KONİKLER

Halit Çelik
Matematik Öğretmeni

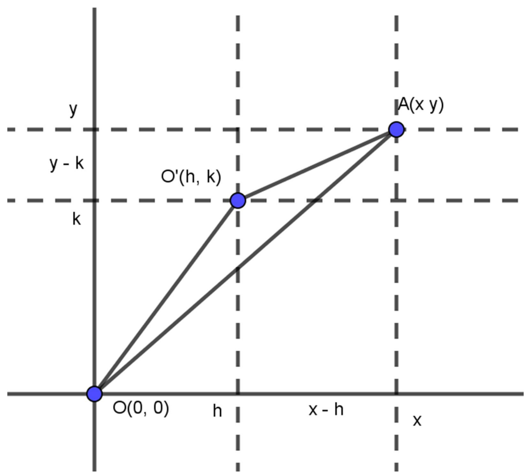
Genel İkinci Derece Denkleminin İncelemesi

Tanım:
$x\ e\ ve\ y\ ye\ göre$ ikinci dereceden $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemine genel ikinci derece denklemi belirttiği eğrilere de ikinci derece eğrileri denir.
Bu denklemde A, B, C, D, E, F birer Reel sayı ve A, B, C den en az biri sıfırdan farklı olmalıdır. Bu denklemin belirttiği eğrinin türü üzerinde bir inceleme yapılacaktır.
Bu denklemin belirttiği eğrinin türünü belirlemek için ya denklem y=f(x) biçimine getirlmeli veya iki kare ifadenin toplamı haline getirilmelidir ki bu duruma merkezil hale getirme denir.

MERKEZCİL HALE GETİRME

Bu işlemin yapılabilmes için koordinat sisteminde Öteleme ve Döndürme dönişimlerine bakmak gerekecektir.

1. ÖTELEME:
   Bunda amaç genel ikinci derece denkleminde x li ve y li terimlerin katsayılarını sıfır yapmak için koordinat eksenlerini paralel olarak kaydırıp başlangıç noktasını (0, 0= noktasından (h, k) noktasına getirilmesidir.



Bilinen xOy koordinat sisteminde A(x, y) noktasının O noktasonon O’(h, k) noktasına ötelenmesi durumunda yeni koordinat sistemine göre koordinatları (x – h, y – k) şeklinde olacaktır. Bu koordinat sisteminde A(x’, y’) olarak koordinatlandırılırsa

$$x' = x - h\ den\ x = x' + h\ ve\ y' = y\%k\ dan\ y = y' + k$$

Olarak yazılır. Buna göre genel ikinci derece denklemindeki x ve y li terimin katsayılarını sıfır yapmak için x yerine x’ + h ve y yerine y’ + k yazılacaktır.
Elde edilen yeni ikinci derece denkleminde x’ ve y’ lü terimlerin katsayıları 0 olacak şekilde h ve k değerleri hesaplanır. Bu eğrinin yeni koordinat sistemdeki denklemi olacaktır.

$$A(x' + h)^2 + B(x' + h)(y' + k) + C(y' + k)^2 + D(x' + h) + E(y' + k) + F = 0$$

$$Ax'^2 + 2Ax'h + Ah^2 + Bx'y' + Bx'k + By'h + Bhk +$$

$$Cy'^2 + 2Cy'k + Ck^2 + Dx' + Dh + Ey' + Ek + F = 0$$

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Ah + Bk + D)x' + (Bh + 2Ck + E)y'$$

$$+Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0$$

$Burada\ x've\ y'lü\ terimlerin\ katsayılarını\ 0\ a\ eşitleyelim$

$$2Ah + Bk + D = 0$$

$$Bh + 2Ck + E = 0$$

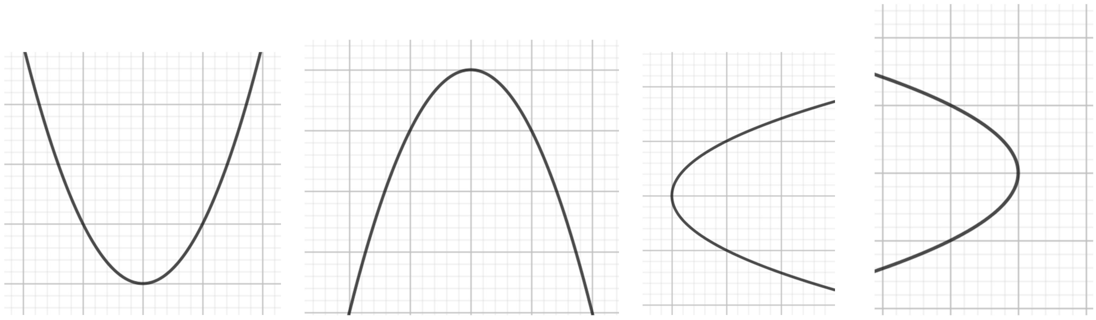
Bu denklem sisteminin çözümünde

$$4ACh + 2BCk = -2CD$$
$$-B^2h - 2BCk = BE$$
$$Buradan\ h = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2}\ ve\ k = \frac{CE - BD}{4AC - B^2}$$

Olarak bulunur. Bu değerler eğrinin yeni koordinat sisteminin merkezini ve bir bakıma eğrinin merkezinin koordinatlarıdır.

SonuçÇ

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ denleminde eğer $4AC - B^2 = 0$ ise eğrinin merkezi sonsuzdadır. Aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi bu eğrilere ikinci dereceden parabol denilmektedir.



Not:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ifadesinin her iki yanının x e ve y ye göre türvi alınırsa

$$2Ax + By + D = 0$$
$$Bx + 2CY + E = 0$$

Bu denklem sisteminin çözümünden de bulunacak x ve y değerleri

$$x = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2}\ ve\ y = \frac{CE - BD}{4AC - B^2}$$

Bu değerlerle yukarıda bulunan h ve k değerleri aynıdır. Yani h ve k değerlerini bulmak için yukarıda yapılan işlemlerin yerine türevden de faydalanılabilir.

Bu değerler yerine yazıldığında ikinci derece denklemi

$$Ax'^2BBx'y' + Cy'^2 + Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0$$

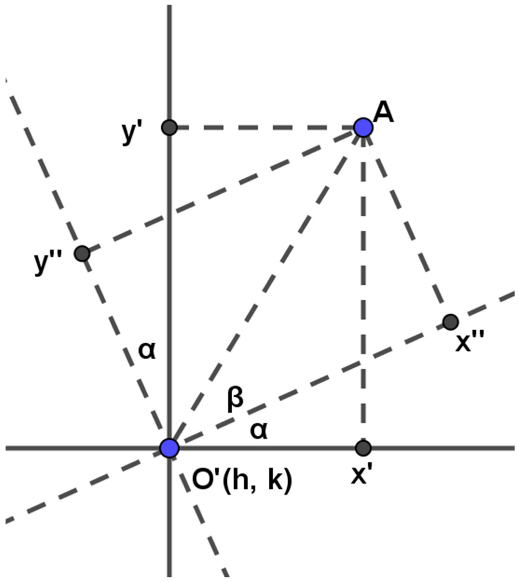
Son altı terimin toplamı F’ ile gösterilirse denklem

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$$

Şeklini alır.

2. DÖNME

$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$ denkleminde x’y’ lü terimi yok etmek için dönme dönüşü uygulanacaktır.



Koordinat eksenlerini başlangıç noktası etrafında α kadar döndürelim. A noktasının ilk koordinat sistemindeki koordinatları x’ ve y’, ikinci koordinat sistemindeki koordinatları x’’ ve y’’ olsun.

O’Ax’ ile O’Ay’’ üçgenlerinin eşliğinden |O’x’|=|O’y’’| ve ||Ax’|=|O’x’’| yani y’’=x’ ve x’’=y’ olur.

$m(AO'x'') = \beta$ dersek $m(O'Ay'') = \beta$ olur. |O’A|=r diyelim.

$$AO'x''\text{üç}geninde\ x'' = rcos\beta\ ve\ y'' = rsin\beta$$

Elde edilir. AOx’ üçgeninde $x' = rcos(\alpha + \beta) ve\ y' = \sin(\alpha + \beta)$ olur.

Bu durumda $x'rcos(\alpha + \beta) ve\ y' = rsin(\alpha + \beta)$ olur.Buna göre:

$$x' = r(cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta) = r\left(\frac{x''}{r}cos\alpha - \frac{y''}{r}sin\alpha\right) = x''cos\beta - y''sin\beta$$

$$y' = r(sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta) = r\left(\frac{y''}{r}cos\alpha + \frac{x''}{r}sin\alpha\right) = y'cos\alpha + x'sin\alpha$$

Olarak bulunur. Buna göre $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$ denkleminde x’y’ li terimi ortadan kaldırmak için

$$x' = x''cos\alpha - y''sin\alpha$$
$$y' = x''sin\alpha + y''cos\alpha$$

Yazalım.

$$A(x''cos\alpha - y''sin\alpha)^2 + B(x''cos\alpha - y''sin\alpha)(x''sin\alpha + y''cos\alpha) + C(x''sin\alpha + y''cos\alpha)^2 + F' = 0$$

Olur. Parantezler açılırsa

$A(x'')^2cos^2\alpha - 2Ax''y''cos\alpha sin\alpha + A(y'')^2sin^2\alpha +$

$B(x'')^2cos\alpha sin\alpha + Bx''y''cos^2\alpha - Bx''y''sin^2\alpha - B(y'')^2sin\alpha cos\alpha +$

$$C(x'')^2sin^2\alpha + 2Cx''y''sin\alpha cos\alpha + C(y'')^2cos^2\alpha + F' = 0$$

$$(Acos^2\alpha + Bcos\alpha sin\alpha + Csin^2\alpha)(x'')^2 + (-2Acos\alpha sin\alpha + Bcos^2\alpha - Bsin^2\alpha + 2Csin\alpha cos\alpha)x''y''$$
$$+(Asin^2\alpha - Bsin\alpha cos\alpha + Ccos^2\alpha)(y'')^2 + F' = 0$$

$Acos^2\alpha + Bcos\alpha sin\alpha + Csin^2\alpha = A'$ ve $Asin^2\alpha - Bsin\alpha cos\alpha + Ccos^2\alpha = C'$ diyelim. $x''y''$ lü terimin katsayısı 0 olacak şekilde α sayısının bulunması gerekiyor.. Bunun için x’’y’’ nün katsayısı

$$B' = -2Acos\alpha sin\alpha + Bcos^2\alpha - Bsin^2\alpha + 2Csin\alpha cos\alpha = 0$$

Olacak şekilde α sayısı hesaplanacak.. Düzenlenirse

$$-Asin2\alpha + Bcos2\alpha + Csin2\alpha = 0\ den\ \ (C-A)sin2\alpha + Bcos2\alpha = 0\ dan\ tan2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

Olarak bulunur. Yani $\alpha = \frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}$ alınırsa yukarıdaki $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$

Denklemi

$$A'(x'')^2 + C'(y'')^2 + F' = 0$$

halini alır. Bu son denkleme genel ikinci derece denkleminin standart merkezcil denklemi denir.

Özellikler:

1. A’+C’=A+C dir.
   A’+C’$= Acos^2\alpha + Bcos\alpha sin\alpha + Csin^2\alpha + Asin^2\alpha - Bsin\alpha cos\alpha + Ccos^2\alpha$
   $= A(cos^2\alpha + sin^2\alpha)C(cos^2\alpha + sin^2\alpha) = A + C\ olur.$
2. $4A'C' - (B')^2 = 4AC - B^2$ bağıntısı vardır.
   Bunun için $\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ ve $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ eşitliklerini kullanacağız.

$$A' = Acos^2\alpha + Bcos\alpha sin\alpha + Csin^2\alpha = A\frac{\cos 2\alpha + 1}{2} + B\frac{\sin 2\alpha}{2} + C\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$C' = Asin^2\alpha - Bsin\alpha cos\alpha + Ccos^2\alpha = A\frac{1-\cos 2\alpha}{2} - B\frac{\sin 2\alpha}{2} + C\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

$$B' = -2Acos\alpha sin\alpha + Bcos^2\alpha - Bsin^2\alpha + 2Csin\alpha cos\alpha = -A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha$$

$$A' = A\frac{\cos 2\alpha + 1}{2} + B\frac{\sin 2\alpha}{2} + C\frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos 2\alpha + \frac{B}{2}\sin 2\alpha + \frac{C}{2} - \frac{C}{2}\cos 2\alpha$$

$$= \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha + \frac{B}{2}\sin 2\alpha$$

$$C' = A\frac{1-\cos 2\alpha}{2} - B\frac{\sin 2\alpha}{2} + C\frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \frac{A}{2} - A\frac{\cos 2\alpha}{2} - B\frac{\sin 2\alpha}{2} + C\frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{C}{2}$$

$$= \frac{A+C}{2} - \left(\frac{A-C}{2}\right)\cos 2\alpha - \frac{B}{2}\sin 2\alpha$$

$$4A'C' = 4\left(\frac{(A+C) + (A-C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha}{2}\right)\left(\frac{(A+C) - (A-C)\cos 2\alpha - B\sin 2\alpha}{2}\right)$$

$$= (A+C)^2 - (A-C)^2\cos^2 2\alpha - B^2 sin^2 2\alpha - (A-C)B\sin 4\alpha$$

$$(B')^2 = (-Asin2\alpha + Bcos2\alpha + Csin2\alpha)^2 = \left((C-A)sin2\alpha + Bcos2\alpha\right)^2$$

$$= (A-C)^2 sin^2 2\alpha - (A-C)Bsin4\alpha + B^2 cos^2 2\alpha$$

$$4A'C' - (B')^2 = (A+C)^2 - (A-C)^2\cos^2 2\alpha - B^2 sin^2 2\alpha - (A-C)B\sin 4\alpha$$

$$-(A-C)^2 sin^2 2\alpha + (A-C)Bsin4\alpha - B^2 cos^2 2\alpha$$

$$= (A+C)^2 - (A-C)^2(sin^2 2\alpha + cos^2 2\alpha) - B^2(sin^2 2\alpha + cos^2 2\alpha)$$

$$= A^2 + 2AC + C^2 - A^2 + 2AC - C^2 - B^2 = 4AC - B^2$$

Olur.

Genel ikinci derece eğrilerinin sınıflandırılması

Genel ikinci derece denklemi $Ax^2 + Bxy + Cy^2Dx + Ey + F = 0$ şeklindedir. Bu denklemde yukarıdak öteleme ve dönme işlemleri yapıldıktan sonra denklem

$$A'(x'')^2 + C'(y'')^2 + F' = 0$$

Halini almıştır. Burada A', C' ve F' nün alacağı değerlere göre denklemin belirttiği eğrinin adı değişir. A' veya C' değerlerinden en az birisi sıfırdan farklı olmaıdır. Fatz edelim $A' \neq 0$ olsun A'>0 veya A'<0 olur.$a < 0$ olması durumunda denklem – 1 ile çarpılarak $(x'')^2$ nin katsayısı pozitif hale getirilebilir. İnceleme $(x'')^2$ li terimin katsayısının pozitif olması durumu göz önünde bulundurularak yapılacaktır.

$$A'(x'')^2 + C'(y'')^2 + F' = 0$$

Denkleminde bundan sonraki bölümlerde x'' yerine x, y'' yerine y, A' yerine A, C' yerine C ve F^yerine F alınarak yazılacaktır. Bu duruma göre denklemimiz

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

A>0 durumuna göre

1. $C \neq 0$ olsun
   a) $C > 0 ve\ F < 0$ olsun. F eşitliğin ikinci yanına alınıp her iki taraf $-F$ ile bölünürse $\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1$ olur. F<0 olduğundan paydalar pozitiftir. $-\frac{F}{A} = a^2\ ve\ -\frac{F}{C} = b^2$ yazılabilir. Bu durumda denklem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şeklini alır. Bu bilinen haliyle merkezcil elips denklemidir.
   b) $C > 0\ ve\ F > 0$ olsun.

      $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ denkleminin her iki yanı F ile bölünürse $\frac{x^2}{\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{\frac{F}{C}} = -1$ olur.

      $\frac{F}{A} = a^2\ ve\ \frac{F}{C} = b^2\ yazılırsa\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ olup bu bir sanal elips belirtir.
   c) C>0 ve F=0 olsun

      Denklemimiz $Ax^2 + Cy^2 = 0$ olur. Bütün terimler AC ile bölünürse $\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} = 0$ olur. Burada

      $C > 0\ olduğundan\ C = a^2\ ve\ A > 0\ olduğundan\ A = b^2$ yazılırsa denklem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ olur.

      Düzenlenirse $\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0$ dan eşlenik iki karmaşık sayı elde edilir. Bu durumda denklem bir nokta belirtmektedir.

      Bu üç durumla ilgili olarak A>, C>0 ve B=0 olduğunadan 4AC – B^2 yani 4A'C' – $(B')^2$ sıfırdan büyük olacaktır. Yani genelleştirirsek $Ax^2 + Bxy + Cy^2Dx + Ey + F = 0$ denkleminde 4AC – B^2 > 0 ise denklem nokta, sanal veya gerçek bir elips belirtir.

d) C <0 ve F< 0 olsun.
$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ denklemi $Ax^2 + Cy^2 = -F$ olur. – F>0 olduğundan her iki taraf – F ile bölünürse $\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1$ *olur*. $-\frac{F}{A} > 0$ *olup* a^2 diyelim. $-\frac{F}{C} < 0$ olduğundan denklem $\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} - \frac{y^2}{\frac{F}{C}} = 1$ *yazılırsa* $\frac{F}{C} > 0$ *olup* $\frac{F}{C} = b^2$ dersek denklem $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ olur. Bu bilinen haliyle merkezcil hiperbol denklemidir.

e) C < 0 ve F > 0 olsun
$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ denklemi $Ax^2 + Cy^2 = - F$ olur. – F < 0 olup her iki taraf – F ile bölünürse $\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1$ olur. $-\frac{F}{A} < 0$ *ve* $-\frac{F}{C} > 0$ *olur*. $\frac{F}{A} > 0$ olduğundan bir önceki duruma benzeterek $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ yazabiliriz. Bu hiperbol denklemidir.

f) C < 0 ve F = 0 olsun.
$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ denklemi $Ax^2 + Cy^2 = 0$ ve $Ax^2 = - Cy^2$ olur. Eşiyliğin ikinci tarafı sıfırdan büyüktür. Her iki yanın karekökü alınırsa $|\sqrt{A}x| = |\sqrt{C}y|$ olur kibu bir doğru çifti belirtir.

g) C = 0 olsun.
$Ax^2 + Bxy + Dx + Ey + F = 0$ denkleminde $\tan 2\alpha = \frac{B}{A}$ dönüşümü yapılırsa xy li terim ortadan kalkar ve denklemimiz $A! x'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ olur. Burada x' = x'' + h ve y' = y'' + k ötelemesi yaparak x'' ve y'' lü terimlerin katsayılarını sıfır yamaya çalışalım.

$$A'(x'')^2 + (2A'h + D')x'' + E'y'' + A'h^2 + D'h + E'k + F' = 0$$

Burada x'' nün katsayısını sıfır yapmak için $h = -\frac{D'}{2A'}$ olmalı. Y'' nün katsayısının sıfır olması için ise E'=0 olmalıdır. Bunun dışında y'' nün katsayısı sıfır olmamaktadır. Bunu geometrik anlamı C=0 olması durumunda öteleme x' ekseni üzerinde $\left(-\frac{D'}{1A'}, 0\right)$ noktasına yapılabilecek demektir. Bu noktadan x' eksenine çizilecek dik doğru y'' ekseni olacaktır.
Genel ikinci derece denklemi dönme ve öteleme işleminin sonunda

$$A'^{(x'')^2} + E'y'' + F' = 0$$

Şeklini alacaktır.

I. $E' \neq 0$ *ve* $F' \neq 0$ olması durumu.
$x'' = x''' + h$ *ve* $y'' = y''' + k$ ötelemesini yapalım. Denklem

$$A'^{(x''')^2} + 2A'hx''' + A'^{h^2} + E'y''' + E'k + F' = 0$$

Olur. x''' nün katsayısı sabit ve A'h=0 için h=0 olur. Bu durumda denklem $E'y''' = -A'(x''')^2 - F'$ parabol denklemine dönüşür.

II. $E' \neq 0 \; ve \; F' = 0$ olsun.

$A'(x''')^2 + E'y''' = 0$ olur. Buradan $(x''')^2 = -\dfrac{E'}{A'} y'''$ parabol denklemi elde edilir.

III. E'=0 ve $F' \neq 0$ olsun.

Denklem $A'(x''')^2 + F' = 0$ halini alır.

$F' < 0$ ise denklem x''' eksenine dik iki doğru belirtir.

$F' > 0$ ise sanal iki doğru belirtir.

Bu şartlarda verilen ikinci derece denklemleri parabol tipindedir.

Öteleme başlığında da belirttiğimiz gibi $4AC - B^2 = 0$ olması durumunda $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ikinci derece denklemi bir parabol belirtir.

IV. $E' = 0$ ve $F' = 0$ olması durumunda $A'(x''')^2 = 0$ olur. Bu da x''' ekseni ile çakışık iki doğru demektir.

Elips veya hiperbolle ilgili özel Tanımlamalar

Bilindiği üzere Geometri kaynaklarında koniklerle ilgili olarak
Genel haliyle "Düzlemde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yeri" veya daha özel hali ile elips; " Düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri" olarak tanımlanır. Hiperbol ise "düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı sabit olan noktaların geometrik yeri" olarak tanımlanır.
Genel bir bilgi olarak $Ax^2 + Bxy + Cy^2Dx + Ey + F = 0$ ikinci derece denklemi AC – $B^2>0$ ise elips, AC – $B^2<0$ ise hiperbol ve AC – $B^2=0$ ise parabol veya bunların yozlaşmış biçimlerini belirtmektedir.
Aşağıdaki çalışma elips veya hiperbolün tanımlarına farklı bir bakış açısı ile yaklaşmamızı sağlamaktadır.

Teorem:
Düzlemde $d \ldots\ldots y = mx + n$ doğrusu, doğru üzerinde bir M(a, b) noktası ve doğru üzerinde olmayan sabit bir P(c, d) ve sabit olmayan bir Q(x, y) noktası alınıyor. [PQ] nın orta noktası R olsun. PQ doğrusu ile d doğrusunun yaptığı açı α ve MR doğrusunun d doğrusu ile yaptığı açı β olsun. k sabit bir sayı olmak üzere

$$\boldsymbol{tan(\alpha)tan(\beta) = k}$$

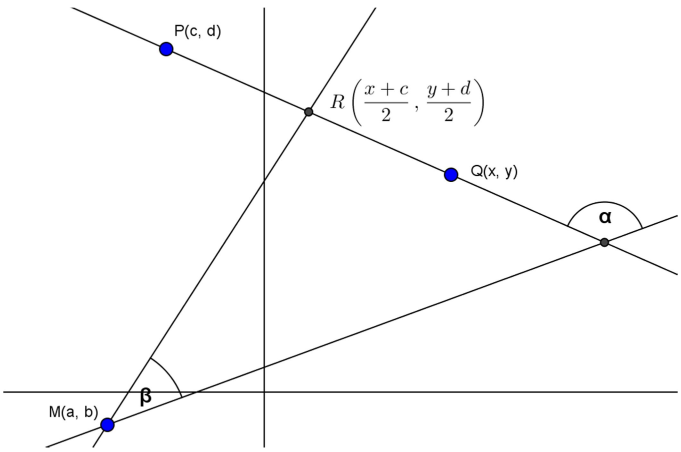
olmak üzere tanαtanβ nın tanımlı olduğu değerler için Q noktasının geometrik yeri;

$$\boldsymbol{k = -1\ ise\ bir\ \text{ç}ember.}$$

$$\boldsymbol{k \neq -1\ ve\ k < 0\ ise\ bir\ elipstir.}$$

$$\boldsymbol{k > 0\ ise\ bir\ hiperbold\text{ü}r.}$$

İspat:



İki doğrunun eğimleri m_1, m_2 olmak üzere aralarındaki açının tanjantı $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ ile hesaplandığı bilinmektedir. Buna göre önce PQ ve MR doğrularının eğimlerini hesaplayalım:

$$PQ\ nun\ eğimi = \frac{y-d}{x-c}\ ve\ MR\ nun\ eğimi = \frac{\frac{y+d}{2} - b}{\frac{x+c}{2} - a} = \frac{y+d-2b}{x+c-2a}$$

şeklindedir. Buna göre

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{y-d}{x-c}-m}{1+m\dfrac{y-d}{x-c}} == \frac{y-mx+mc-d}{x+my-c-md}$$

$$\tan\beta = \frac{\dfrac{y+d-2b}{x+c-2a}-m}{1+m\dfrac{y+d-2b}{x+c-2a}} = \frac{y-mx+(d-2b-mc+2ma)}{x+my+(c-2a+md-2mb)}$$

Buna göre

$$\tan\beta\tan\alpha = \frac{y-mx+mc-d}{x+my-c-md}\cdot\frac{y-mx+(d-2b-mc+2ma)}{x+my+(c-2a+md-2mb)} = k$$

$$= \frac{y^2+m^2x^2-2mxy+(2mb-2m^2a)x+(2ma-2b)y+(mc-d)(d-2b-mc+2ma)}{x^2+m^2y^2+2mxy-(2a+2mb)x-(2ma+2m^2b)y-(c+md)(c-2a+md-2mb)} = k$$

$$y^2+m^2x^2-2mxy+(2mb-2m^2a)x+(2ma-2b)y+(mc-d)(d-2b-mc+2ma) =$$

$$k\left(x^2+m^2y^2+2mxy-(2a+2mb)x-(2ma+2m^2b)y-(c+md)(c-2a+md-2mb)\right)$$

İfade düzenlenirse

$$(m^2-k)x^2+(1-km^2)y^2-2m(1+k)xy+2\left[(1+k)mb+(k-m^2)a\right]x+2\left[(1+k)ma-(1-km^2)b\right]y$$

$$+2\left[(ma-b)(mc-d)-k(a+mb)(c+md)\right]-(mc-d)^2+k(c+md)^2=0$$

elde edilir

Genel ikinci derece denklemi $Ax^2+Bxy+Cy^2Dx+Ey+F=0$ ile karşılaştırılırsa $A=m^2-k, B=-2m(1+k)\ ve\ C=1-km^2$ olur. Genel ikinci derece denkleminde $B^2-4AC>0\ ise\ denklem\ hiperbol, B^2-4AC<0\ ise\ denklem\ elips\ belirtir.$

$$B^2-4AC = 4m^2(1+2k+k^2)-4(m^2-k)(1-km^2)$$
$$= 4m^2+8km^2+4k^2m^2-4m^2+4km^4+4k-4k^2m^2$$
$$= 4k(m^4+2m^2+1) = 4k(m^2+1)^2$$

olarak bulunur.

Bunsa göre;

$B^2-4AC=4k(m^2+1)^2>0$ olması için k > 0 olmalıdır. Yani k > 0 ise Q noktasının geometrik yeri bir hiperboldür.

$B^2-4AC=4k(m^2+1)^2<0$ olması için $k\neq -1\ ve$ k < 0 olmalıdır. Yani k < 0 ise Q noktasının geometrik yeri bir elipstir.

$k=-1$ olursa $A=C\ ve\ B=0$ olur ki bu da elde edilen ifadenin bir çember belirtmesi demektir.

Dikkat edilmesi gereken husus:

Yukarıda tanαtanβ nın pay ve paydasındaki çarpanlar birinci dereceden ifadelerdir. Bu ifadelerin belirttiği doğruların ikişer ikişer kesişme noktası olan dört nokta elips veya hiperbole ait noktalar olmalarına rağmen tanαtanβ = k eşitliğini sağlamamaktadır. Bu nedenle, iddiamızda tanımlı olduğu noktalar için şeklinde bir ifade kullanılmıştır.

Örnek:

Düzlemde sabit d …. y=2x + 1 doğrusu bu doğru üzerinde bir nokta $M(-2,-3)$ noktası ve dışında sabit P(3, 4) noktası veriliyor. Bir Q(x, y) noktası için [PQ] nın orta noktası R olsun. MR doğrusunun d doğrusu ile yaptığı açının ölçüsü α ve PQ doğrusunun d doğrusu ile yaptığı açının ölçüsü β olmak üzere

$\tan\alpha \tan\beta = -\frac{1}{2}$ ise Q noktasının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm:

d doğrusunun eğimi 2 dir. [PQ] nın orta noktası $R\left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$ dir.

PQ doğrusunun eğimi $\frac{y-4}{x-3}$, MR doğrusunun eğimi ise $\frac{\frac{y+4}{2}+3}{\frac{x+3}{2}+2} = \frac{y+10}{x+7}$ dir.

MD doğrusunun d ile yaptığı açının tanjantı $\tan\alpha = \frac{\frac{y+10}{x+7}-2}{1+\frac{y+10}{x+7}\cdot 2} = \frac{-2x+y-4}{x+2y+27}$

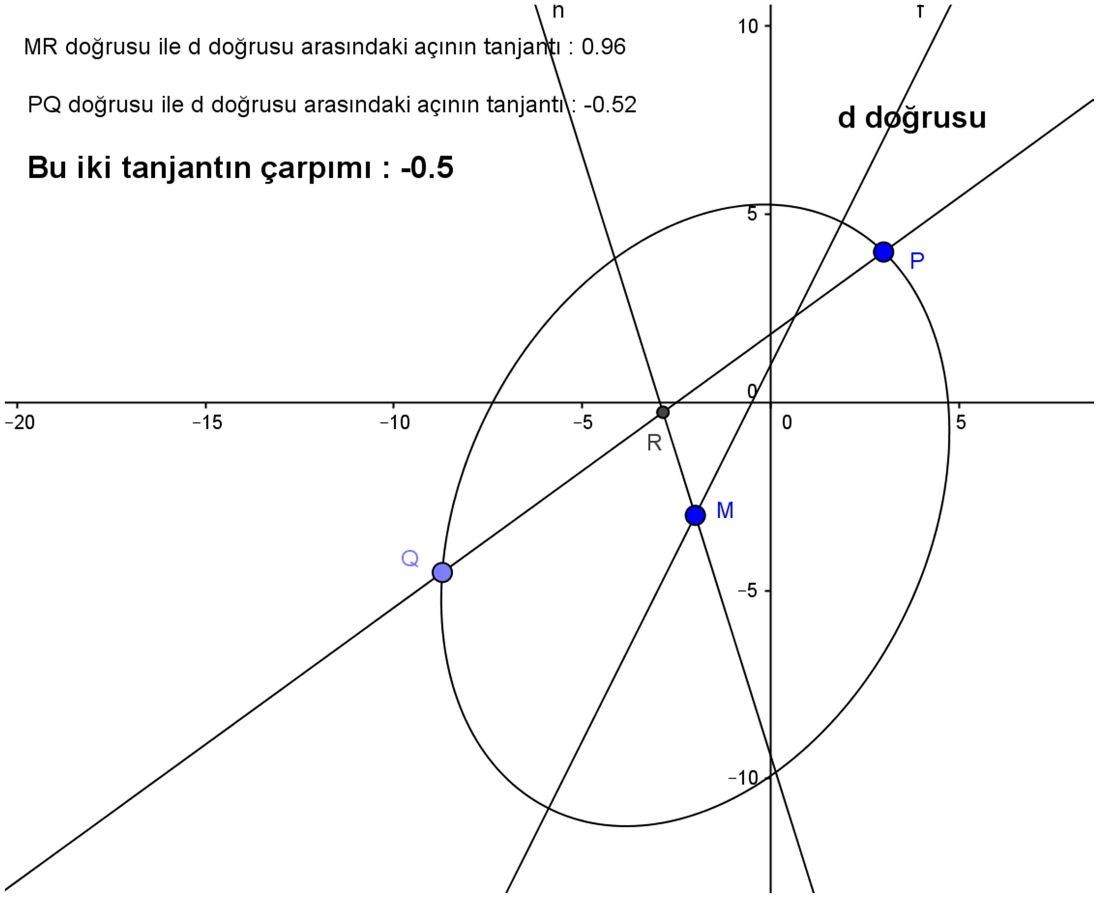
PQ doğrusunun d doğrusu ile yaptığı açının tanjantı $\tan\beta = \frac{\frac{y-4}{x-3}-2}{1+\frac{y-4}{x-3}\cdot 2} = \frac{-2x+y+2}{x+2y-11}$

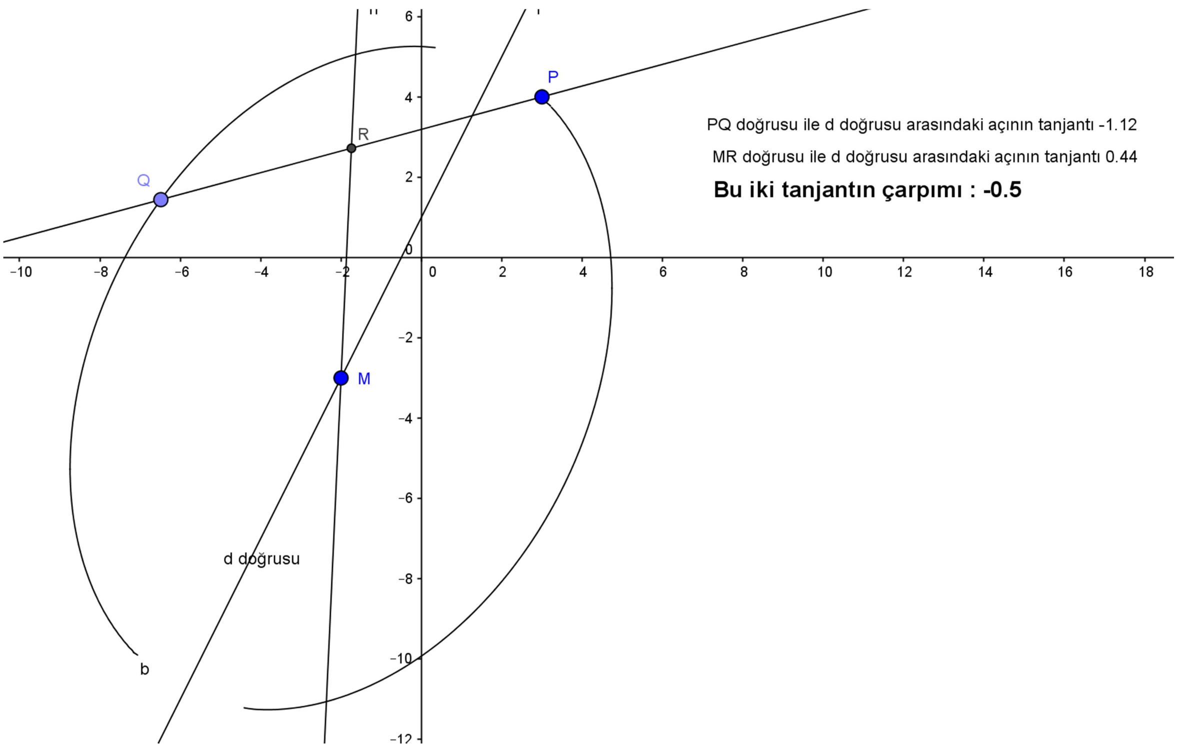
$$\boldsymbol{tan\alpha tan\beta} = \frac{-2x+y-4}{x+2y+27}\,\frac{-2x+y+2}{x+2y-11} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

İşlemler yapılır ve düzenlenirse geometrik yerin denklemi

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 24x + 28y - 313 = 0$$

Olarak bulunur. Ancak yukarıda da belirtildiği gibi tabαtanβ nın pay veya paydasını sıfıy yapan nktalar bu elipsin elemanı olmayacaktır. Aşağıdaki grafik son ifadenin grafiğidir. İkinci grafik ise tanαtanβ nın işlem yapılmazdan önceki halinin grafiğidir.





Şekil üzerindeki boş noktalar tanαtanβ nın rasyonel ifadelerinin pay veya paydasındaki ifadelerin ikişer ikişer kesişme noktalarıdır. Tabiatıyla bu noktalarda **tanαtanβ** tanımsız olacağından bu noktalar geometrik yere ait noktalar değildir.

Teorem:

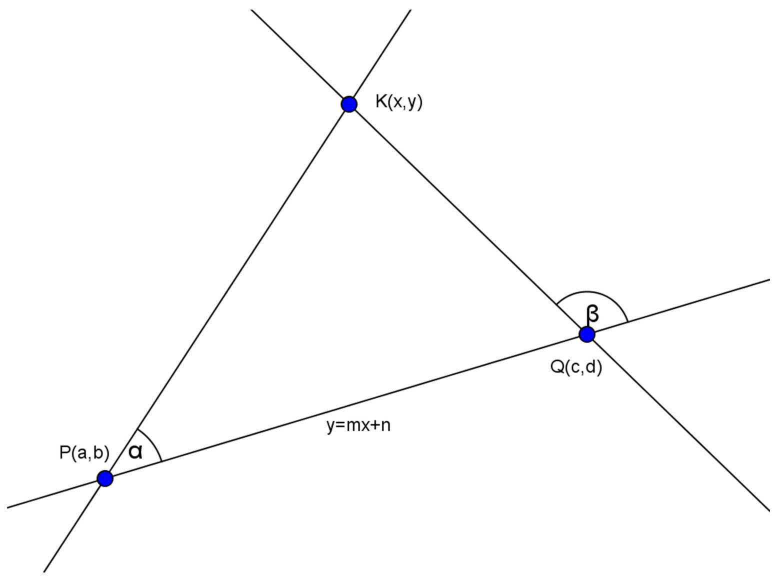
Düzlemde d …… y = mx +n doğrusu ile bu doğru üzerinde sabit P(a, b) ve Q(c, d) noktaları alınıyor. K(x, y) olmak üzere KP doğrusunun d doğrusu ile yaptığı açının ölçüsü α, KQ doğrusunun d doğrusu ile yaptığı açının ölçüsü β osun.

$$tan\alpha . tan\beta = k(sabit)$$

Olmak üzere $tan\alpha . tan\beta$ nın tanımlı olduğu değerler için K noktasının geometrik yeri;

$$k = -1 \ ise \ bir \ çember,$$
$$k \neq -1 \ ve \ k < 0 \ ise \ bir \ elips$$
$$k > 0 \ ise \ bir \ hiperbold\text{ür}.$$

İspat:



P noktası d doğrusu üzerinde olduğundan P(a, ma+n) ve Q noktası d doğrusu üzerinde olduğundan Q(c, mc+n) şeklindedir.

d doğrusunun eğimi m, KP doğrusunun eğimi $\frac{y-b}{x-a} = \frac{y-ma-n}{x-a}$, KQ doğrusunun eğimi $\frac{y-d}{x-c} = \frac{y-mc-n}{x-c}$ olduğuna göre α ve β nın tanjantlarını yazalım

$$\tan\alpha=\frac{\frac{y-ma-n}{x-a}-m}{1+\frac{y-ma-n}{x-a}m}=\frac{y-ma-n-mx+ma}{x-a+my-m^2a-mn}=\frac{-mx+y-n}{x+my-\left(m^2a+mn+a\right)}$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{y-mc-n}{x-c}-m}{1+\frac{y-mc-n}{x-c}m}=\frac{y-mc-n-mx+mc}{x-c+my-m^2c-mn}=\frac{-mx+y-n}{x+my-\left(m^2c+mn+c\right)}$$

$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{-mx+y-n}{x+my-\left(m^2a+mn+a\right)}\cdot\frac{-mx+y-n}{x+my-\left(m^2c+mn+c\right)}=$$

$$\frac{m^2x^2+y^2+n^2-2mxy+2mnx-2ny}{x^2+2mxy+m^2y^2-(m^2a+m^2c+2mn+a+c)x-m(m^2a+m^2c+2mn+a+c)y++\left(m^2a+mn+a\right)}$$
$$=k$$

İfade düzenlenirse:

$$(m^2-k)x^2-2m(1+k)xy+(1-km^2)y^2-[k(m^2a+m^2c+2mn+a+c)+2mn]x+$$
$$[km(m^2a+m^2c+2mn+a+c)-2n]y+n^2-k\left(m^2a+mn+a\right)\left(m^2c+mn+c\right)=0$$

Elde edilir. Bu ifade genel ikinci derece denklemi ile karşılaştırılırsa:

$$A=m^2-k, B=-2m(1+k)\ ve\ C=1-km^2$$

Olduğu görülür. $4AC-B^2$ değerini hesaplayalım:

$$4AC-B^2=4(m^2-k)(1-km^2)-4m^2(1+2k+k^2)$$
$$=4m^2-4km^4-4k+4k^2m^2-4m^2-8km^2-4k^2m^2$$
$$=-4km^4-8km^2-4k=-4k(m^4+2m^2+1)$$
$$4AC-B^2=-4k(m^2+1)^2$$

Elde edilir. Burada $4AC-B^2$ nin işareti k nın işaretine bağlıdır. Buna göre

$$k<0\ ise\ 4AC-B^2>0\ olur\ geometrik\ yer\ elips\ olur.$$
$$k>0\ ise\ 4AC-B^2<0\ olur\ geometrik\ yer\ hiperbol\ olur.$$

$k=-1\ ise$ yukarıda elde ettiğimiz ifade:

$$(m^2+1)x^2+(1+m^2)y^2-[-(a+mb+c+md)-m(ma-b+mc-d)]x+[ma-b+mc-d-$$
$$m(a+mb+c+md)]y+(ma-b)(mc-d)+(a+mb)(c+md)=0$$

Haline gelir. Burada A = C olur. Ayrıca KP ve KQ doğruları K noktasında dik kesiştiklerinden K noktası [PQ] doğru parçasını dik açı altında gören bir nokta olup geometrik yeri [PQ] çaplı bir çember olacaktır.

Dikkat edilmesi gereken husus:

Yukarıda tanαtanβ nın pay ve paydasındaki çarpanlar birinci dereceden ifadelerdir. Bu ifadelerin belirttiği doğruların ikişer ikişer kesişme noktası olan iki nokta geometrik yere ait noktalar olmakla beraber tanαtanβ = k. Eşitliğini sağlamamaktadır. Bu nedenle, iddiamızda tanımlı olduğu noktalar şeklinde bir ifade kullanılmıştır.

Örnek:

Düzlemde d …. 2x + y – 4 = 0 doğrusu ve bu doğru üzerinde $P(-2,8)\,ve\,Q(3,-2)$ noktaları veriliyor. K(x, y) düzlemin bir noktası olmak üzere KP doğrusunun d doğrusu ile yaptığı açının ölçüsü α, KQ doğrusunun

d doğrusu ile yaptığı açının ölçüsü β olmak üzere $\tan\alpha\tan\beta = -\frac{1}{4}$ olduğuna göre K noktalarının geometrik yerinin denklemi nedir.

Çözüm:

d doğrusunun eğimi -2 dir. KP doğrusunun eğimi $\frac{y-8}{x+2}$ ve KQ doğrusunun eğimi $\frac{y+2}{x-3}$ olduğuna göre

$$tan\alpha = \frac{\frac{y-8}{x+2}+2}{1+\frac{y-8}{x+2}(-2)} = \frac{2x+y-4}{x-2y+18}$$

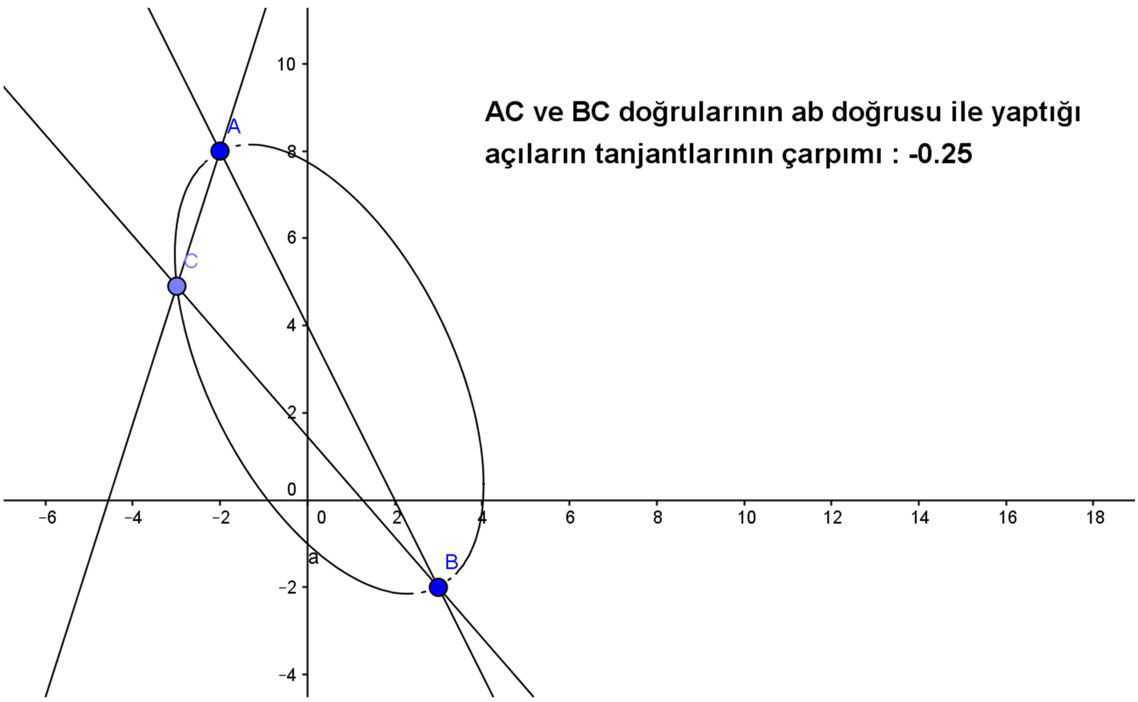
$$tan\beta = \frac{\frac{y+2}{x-3}+2}{1+\frac{y+2}{x-3}(-2)} = \frac{2x+y-4}{x-2y-7}$$

$$tan\alpha tan\beta = \frac{(2x+y-4)}{(x-2y+18)}\frac{(2x+y-4)}{(x-2y-7)} = -\frac{1}{4}$$

İfade düzenlenirse $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 53x - 82y - 62 = 0$ elde edilir. Bu ifadede

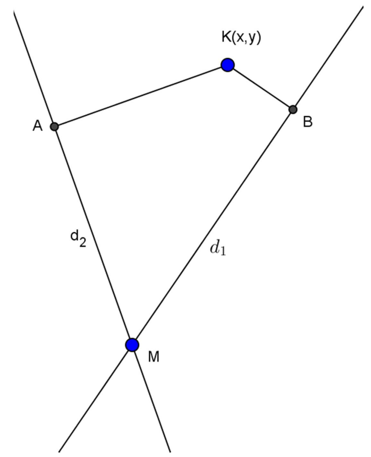
$$4AC - B^2 = 380 > 0 \; olup \; bir \; elipstir.$$

Grafiği aşağıdadır.



Şekildeki boş noktalar $tan\alpha tan\beta$ nın pay ve paydasındaki birinci dereceden ifadelerin belirttiği doğruların ikişer ikişer kesişme noktalarıdır. Bu noktalarda $tan\alpha tan\beta$ tanımsızdır.

Teorem:
d_1 *ve* d_2 kesişen iki doğr olsun K(x, y) noktasının d_1 *ve* d_2 doğrularına olan uzaklıkları çarpımı sabit bir sayı ise K noktalarının geometrik yeri merkezi bu iki doğrunun kesişme noktası olan hiperboldür.
İspat:



Şekilde $|KA||KB| = k$ sabit sayı ise K nın geoöetrik yerinin hiperbol olduğunu ispatlayacağız.
d_1 *doğrusunun denklemi* $y = m_1x + n_1$, d_2 *doğrusunun denklemi* $y = m_2x + n_2$ olsun.

$$|KA| = \frac{|m_2x - y + n_2|}{\sqrt{(m_2)^2 + 1}} \; ve |KB| = \frac{|m_1x - y + n_1|}{\sqrt{(m_1)^2 + 1}}$$

Olur. Çarpımları

$$|KA| \cdot |KB| = \frac{|m_2x - y + n_2|}{\sqrt{(m_2)^2 + 1}} \cdot \frac{|m_1x - y + n_1|}{\sqrt{(m_1)^2 + 1}} = k$$

$$\frac{|m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^1 + (m_2n_1 + m_1n_2)x - (n_1 + n_2)y + n_1n_2|}{\sqrt{((m_2)^2 + 1)((m_1)^2 + 1)}} = k$$

$$m_1m_2 = A, -(m_1 + m_2) = B \,, \qquad m_1n_2 + m_2n_1 = D, -(n_1 + n_2) = E$$

$$ve\; k\sqrt{((m_2)^2 + 1)((m_1)^2 + 1)} = F$$

Denirse ifademiz

$$|m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^1 + (m_2n_1 + m_1n_2)x - (n_1 + n_2)y + n_1n_2| = F$$

Ve

$$m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^1 + (m_2n_1 + m_1n_2)x - (n_1 + n_2)y + n_1n_2 = F$$

Veya

$$m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^1 + (m_2n_1 + m_1n_2)x - (n_1 + n_2)y + n_1n_2 = -F$$

Olur. Her iki ifadede A, B ve C değerleri aynıdır. Buna göre 4AC – B^2 hesaplanırsa;

$$4AC - B^2 = 4m_1m_2 - (-m_1 - m_2)^2$$

$$4AC - B^2 = 4m_1m_2 - m_1{}^2 - 2m_1m_2 - m_2{}^2$$
$$4AC - B^2 = -m_1{}^2 + 2m_1m_2 - m_2{}^2 = -(m_1{}^2 - 2m_1m_2 + m_2{}^2) = -(m_1 - m_2)^2$$

Sonucuna ulaşılır. Yani

$$4AC - B^2 = -(m_1 - m_2)^2 < 0$$

Olduğundan K noktasının geometrik yeri

$$m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^1 + (m_2n_1 + m_1n_2)x - (n_1 + n_2)y + n_1n_2 = F$$

İle

$$m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^1 + (m_2n_1 + m_1n_2)x - (n_1 + n_2)y + n_1n_2 = -F$$

Denklemlerinin belirttiği hiperbollerdir.

Örnek

Düzlemde 2x – y + 1 = 0 ve x + 2y – 3 = 0 doğrularına olan uzaklıkları çarpımı 3 olan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm:

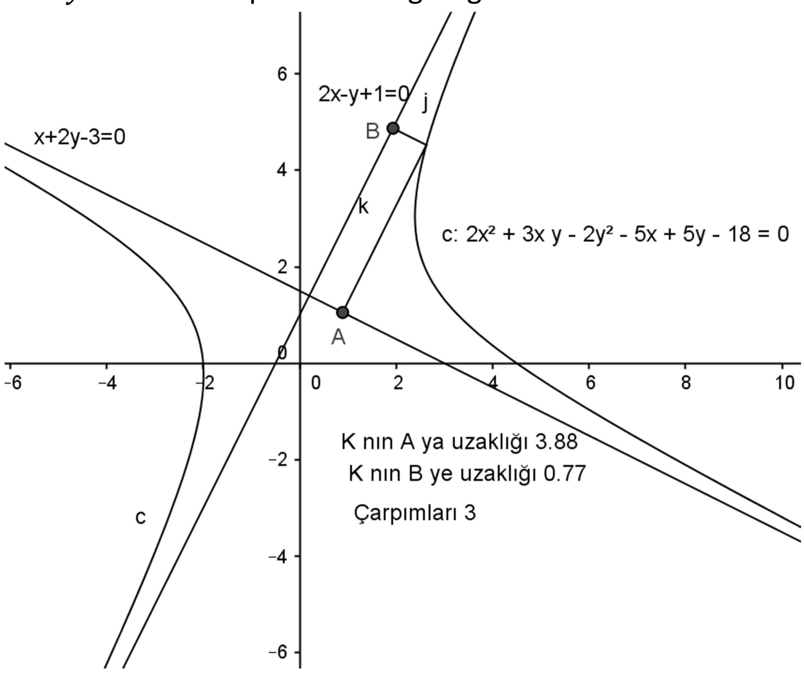
K(x, y) noktasının bu iki doğruya uzaklıkları çarpımı bir hiperboldür.

$$\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|2x-y+1_1|}{\sqrt{5}} = 3 \text{ den } |2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y - 3| = 15$$

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y - 3 = 15 \ veya\ 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y - 3 = -15$$
$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y - 18 = 0 \ veya\ 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + 12 = 0$$

Hiperbolleri elde edilir. Grafikleri aşağıdadır.

$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y - 18 = 0$ hiperbolünün grafiği



$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + 12 = 0$ hiperbolünün grafiği