 + ax + b$ olsun.

$$x^2 \cdot (x-2)^2 = x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (x-2)^2 - x^2 - ax - b = 0$$

Bu denklemin, eşit iki kökünün dışında gerçel kökü olmamalıdır. Eşit kökler m olsun.

$$x^2 \cdot (x-2)^2 - x^2 - ax - b = (x-m)^2 \cdot (x^2 + px + r)$$

Çarpma işlemleri yapıp eşit dereceli x'lerin kat sayıları eşitlenirse,

$$\left. \begin{array}{l} p - 2m = -4 \quad (1) \\ m^2 + r - 2mp = 3 \quad (2) \\ m^2p - 2mr = -a \quad (3) \\ m^2r = -b \quad (4) \end{array} \right\} \text{ sistemi elde edilir.}$$

$x^2 + px + r = 0$ denkleminin gerçel kökü

olmamalıdır. $\Delta = p^2 - 4r < 0$ olmalıdır. (5)

(1), (2) ve (5)'ten; $2m^2 - 4m - 1 > 0$ bulunur.

Değme noktalarının apsisi

$$m \in \left[-\infty, 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \infty\right)$$

koşulunu sağlamalıdır.

Değme

noktalarının

geometrik yeri;

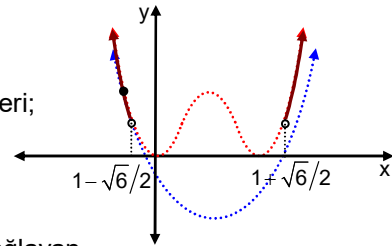
verilen

eğrinin,

değme

koşulunu sağlayan

noktalarının kümesidir.



Örnek Problem-3

İkinci dereceden P polinom fonksiyonunun baş kat sayısı 1'dir.

$y = P(x)$ eğrisi $y = x^2 \cdot (x-2)^2$ eğrisine (1,1) noktasında teğet olduğuna göre; $P(0)$ kaçtır?

Çözüm

$y = P(x) = x^2 + ax + b$ olsun.

$$x^2 \cdot (x-2)^2 = x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (x-2)^2 - x^2 - ax - b = 0$$

Bu denklemin, eşit iki kökü 1'dir

$$x^2 \cdot (x-2)^2 - x^2 - ax - b$$

$$= (x-1)^2 \cdot (x^2 + px + r)$$

Çarpma işlemleri yapıp eşit dereceli x'lerin kat sayıları eşitlenirse,

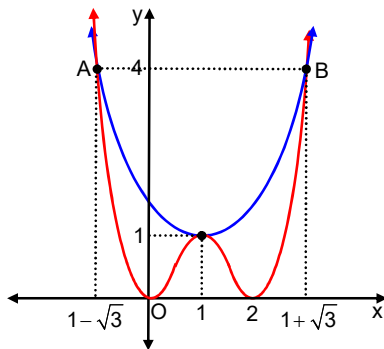
$$\left. \begin{array}{l} p-2 = -4 \quad (1) \\ r+1-2p = 3 \quad (2) \\ p-2r = -a \quad (3) \\ r = -b \quad (4) \end{array} \right\} \text{ sistemi elde edilir.}$$

$p = r = a = -2$ ve $b = 2$ bulunur.

$y = P(x) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow P(0) = 2$ olur.

★ Eğrilerin diğer kesim noktalarını bulunuz.

★ $y = x^2 \cdot (x-2)^2$ eğrisinin $x = 1$ doğrusuna göre simetrik olduğu görülürse, (1,1) noktasında teğet olan parabolün denkleminin $P(x) = (x-1)^2 + 1$ olacağı da görülebilir.

**Örnek Problem-4**

İkinci dereceden P polinom fonksiyonunun baş kat sayısı -1 'dir.

$y = P(x)$ eğrisi, $y = x^2 \cdot (x-2)^2$ eğrisine iki farklı noktada teğet olduğuna göre; değme noktalarını bulunuz.

Çözüm

$y = P(x) = -x^2 + ax + b$ olsun.

$$x^2 \cdot (x-2)^2 = -x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (x-2)^2 + x^2 - ax - b = 0$$

Bu denklemin iki tane iki kat kökü olmalıdır.

Bu kökler m ve n olsun.

Değme noktaları $(m, P(m))$ ve $(n, P(n))$ olur.

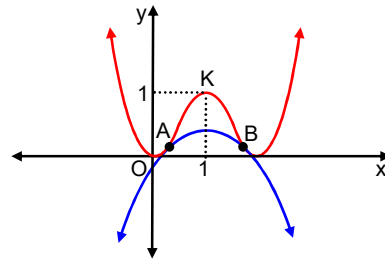
$$x^2 \cdot (x-2)^2 + x^2 - ax - b = (x-m)^2 \cdot (x-n)^2$$

Çarpma işlemleri yapıp eşit dereceli x'lerin kat sayıları eşitlenirse,

$$\left. \begin{array}{l} -2m - 2n = -4 \quad (1) \\ m^2 + n^2 + 4mn = 5 \quad (2) \\ -2mn^2 - 2m^2n = -a \quad (3) \\ m^2n^2 = -b \quad (4) \end{array} \right\} \text{ sistemi elde edilir.}$$

$m < n$ sayılırsa; $m = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$a = 2$, $b = -\frac{1}{4}$, $P(m) = P(n) = \frac{1}{4}$ bulunur.



Parabolün denklemini, $y = -x^2 + 2x - 1/4$;

eğrilerin birbirlerine değme noktaları,

$A(1 - \sqrt{2}/2, 1/4)$ ve $B(1 + \sqrt{2}/2, 1/4)$;

-2-

Örnek Problem-5

İkinci dereceden P polinom fonksiyonunun baş kat sayısı -1 'dir.

$y = P(x)$ eğrisi $y = x^2 \cdot (x-2)^2$ eğrisine bir noktada teğettir.

Eğrilerin, başka ortak noktaları olmadığına göre; değme noktalarının kümesini bulunuz.

Çözüm

$$y = P(x) = -x^2 + ax + b \text{ olsun.}$$

$$x^2 \cdot (x-2)^2 = -x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (x-2)^2 + x^2 - ax - b = 0$$

Bu denklemin, eşit iki kökünün dışında gerçel kökü olmamalıdır. Eşit kökler m olsun.

$$x^2 \cdot (x-2)^2 + x^2 - ax - b = (x-m)^2 \cdot (x^2 + px + r)$$

Çarpma işlemleri yapıp eşit dereceli x'lerin kat sayıları eşitlenirse,

$$\left. \begin{array}{l} p-2m = -4 \quad (1) \\ m^2 + r - 2mp = 5 \quad (2) \\ m^2p - 2mr = -a \quad (3) \\ m^2r = -b \quad (4) \end{array} \right\} \text{ sistemi elde edilir.}$$

$x^2 + px + r = 0$ denkleminin gerçel kökü olmamalıdır. $\Delta = p^2 - 4r < 0$ olmalıdır. (5)

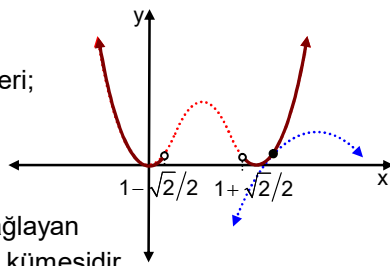
(1), (2) ve (5)'ten; $2m^2 - 4m + 1 > 0$ bulunur.

Değme noktalarının apsisleri

$$m \in \left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty \right)$$

koşulunu sağlamalıdır.

Değme noktalarının geometrik yeri; verilen eğrinin, değme koşulunu sağlayan noktalarının kümesidir.

**Örnek Problem-6**

İkinci dereceden P polinom fonksiyonunun baş kat sayısı -1 'dir.

$y = P(x)$ eğrisi $y = x^2 \cdot (x-2)^2$ eğrisine (1,1) noktasında teğet olduğuna göre; P(0) kaçtır?

Çözüm

$$y = P(x) = -x^2 + ax + b \text{ olsun.}$$

$$x^2 \cdot (x-2)^2 = -x^2 + ax + b$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (x-2)^2 - x^2 - ax - b = 0$$

Bu denklemin, eşit iki kökü 1'dir

$$x^2 \cdot (x-2)^2 - x^2 - ax - b = (x-1)^2 \cdot (x^2 + px + r)$$

Çarpma işlemleri yapıp eşit dereceli x'lerin kat sayıları eşitlenirse,

$$\left. \begin{array}{l} p-2 = -4 \quad (1) \\ r+1-2p = 5 \quad (2) \\ p-2r = -a \quad (3) \\ r = -b \quad (4) \end{array} \right\} \text{ sistemi elde edilir.}$$

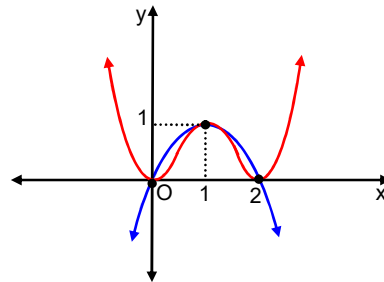
$p = -2$, $r = b = 0$ ve $a = 2$ bulunur.

$$y = P(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow P(0) = 2 \text{ olur.}$$

★ Eğrilerin diğer kesim noktalarını bulunuz.

★ Eğrilerin $(-1,1)$ noktasında teğet oldukları verilseydi, başka ortak noktaları olmayacaktı. Bunu gösteriniz.

★ $y = x^2 \cdot (x-2)^2$ eğrisinin $x = 1$ doğrusuna göre simetrik olduğu görülürse, (1,1) noktasında teğet olan parabolün denkleminin $P(x) = -(x-1)^2 + 1$ olacağı da görülebilir.



-3-