5.3 Olasılık Kuramı

Bir madeni paranın atılışında "yazı" ya da "tura" gelmesi; bir zar atıldığında belirli bir yüzün üste gelmesi; gelecek ay İstanbul'da gerçekleşecek trafik kazalarının sayısı; ... gibi rastgele olayların çözümlemesini konu alan matematik dalı **olasılık kuramı**dır.

Rastgele bir olayın gerçekleşip gerçekleşmeyeceği önceden bilinemez. Bir madeni parayı havaya attığınızda "yazı" gelip gelmediğini, ancak elinize düşen paraya bakarak öğrenebilirsiniz.

Yine de, bir olayın **olabilirliğinin ölçüsü**nü bilmek; önlemler alabilmek, hazırlıklı olabilmek gibi bir çok bakımdan büyük önem taşır.

Bir olayın **olabilirliğinin ölçüsünü hesaplama – olasılığını bulma –** yollarını bize, **olasılık kuramı** öğretir.

Olasılık kuramından günümüzde, ekonomi, mühendislik, tıp, istatistik gibi bir çok bilim dalında yararlanılır.

Örnek Uzayı

Yüzleri 1'den 6'ya kadar numaralanmış bir zar atılırsa, üste 1, 2, 3, 4, 5, 6 numaralı yüzlerden biri gelir. Bu zar atma eylemine **deney**; bu deneyde elde edilecek sonuçlara (üst yüze gelecek sayılara) **çıkan**lar adı verilir.

Bir deneyde bütün çıkanların kümesine **örnek uzayı** denir.

Örnek uzayı **E** ile gösterilir. Zar atma deneyinde örnek uzayı, E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dir.

Örnek – 5.34

Bir yazı tura oyununda yazı gelmesi Y, tura gelmesi T ile gösterilirse; bu deneye ait örnek uzayı,

E = {Y, T} olur.

Örnek – 5.35

Temel eğitimini yapan Mehmet yedek subaylığını yapmak için, A, B, C, D şehirlerinden birine kura ile gönderilecektir.

Kura çekme deneyinde örnek uzayı,

E = {A, B, C, D} olur.

Örnek – 5.36

Bir madeni paranın 2 kez atılması deneyinde örnek uzayı,

E = {(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)} olur.

Burada, örneğin (Y, T) ikilisi, ilk atışta yazı, ikinci atışta tura çıktığını anlatır.

Örnek uzayının eleman sayısı, bu elemanları tek tek yazarak bulunabildiği gibi çarpma kuralı ile de bulunabilir.

Örnek uzayının eleman sayısının büyük olduğu durumlarda, çarpma kuralı tercih edilir.

Örnek – 5.37

Bir madeni para ile bir zarın birlikte atıldığı deneyde; para için 2 seçenek, zar için 6 seçenek olduğundan, örnek uzayının eleman sayısı

$s(E) = 2 \cdot 6 = 12$ olur.

Bu deneyde E örnek uzayı,

E = {(Y, 1), (Y, 2), (Y, 2), (Y, 4), (Y, 5), (Y, 6),
(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)} dir.

Örnek – 5.38

İki zarın birlikte atıldığı deneyde; her bir zar için 6 seçenek olduğundan, örnek uzayının eleman sayısı

$s(E) = 6 \cdot 6 = 36$ olur.

Olay

Örnek uzayının alt kümelerinden her birine **olay** denir.

Örneğin,

zarın atılması deneyinde 5'ten küçük çıkanların kümesi bir olaydır. Bu olayı A ile gösterirsek,

A = {1, 2, 3, 4} olur.

Boş kümeye **imkânsız olay**, örnek uzayına **kesin olay** adı verilir.

A ile B, E örnek uzayında iki olay olsun.
$A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olaylarına **ayrık olaylar** denir.

Örneğin, zarın atılması deneyinde 2'den büyük tek sayı gelme olayı A, 5'ten küçük çift sayı gelme olayı B olsun.

A = {3, 5} ve B = {2, 4} olup A ve B olayları ayrık olaylardır.

Örnek – 5.39

İki madeni paranın atılması deneyinde paralardan birinin yazı, diğerinin tura gelmesi olayı,

A = {(Y, T), (T, Y)} dir.

Örnek – 5.40

İki zarın atılması deneyinde iki zarın da aynı sayı gelme olayı,

A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} dır.

Örnek – 5.41

Caner ile Tümer; A, B, C okullarından herhangi birine girme hakkını kazanmışlardır.
a. Caner ile Tümer'in bu okullara girmeleri deneyine ait örnek uzayını yazınız.

b. Caner ile Tümer'in aynı okula girmeleri olayını yazınız.

c. Caner ile Tümer'in farklı okullara girmeleri olayını yazınız.

d. Caner ile Tümer'in bu okullara girmeleri olayını yazınız.

Çözüm

a. İkililerin birinci elemanları Caner'in girdiği okulu, ikinci elemanları Tümer'in girdiği okulu göstermek üzere; örnek uzayı,

E = {(A, A), (A, B), (A, C), (B, A), (B, B), (B, C), (C, A), (C, B), (C, C)} olur.

b. K = {(A, A), (B, B), (C, C)} dir.

c. F = {(A, B), (A, C), (B, A), (B, C), (C, A), (C, B)} dir.

d. Caner ile Tümer'in bu okullara girmeleri olayına G dersek, G = E olur. G, kesin olaydır.

Bir Olayın Olasılığı

Bir **A olayının olasılığı**, A kümesinin eleman sayısının örnek uzayının eleman sayısına oranıdır.

A olayının olasılığı O(A) ile gösterilir.

$$\mathbf{O(A)} = \frac{\mathbf{s(A)}}{\mathbf{s(E)}} \text{ dir.}$$

$\emptyset \subset A \subset E$ olduğundan $0 \le s(A) \le s(E)$ olur.

Buna göre, $\mathbf{0 \le O(A) \le 1}$ dir.

İmkânsız olayın ($A = \emptyset$) olasılığı **sıfır**;

Kesin olayın (A = E) olasılığı **1**'dir.

Örnek – 5.42

Bir madeni para havaya atıldığında, tura gelmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm

Bir madeni para havaya atıldığında örnek uzayı,

$E = \{Y, T\}$ dir.

İstenen olay $A = \{T\}$ olduğundan, bunun olasılığı

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \Rightarrow O(A) = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Uyarı !

"Bir madeni para havaya atıldığında yazı gelme olasılığı, tura gelme olasılığına eşit ve $\frac{1}{2}$ dir." demek; "Bir madeni parayı 2 kez havaya attığınızda birinde yazı, diğerinde tura gelir." demek değildir.

Bu deneyi 10 kez yapsanız 10'unda da tura gelebilir. Ancak; **olasılık kuramı**, deney sayısı arttıkça gelen yazı sayısının, gelen tura sayısına yakın olacağını öngörür.

Siz sınıfınızda bu deneyi yapınız. Her biriniz bir madeni parayı 10'ar kez atarak, çıkanları yazınız. Çıkan yazı sayıları ile tura sayılarını ayrı ayrı toplayarak karşılaştırınız.

"Kesinlikle" demiyoruz ama, bu toplamların birbirine yakın sayılar olduğunu ve olasılık kuramının doğrulandığını göreceksiniz.

"Bir madeni parayı 10 kez havaya atsanız, 10'unda da tura gelebilir." ifadesi, olasılık kuramının önemini azaltıyor gibi görünebilir.

Böyle olup olmadığına, aşağıdaki örneği inceledikten sonra karar veriniz.

Örnek – 5.43

Bir arkadaşınız 5 yüzü siyaha, 1 yüzü beyaza boyanmış olan hilesiz bir zarı havaya atıp,

"Beyaz gelirse sinema biletlerinin parasını ben ödeyeceğim. Siyah gelirse sen ödersin."

derse, bunu kabul eder misiniz?

Çözüm

Belki, zar 10 kez atılsa, 10'unda da beyaz gelecektir. Ancak, zarın siyah gelme olasılığının, beyaz gelme olasılığından yüksek olduğu, apaçıktır.

Bu durumda, biletlerin parasını ödemek için istekli değilseniz, bunu kabul etmezsiniz.

Zarın siyah gelme ve beyaz gelme olasılıklarını ayrı ayrı bulalım:

Zarın beyaz yüzünü b, siyah yüzlerini S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 ile gösterirsek, örnek uzayı,

$E = \{b, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$;

Beyaz gelme olayı $B = \{b\}$;

Siyah gelme olayı $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ olur.

Buna göre, zarın beyaz gelme olasılığı

$$O(B) = \frac{s(B)}{s(E)} \Rightarrow O(B) = \frac{1}{6} \; ;$$

siyah gelme olasılığı

$$O(S) = \frac{s(S)}{s(E)} \Rightarrow O(S) = \frac{5}{6} \text{ dır.}$$

Örnek – 5.44

Bir zar atıldığında, üst yüze 3'ten küçük bir sayı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm

Örnek uzayı, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve

3'ten küçük gelme olayı, $A = \{1, 2\}$ olup bu olayın olasılığı,

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \Rightarrow O(A) = \frac{2}{6} \Rightarrow O(A) = \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

Örnek – 5.45

Bir torbada 2 sarı, 3 kırmızı bilye vardır. Çekilen bir bilyenin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

Sarı bilyeler s_1, s_2 ve kırmızı bilyeler k_1, k_2, k_3 ile gösterilirse; örnek uzayı,

$E = \{s_1, s_2, k_1, k_2, k_3\}$ ve kırmızı gelme olayı,

$A = \{k_1, k_2, k_3\}$ olur.

Buna göre, kırmızı gelme olasılığı

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \Rightarrow O(A) = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

Uyarı !

Zar atma deneyinde örnek uzayı,

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dır. Zarın yüzleri, üzerlerindeki sayılar dışında özdeş olduklarından, çıkanların olasılıkları eşittir.

Çıkanlarının olasılıkları eşit olan örnek uzayına **eş olumlu örnek uzayı** denir.

Bir kibrit kutusunun yüzlerini 1'den 6'ya kadar numaralayıp rastgele atma deneyleri yaparsanız, kutunun genellikle geniş yüzleri üzerine oturduğunu görürsünüz. Bu deneylerin örnek uzayının çıkanlarının olasılıkları eşit olmaz.

Bu bölümde bizim konumuz eş olumlu örnek uzaylarıdır.

Bir A olayının olasılığı için verdiğimiz,

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \text{ tanımı,}$$

yalnız eş olumlu E örnek uzayı için geçerlidir.

Örnek – 5.46

İki madeni para atıldığında;

a. İkisinin de dik durma olasılığı kaçtır?

b. En az birinin yazı veya en az birinin tura gelme olasılığı kaçtır?

c. Yalnız birinin yazı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm

a. İki madeni para atıldığında örnek uzayı,

$E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$ dir.

Deneyin çıkanları içinde iki paranın da dik durduğu bir çıkan yoktur. (ya da, böyle olacağı öngörülmemiştir.)

Buna göre; bu olayı A ile adlandırırsak, $A = \varnothing$ olup bu olay imkânsız olaydır.

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \Rightarrow O(A) = \frac{0}{4} \Rightarrow O(A) = 0 \text{ olur.}$$

b. Deneyin, paralardan en az birinin yazı veya en az birinin tura geldiği çıkanlarının kümesi,

$B = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$ olup bu küme örnek uzayına eşittir.

Buna göre, B olayı kesin olaydır ve bunun olasılığı,

$$O(A) = \frac{s(B)}{s(E)} \Rightarrow O(B) = \frac{4}{4} \Rightarrow O(B) = 1 \text{ dir.}$$

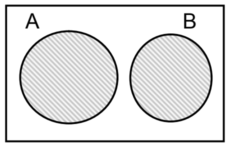
c. Deneyin, paralardan yalnız birinin yazı geldiği çıkanlarının kümesi, $C = \{(Y, T), (T, Y)\}$ dir.

C olayının olasılığı,

$$O(C) = \frac{s(C)}{s(E)} = \frac{2}{4} \Rightarrow O(C) = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Ayrık Olayların Olasılığı

A ile B, E örnek uzayının ayrık iki olayı olsun. Ayrık olaylardan en çok biri gerçekleşebilir.



Biz, $A \cap B = \varnothing$ olduğunu dikkate alarak, $A \cup B$ olayının olasılığını bulacağız.

"$A \cup B$ olayının olasılığı"nın "(A veya B) olayının olasılığı" demek olduğu açıktır.

A ile B ayrık iki küme ise,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ dir.

Her terim s(E) ile bölünürse,

$$\frac{s(A \cup B)}{s(E)} = \frac{s(A)}{s(E)} + \frac{s(B)}{s(E)} \Rightarrow O(A \cup B) = O(A) + O(B)$$

bulunur.

Buna göre;

Ayrık olayların birleşimlerinin olasılığı, bu olayların ayrı ayrı olasılıklarının toplamına eşittir.

A ile B ayrık iki olay ise;

O(A veya B) $= O(A \cup B) = O(A) + O(B)$ dir.

Örnek – 5.47

İki basamaklı doğal sayıların her biri ayrı bir kağıt parçasına yazılarak bir torbaya atılıyor.

Çekilen bir sayının 50'den küçük bir tek sayı veya 50'den büyük bir çift sayı olması olasılığı kaçtır?

Çözüm

I. yol

Çekilen sayının 50'den küçük tek sayı olması olayı A; 50'den büyük çift sayı olması olayı B olsun.

$$s(A)=\frac{49-11}{2}+1=20\ ;\ s(B)=\frac{98-52}{2}+1=24$$

ve deneyin örnek uzayının eleman sayısı,

$s(E)=(99-10)+1=90$ dır.

A ile B ayrık olaylar olduğundan

$$O(A\cup B)=O(A)+O(B)\Rightarrow O(A\cup B)=\frac{20}{90}+\frac{24}{90}$$

$$\Rightarrow O(A\cup B)=\frac{22}{45}\ \text{olur.}$$

II. yol

Çekilen sayının 50'den küçük tek sayı veya 50' den büyük çift sayı olması olayı K olsun.

50'den küçük tek sayılar 20 tane, 50'den büyük çift sayılar 24 tane olduğundan, $s(K) = 44$ olur.

Örnek uzayının eleman sayısı $s(E) = 90$ olduğundan,

$$O(K)=\frac{s(K)}{s(E)}\Rightarrow O(K)=\frac{44}{90}\Rightarrow O(K)=\frac{22}{45}$$

bulunur.

Uyarı !

A ile B olayları ister ayrık olsun ister olmasın,

$A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kolayca bulunabiliyorsa; O(A) ve O(B) olasılıklarını ayrı ayrı bulmanıza gerek yoktur. Böyle durumlarda

$$O(A\cup B)=\frac{s(A\cup B)}{s(E)}\ \text{formülünü kullanınız.}$$

Ayrık olaylar için, $O(A \cup B) = O(A) + O(B)$ formülü, bize ileride daha karmaşık problemleri çözmek için gerekecektir.

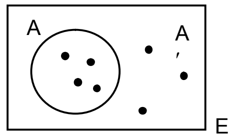
Bir Olayın Olmama Olasılığı

Bir E örnek uzayında bir A olayının dışındaki çıkanların kümesi, A olayının olmaması olayıdır.

Bu olay "**A′**" ile gösterilir.

$A \cup A' = E$ ve

$A \cap A' = \varnothing$ dir.



A ile A′ ayrık olaylar olduklarından,

$A \cup A' = E \Rightarrow s(A) + s(A') = s(E)$ dir.

Her terim s(E) ile bölünürse,

$$\frac{s(A)}{s(E)}+\frac{s(A')}{s(E)}=\frac{s(E)}{s(E)}\Rightarrow O(A)+O(A')=1\ \text{bulunur.}$$

Demek ki; bir olayın olasılığı ile bu olayın olmaması olasılığının toplamı 1'dir.

Ya da; bir olayın olmaması olasılığını bulmak için, bu olayın olasılığı 1'den çıkarılır.

O(A′) = 1 – O(A) dır.

Örnek – 5.48

İki madeni para havaya atıldığında en az birinin tura gelmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm

Paralardan en az birinin tura gelmesi olayı A ise; ikisinin de yazı elmesi olayı A′ olur.

$O(A) = 1 – O(A')$ dır.

Paraların ikisinin de yazı geldiği çıkan 1 tane; örnek uzayın eleman sayısı da $s(E) = 2 \cdot 2 = 4$ olduğundan $O(A')=\frac{1}{4}$ olur.

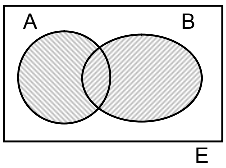
Buna göre; paralardan en az birinin tura gelmesi olasılığı,

$$O(A)=1-O(A')\Rightarrow O(A)=1-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow O(A)=\frac{3}{4}\ \text{bulunur.}$$

Ayrık Olmayan Olayların Olasılığı

A ile B, E örnek uzayının ayrık olmayan iki olayı olsun. $A \cup B$ olayının olasılığını bulacağız.



$A \cup B$ kümesinin eleman sayısının,

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olduğunu biliyorsunuz.

Bu eşitlikte her terim, örnek uzayının s(E) eleman sayısına bölünürse;

$$\frac{s(A \cup B)}{s(E)} = \frac{s(A)}{s(E)} + \frac{s(B)}{s(E)} - \frac{s(A \cap B)}{s(E)}$$

$\Rightarrow$ **$O(A \cup B) = O(A) + O(B) - O(A \cap B)$** bulunur.

$O(A \cup B)$, O(A veya B) anlamına;

$O(A \cap B)$, O(A ve B) anlamına gelir.

Örnek – 5.49

Bir torbada 2 kırmızı ve 1 sarı bilye vardır. Torbadan bir bilye çekilirken bir de madeni para atılıyor.

Bilyenin kırmızı veya paranın tura gelmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm

I. yol

Kırmızı bilyeleri k_1, k_2 ve sarı bilyeyi s; paranın yazı yüzünü Y ve tura yüzünü T ile gösterelim.

Bilyenin kırmızı gelmesi olayı A; paranın tura gelmesi olayı B olsun.

$A = \{(k_1, Y), (k_1, T), (k_2, Y), (k_2, T)\}$;

$B = \{(k_1, T), (k_2, T), (s, T)\}$;

$A \cap B = \{(k_1, T), (k_2, T)\}$;

$A \cup B = \{(k_1, Y), (k_1, T), (k_2, Y), (k_2, T), (s, T)\}$;

$E = \{(k_1, Y), (k_1, T), (k_2, Y), (k_2, T), (s, Y), (s, T)\}$

olur.

$O(A \cup B) = O(A) + O(B) - O(A \cap B)$

$\Rightarrow O(A \cup B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \Rightarrow O(A \cup B) = \frac{5}{6}$ bulunur.

II. yol

Bilyenin kırmızı veya paranın tura gelmesi olayı,

$A \cup B = \{(k_1, Y), (k_1, T), (k_2, Y), (k_2, T), (s, T)\}$

ve örnek uzayı,

$E = \{(k_1, Y), (k_1, T), (k_2, Y), (k_2, T), (s, Y), (s, T)\}$ dir.

$O(A \cup B) = \frac{s(A \cup B)}{s(E)} \Rightarrow O(A \cup B) = \frac{5}{6}$ bulunur.

Uyarı !

Örnek 5.46 nın çözümünde; A, B, $A \cup B$ ve E kümeleri yazıldıktan sonra,

$O(A \cup B) = O(A) + O(B) - O(A \cap B)$ formülü ile çö-zümü uzatmak yerine; doğrudan doğruya

$O(A \cup B) = \frac{s(A \cup B)}{s(E)}$ formülünü kullanmak daha akıllıca olur.

Ancak, olayları ve örnek uzayını tek tek yazmanın uzun zaman alacağı böyle problemlerde biz bu çözüm yollarını kullanmayacağız.

Yukarıdaki çözüm yolları bize sadece; A, B, $A \cap B$ ve $A \cup B$ olaylarının olasılıkları arasındaki bağıntıyı göstermesi bakımından yararlı oldu.

Gelecek sayfalarda, olayları ve örnek uzayını yazmadan bu olayların olasılıklarını bulmayı öğreneceksiniz. O zaman, şimdi işlemleri uzatıyor gibi görünen

$O(A \cup B) = O(A) + O(B) - O(A \cap B)$ formülü bize pratik çözümü verecektir. (Örnek 5.55, Örnek 5.56)

Örnek – 5.50

1'den 10'a kadar olan doğal sayıların her biri bir karta yazılarak bir torbaya konuluyor.

Torbadan rastgele çekilen bir sayının bir tek sayı veya bir asal sayı olması olasılığı kaçtır?

Çözüm

1'den 10'a kadar olan tek sayıların kümesi A, asal sayıların kümesi B olsun.

$A \cup B$ kümesi, A kümesine çift asal sayı olan 2'nin de katılması ile hemen yazılabilir.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ olur.

$s(E) = 10$ olduğundan,

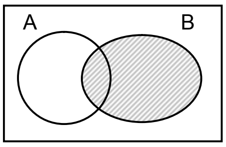
$$O(A \cup B) = \frac{s(A \cup B)}{s(E)} \Rightarrow O(A \cup B) = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow O(A \cup B) = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

Koşullu Olasılık

A ile B, E örnek uzayının iki olayı olsun. B olayının gerçekleşmiş olması koşuluyla A olayının olasılığına, **A olayının B koşullu olasılığı** denir.

A olayının B koşullu olasılığı, O(A / B) ile gösterilir.



$$\mathbf{O(A / B)} = \frac{\mathbf{O(A \cap B)}}{\mathbf{O(B)}} \text{ dir.}$$

$O(A \cap B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(E)}$ ve $O(B) = \dfrac{s(B)}{s(E)}$ olduğundan,

$$O(A / B) = \frac{O(A \cap B)}{O(B)} \Rightarrow O(A / B) = \frac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}}$$

$$\mathbf{O(A/B)} = \frac{\mathbf{s(A \cap B)}}{\mathbf{s(B)}} \text{ olur.}$$

Örnek – 5.51

Bir zar atılıyor. Bir tek sayı geldiği bilindiğine göre, bunun bir asal sayı olması olasılığı kaçtır?

Çözüm

Zarın asal sayı gelmesi olayı A, tek sayı gelmesi olayı B olsun. $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ ve $A \cap B = \{3, 5\}$ olduğundan,

$$O(A / B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} \Rightarrow O(A / B) = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Tek sayı gelen çıkanın asal olması olasılığı, $\dfrac{2}{3}$ tür.

Bağımsız Olaylar

A ile B, E örnek uzayının iki olayı olsun. A olayının gerçekleşmesi ya da gerçekleşmemesi B olayının olasılığını değiştirmiyorsa, A ve B olayları **bağımsız olaylardır**, denir.

Bağımsız olmayan olaylara **bağımlı olaylar** adı verilir.

Örnek – 5.52

Aşağıda verilen olayların bağımsız oldukları hemen görülebilir.

I. Bir madeni para iki kez atıldığında; birincide yazı, ikincide tura gelmesi olayları bağımsız olaylardır.
Birincide yazı gelmesi ya da gelmemesi, ikincide tura gelmesi olasılığını değiştirmez.

II. Bir zar iki kez atıldığında; birincide tek sayı, ikincide de tek sayı gelmesi olayları bağımsız olaylardır.

III. Bir zar ve bir madeni para atıldığında, zarın 3'ten küçük gelmesi ile paranın tura gelmesi olayları bağımsız olaylardır.

Yukarıdaki tarımın matematiksel anlatımı şöyledir:

A ile B, E örnek uzayının iki olayı olsun.
A olayının B koşullu olasılığı, A olayının olasılığına eşit ise; A ve B olayları **bağımsız olaylar**dır.

$O(A / B) = O(A)$ ise A ve B olayları bağımsızdır.

$$O(A / B) = O(A) \Rightarrow \frac{O(A \cap B)}{O(B)} = O(A)$$

$$\Rightarrow \mathbf{O(A \cap B) = O(A) \cdot O(B)} \text{ olur.}$$

Demek ki;

Bağımsız iki olayın ikisinin de gerçekleşmesi olasılığı, bu olayların ayrı ayrı olasılıklarının çarpımına eşittir.

Bu kuralın karşıtı da doğrudur.

Bir E örnek uzayının A ve B olayları için,
$O(A \cap B) = O(A) \cdot O(B)$
ise A ve B olayları bağımsızdır.

tanımı yapılabilir.

Örnek – 5.53

Bir madeni para iki kez atılıyor.

a. Birinci atışta yazı gelmesi olayını yazınız. Bu olayın olasılığını bulunuz.

b. İkinci atışta tura gelmesi olayını yazınız. Bu olayın olasılığını bulunuz.

c. Birinci atışta yazı gelmesi koşulu ile, ikinci atışta tura gelmesi olasılığını bulunuz.

d. Birinci atışta yazı gelmemesi koşulu ile, ikinci atışta tura gelmesi olasılığını bulunuz.

e. Birinci atışta yazı gelmesi ve ikinci atışta tura gelmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm

a. Deneyin örnek uzayı E, birinci atışta yazı gelmesi olayı A olsun.

$E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$ ve

$A = \{(Y, Y), (Y, T)\}$ olur.

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \Rightarrow O(A) = \frac{2}{4} \Rightarrow O(A) = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Birinci atışta yazı gelmesi olayını {Y} olarak almadığımıza dikkat ediniz. Çünkü, deneyde iki atış yapılmıştır. Çıkanlar, iki atışın çıkanlarını da içermelidir.

b. İkinci atışta tura gelmesi olayı B ise,

$B = \{(Y, T), (T, T)\}$ olur.

$$O(B) = \frac{s(B)}{s(E)} \Rightarrow O(B) = \frac{2}{4} \Rightarrow O(B) = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

c. Birinci atışta yazı gelmesi koşulu ile, ikinci atışta tura gelmesi olayının olasılığı, B olayının A koşullu olasılığıdır.

$A \cap B = \{(Y, T)\}$ olduğundan,

$$O(B / A) = \frac{s(A \cap B)}{s(A)} \Rightarrow O(B / A) = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$O(B / A) = O(B)$ olduğuna dikkat ediniz. Demek ki, A ve B olayları bağımsız olaylardır.

d. Birinci atışta yazı gelmemesi olayı A' olayıdır. Birinci atışta yazı gelmemesi koşulu ile ikinci atışta tura gelmesi olayının olasılığı, B olayının A' koşullu olasılığıdır.

$A' = \{(T, Y), (T, T)\}$ ve $A' \cap B = \{(T, T)\}$ olduğundan,

$$O(B / A') = \frac{s(A' \cap B)}{s(A')} \Rightarrow O(B / A') = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Dikkat ediniz! A olayının gerçekleşmesi ya da gerçekleşmemesi B olayının olasılığını değiştirmemiştir. Bu durum, A ve B olaylarının bağımsız oluşunun bir başka açıklamasıdır.

e. **<u>I. yol</u>**

Birinci atışta yazı ve ikinci atışta tura gelmesi olayı

$A \cap B = \{(Y, T)\}$ dir.

$$O(A \cap B) = \frac{s(A \cap B)}{s(E)} \Rightarrow O(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

<u>II. yol</u>

A ve B olayları bağımsız olaylar olduklarından,

$$O(A \cap B) = O(A) \cdot O(B) \Rightarrow O(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow O(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Örnek – 5.54

Bir zarın havaya atılması deneyinde,

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ ve $B = \{2, 5, 6\}$ olayları veriliyor.

a. A olayının olasılığını bulunuz.

b. A olayının B koşullu olasılığını bulunuz.

c. A ve B olayları bağımsız mıdır?

Çözüm

a. Bir zarın havaya atılması deneyinde örnek uzayı, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dır.

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ olduğuna göre,

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \Rightarrow O(A) = \frac{4}{6} \Rightarrow O(A) = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

"$A = \{1, 2, 3, 5\}$ olayının olasılığı" demek;

"Zar atıldığında 1, 2, 3, 5 çıkanlarından birinin gelmesi olasılığı" demektir.

b. $A \cap B = \{2, 5\}$ ve $B = \{2, 5, 6\}$ olduğundan,

$$O(A/B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)} \Rightarrow O(A/B) = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

"$A = \{1, 2, 3, 5\}$ olayının $B = \{2, 5, 6\}$ koşullu olasılığını bulunuz." demek;

"Zar atılmıştır ve 2, 5, 6 çıkanlarından birinin geldiği bilinmektedir. Bu çıkanın 1, 2, 3, 5 sayılarından birisi olması olasılığını bulunuz." demektir.

c. $O(A) = O(A/B) = \frac{2}{3}$ olduğundan, A ve B olayları bağımsız olaylardır.

Örnek – 5.55

Ceplerinizden birinde biri siyah, biri kırmızı 2 kalem; diğerinde biri 5 liralık, biri 10 liralık, biri 20 liralık 3 banknot bulunduğunu varsayınız.

a. Bir kalem çekerseniz, bunun siyah olması olasılığı kaçtır?

b. Bir banknot çekerseniz, bunun 20 liralık olması olasılığı kaçtır?

c. Bir kalem ve bir banknot çekerseniz, kalemin siyah olması olasılığı kaçtır?

d. Bir kalem ve bir banknot çekerseniz, banknotun 20 liralık olması olasılığı kaçtır?

e. Bir kalem ve bir banknot çekerseniz, kalemin siyah olması ve banknotun 20 liralık olması olasılığı kaçtır?

f. Bir kalem ve bir banknot çekerseniz, kalemin siyah veya banknotun 20 liralık olması olasılığı kaçtır?

Çözüm

a. Kalemleri s ve k ile gösterirsek; örnek uzayı,

$E_1 = \{s, k\}$ ve kalemin siyah olması olayı, $A = \{s\}$ olur.

$$O(A) = \frac{s(A)}{s(E_1)} \Rightarrow O(A) = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

b. Örnek uzayı, $E_2 = \{5, 10, 20\}$ ve banknotun 20 liralık olması olayı, $B = \{20\}$ olur.

$$O(B) = \frac{s(B)}{s(E_2)} \Rightarrow O(B) = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

c. Bir kalem ve bir banknot çekildiğinde örnek uzayı,

$E = \{(s, 5), (s, 10), (s, 20), (k, 5), (k, 10), (k, 20)\}$

ve kalemin siyah olması olayı,

$C = \{(s, 5), (s, 10), (s, 20)\}$ olur.

$$O(C) = \frac{s(C)}{s(E)} \Rightarrow O(C) = \frac{3}{6} \Rightarrow O(C) = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Dikkat ediniz!

Yalnız kalem çektiğinizde kalemin siyah gelmesi olasılığı ile, kalem ve banknot çektiğinizde kalemin siyah gelmesi olasılığı eşittir.

$$O(A) = O(C) = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

O hâlde; bundan sonra karşılaşacağımız problemlerde gereken durumlarda E örnek uzayındaki C olayının olasılığı yerine, E_1 örnek uzayındaki A olayının olasılığını alabiliriz.

d. Örnek uzayı,

$E = \{(s, 5), (s, 10), (s, 20), (k, 5), (k, 10), (k, 20)\}$

ve banknotun 20 liralık olması olayı,

$$O(D) = \frac{s(D)}{s(E)} \Rightarrow O(D) = \frac{2}{6} \Rightarrow O(D) = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

Burada da, $O(B) = O(D) = \frac{1}{3}$ olduğuna dikkat ediniz.

Gerektiği durumlarda, D olayının olasılığı yerine; hesaplanması daha kolay olan, B olayının olasılığını kullanabileceğiz.

e. I. yol

Örnek uzayı,

$E = \{(s, 5), (s, 10), (s, 20), (k, 5), (k, 10), (k, 20)\}$;

kalemin siyah ve banknotun 20 liralık olması olayı, $C \cap D = \{(s, 20)\}$ olur.

$$O(C \cap D) = \frac{s(C \cap D)}{s(E)} \Rightarrow O(C \cap D) = \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

II. yol

C ve D bağımsız olaylar olduğundan,

$$O(C \cap D) = O(C) \cdot O(D) \Rightarrow O(C \cap D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow O(C \cap D) = \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

Bundan sonra karşılaşacağımız problemlerde, E örnek uzayı ile C ve D olaylarını uzun uzun yazmayacağımız için, bu çözüm yolunu seçeceğiz.

C ve D olaylarının olasılıklarının yerine de A ve B olaylarının olasılıklarını kullanacağız.

f. I. yol

Örnek uzayı,

$E = \{(s, 5), (s, 10), (s, 20), (k, 5), (k, 10), (k, 20)\}$;

kalemin siyah veya banknotun 20 liralık olması olayı, $C \cup D = \{(s, 5), (s, 10), (s, 20), (k, 20)\}$ olur.

$$O(C \cup D) = \frac{s(C \cup D)}{s(E)} \Rightarrow O(C \cup D) = \frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow O(C \cup D) = \frac{2}{3} \text{ bulunur}$$

II. yol

C ve D olayları bağımsız olaylardır.

$$O(C \cup D) = O(C) + O(D) - O(C \cap D)$$

$$\Rightarrow O(C \cup D) = O(C) + O(D) - O(C) \cdot O(D)$$

$$\Rightarrow O(C \cup D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow O(C \cup D) = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek – 5.56

Bir zar ve bir madeni para atılıyor.

a. Zarın 3'ten küçük ve paranın tura gelmesi olasılığı kaçtır?

b. Zarın 3'ten küçük veya paranın tura gelmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm

a. Zar atma deneyinin örnek uzayının eleman sayısı 6; 3'ten küçük numaralı yüzlerin sayısı 2'dir.

Zarın 3'ten küçük gelmesi olayını 3 ile gösterirsek; bunun olasılığı,

$$O(3) = \frac{2}{6} \Rightarrow O(3) = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Paranın tura gelmesi olayını T ile gösterirsek; bunun olasılığı da $O(T) = \frac{1}{2}$ dir.

Zarın 3'ten küçük gelmesi olayı ile paranın tura gelmesi olayı bağımsız olaylardır.

O hâlde; zarın 3'ten küçük ve paranın tura gelmesi olasılığı,

$$O(3 \text{ ve } T) = O(3) \cdot O(T)$$

$$\Rightarrow O(3 \text{ ve } T) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow O(3 \text{ ve } T) = \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

b. $O(3 \text{ veya } T) = O(3) + O(T) - O(3 \text{ ve } T)$

$$\Rightarrow O(3 \text{ veya } T) = O(3) + O(T) - O(3) \cdot O(T)$$

$$\Rightarrow O(3 \text{ veya } T) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow O(3 \text{ veya } T) = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Uyarı !

Örnek 5.53 ün çözümünde 3 ile gösterilen olayın {1, 2} olmadığına; T ile gösterilen olayın {T} olmadığına dikkat ediniz.

Böyle olsaydı; (3 ve T) anlamına gelen $3 \cap T$ kümesi,

$3 \cap T = \{1, 2\} \cap \{T\} \Rightarrow 3 \cap T = \varnothing$ ve

$O(3 \cap T) = 0$ olurdu.

(3 veya T) anlamına gelen $3 \cup T$ kümesi de,

$3 \cup T = \{1, 2\} \cup \{T\} \Rightarrow 3 \cup T = \{1, 2, T\}$ olup, çözümle ilgili bir anlam ifade etmezdi.

Burada; 3 ile gösterilen olay,

$3 = \{(1, Y), (2, Y), (1, T), (2, T)\}$ olayı;

T ile gösterilen olay,

$T = \{(1, T), (2, T)\}$ olayıdır.

3 olayının olasılığı, zar atma deneyindeki {1, 2} olayının olasılığına; T olayının olasılığı da, para atma deneyindeki {T} olayının olasılığına eşittir. (Örnek 5.52)

Biz buna dayanarak, 3 olayının olasılığı yerine {1, 2} olayının olasılığını; T olayının olasılığı yerine {T} olayının olasılığını aldık.

Böylece; 3 ve T olaylarını uzun uzun yazarak, bunların olasılığını hesaplama zahmetinden kurtulmuş olduk.

Örnek – 5.57

İki torbadan I. sinde 2 sarı, 1 kırmızı; II. sinde 3 sarı, 2 mavi bilye vardır. Torbalardan birer bilye çekiliyor.

a. I. den çekilenin kırmızı ve II. den çekilenin sarı olması olasılığı kaçtır?

b. I. den çekilenin sarı veya II. den çekilenin mavi olması olasılığı kaçtır?

c. İkisinden çekilenin de aynı renk olmaları olasılığı kaçtır?

d. Çekilen bilyelerin farklı renkte olmaları olasılığı kaçtır?

Çözüm

a. I. den çekilenin kırmızı olması olayı K, II. den çekilenin sarı olması olayı S olsun.

$O(K) = \frac{1}{3}$ ve $O(S) = \frac{3}{5}$ tir.

K ve S olayları bağımsız olduğundan,

$O(K \cap S) = O(K \text{ ve } S) = O(K) \cdot O(S)$

$\Rightarrow O(K \cap S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow O(K \cap S) = \frac{1}{5}$ olur.

b. I. den çekilenin sarı olması olayı S, II. den çekilenin mavi olması olayı M olsun.

$O(S) = \frac{2}{3}$ ve $O(M) = \frac{2}{5}$ tir.

S ve M olayları bağımsız olduğundan,

$O(S \cup M) = O(S) + O(M) - O(S) \cdot O(M)$

$\Rightarrow O(S \text{ veya } M) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$

$\Rightarrow O(S \text{ veya } M) = \frac{12}{15} \Rightarrow O(S \text{ veya } M) = \frac{3}{5}$ olur.

c. İki torbadan çekilenin de aynı renk olması, bunların sarı olması demektir.

I. torbadan çekilenin sarı olması olayı S_1, II. torbadan çekilenin sarı olması olayı S_2 olsun.

$O(S_1) = \frac{2}{3}$ ve $O(S_2) = \frac{3}{5}$ tir.

S_1 ve S_2 olayları bağımsız olduğundan,

$O(S_1 \text{ ve } S_2) = O(S_1) \cdot O(S_2)$

$\Rightarrow O(S_1 \text{ ve } S_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

$\Rightarrow O(S_1 \text{ ve } S_2) = \frac{2}{5}$ olur.

d. Çekilen bilyelerin farklı renkte olmaları olayı, bunların aynı renkte olmamaları olayıdır.

Çekilen bilyelerin aynı renkte olmaları olayı A ise, farklı renkte olmaları olayı A′ olur.

A olayının olasılığı (**c.**) maddesindeki gibi,

$O(A) = \frac{2}{5}$ olarak bulunur.

$O(A') = 1 - O(A) \Rightarrow O(A') = 1 - \frac{2}{5}$

$\Rightarrow O(A') = \frac{3}{5}$ olur.

Örnek – 5.58

İki madeni para birlikte havaya atılıyor.

a. İkisinin de aynı gelmesi olasılığı kaçtır?

b. Birinin yazı, birinin tura gelmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm

a. Paraların ikisinin de yazı veya ikisinin de tura gelmesi olasılığını bulacağız.

I. paranın yazı gelmesi olayı Y_1, tura gelmesi olayı T_1;

II. paranın yazı gelmesi olayı Y_2, tura gelmesi olayı T_2 olsun.

$O(Y_1 \text{ ve } Y_2) = O(Y_1) \cdot O(Y_2)$

$\Rightarrow O(Y_1 \text{ ve } Y_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow O(Y_1 \text{ ve } Y_2) = \frac{1}{4}$;

$O(T_1 \text{ ve } T_2) = O(T_1) \cdot O(T_2)$

$\Rightarrow O(T_1 \text{ ve } T_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow O(T_1 \text{ ve } T_2) = \frac{1}{4}$ olur.

(Y_1 ve Y_2) ile (T_1 ve T_2) olayları ayrık olaylardır.

Buna göre,

$O(Y_1\, Y_2 \text{ veya } T_1\, T_2) = O(Y_1\, Y_2) + O(T_1\, T_2)$

$\Rightarrow O(Y_1\, Y_2 \text{ veya } T_1\, T_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow O(Y_1\, Y_2 \text{ veya } T_1\, T_2) = \frac{1}{2}$ bulunur.

b. Paraların birincisi yazı, ikincisi tura veya birincisi tura, ikincisi yazı gelebilir.

$O(Y_1 \text{ ve } T_2) = O(Y_1\, T_2) = O(Y_1) \cdot O(T_2)$

$\Rightarrow O(Y_1\, T_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow O(Y_1 T) = \frac{1}{4}$;

$O(T_1\, Y_2) = O(T_1) \cdot O(Y_2)$

$\Rightarrow O(T_1\, Y_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow O(T_1\, Y_2) = \frac{1}{4}$ olur.

$Y_1\, T_2 = \{(Y, T)\}$ ve $T_1\, Y_2 = \{(T, Y)\}$ olayları ayrık olaylar olduğundan,

$O(Y_1\, T_2 \text{ veya } T_1\, Y_2) = O(Y_1\, T_2) + O(T_1\, Y_2)$

$\Rightarrow O(Y_1\, T_2 \text{ veya } T_1\, Y_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow O(Y_1\, T_2 \text{ veya } T_1\, Y_2) = \frac{1}{2}$ bulunur.

Bağımlı Olaylar

A ile B, E örnek uzayının iki olayı olsun. B olayının olasılığı A olayının gerçekleşmesi durumunda farklı, gerçekleşmemesi durumunda farklı oluyorsa; A ve B olayları **bağımlıdır**, denir.

A olayının gerçekleşmesi durumunda B olayının olasılığı; yani, B olayının A koşullu olasılığı,

$O(B / A) = \frac{O(A \cap B)}{O(A)}$ idi.

Bu eşitlikten,

$O(A \cap B) = O(A) \cdot O(B / A)$ elde edilir.

Buna göre,

Bağımlı iki olayın ikisinin de gerçekleşmesi olasılığı; birinin olasılığı ile, bunun gerçekleşmesi durumunda diğerinin olasılığının çarpımına eşittir.

$O(A \cap B) = O(A) \cdot O(B / A)$ formülü hem bağımlı olaylar, hem de bağımsız olaylar için geçerlidir.

Örnek – 5.59

Bir torbada 3 sarı, 5 mavi bilye vardır. Çekilen bilye geriye konulmamak koşuluyla art arda iki bilye çekiliyor.

a. İkisinin de mavi gelmesi olasılığı kaçtır?

b. İkisinin farklı renkte olması olasılığı kaçtır?

Çözüm

a. İlk çekişte mavi gelmesi olayı M_1, ikinci çekişte mavi gelmesi olayı M_2 olsun. $O(M_1) = \frac{5}{8}$ dir.

İlk çekişte mavi gelmesi koşuluyla, ikinci çekişte de mavi gelmesi olasılığı, (bir mavi eksildiği için)

$O(M_2 / M_1) = \frac{4}{7}$ olur.

$O(M_1 \cap M_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \Rightarrow O(M_1 \cap M_2) = \frac{5}{14}$ bulunur.

b. İlk çekişte sarı ve ikinci çekişte mavi gelmesi veya ilk çekişte mavi ikinci çekişte sarı gelmesi olasılığını bulacağız.
İlk çekişte sarı gelmesi olayı S_1, mavi gelmesi olayı M_1; ikinci çekişte sarı gelmesi olayı S_2, mavi gelmesi olayı M_2 olsun.

$O(S_1 \text{ ve } M_2) = O(S_1) \cdot O(M_2 / S_1)$

$\Rightarrow O(S_1\, M_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \Rightarrow O(S_1\, M_2) = \frac{15}{56}$;

$O(M_1\, S_2) = O(M_1) \cdot O(S_2 / M_1)$

$\Rightarrow O(M_1\, S_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \Rightarrow O(M_1\, S_2) = \frac{15}{56}$ olur.

$S_1\, M_2$ ve $M_1\, S_2$ olayları ayrık olaylardır.

Buna göre,

$O(S_1\, M_2 \text{ veya } M_1\, S_2) = O(S_1\, M_2) + O(M_1\, S_2)$

$O(S_1\, M_2 \text{ veya } M_1\, S_2) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56}$

$O(S_1\, M_2 \text{ veya } M_1\, S_2 = \frac{15}{28}$ bulunur.

Olasılık problemlerine örnekler vermeye devam edelim:

Örnek – 5.60

Aralarında Mehmet ile Zeynep'in de bulunduğu 6 kişi, bir sıradaki 6 koltuğa rastgele oturacaktır.

Mehmet ile Zeynep'in yan yana oturması olasılığı kaçtır?

Çözüm

6 kişinin 6 koltuğa oturması deneyinin örnek uzayı E; Mehmet ile Zeynep'in yan yana oturması olayı A olsun.

s(E), 6 kişinin bütün sıralanmalarının sayısı;

s(A), Mehmet ile Zeynep'in yan yana oldukları sıralanmaların sayısıdır.

$s(E) = 6!$ Ve $s(A) = 5! \cdot 2!$ olduğunu görünüz.

Buna göre,

$O(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \Rightarrow O(A) = \frac{5! \cdot 2!}{6!}$

$\Rightarrow O(A) = \frac{1}{3}$ bulunur.