5 Mayıs 2007

Fen Liseleri, Sosyal Bilimler Liseleri, Spor Liseleri, Anadolu Liseleri Öğretmenlerinin Seçme Sınavı

Matematik Soruları ve Çözümleri

56. Aşağıdakilerden hangisi verildiğinde $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri her zaman 1 olur?

A) $(p' \Leftrightarrow q) \equiv 1$ B) $(q \Rightarrow p) \equiv 1$ C) $(q' \Rightarrow p') \equiv 0$ D) $(p \wedge q') \equiv 0$

Çözüm 56

$p \Rightarrow q \equiv 1$ olması için , $(p \equiv 1 , q \equiv 1)$, $(p \equiv 0 , q \equiv 1)$, $(p \equiv 0 , q \equiv 0)$ olmalıdır.

A) $(p' \Leftrightarrow q) \equiv 1$ ise $(p \equiv 1 , q \equiv 1)$ için, $(1' \Leftrightarrow 1) \equiv 1$, $(0 \Leftrightarrow 1) \equiv 1$, $0 \equiv 1$

B) $(q \Rightarrow p) \equiv 1$ ise $(p \equiv 0 , q \equiv 1)$ için, $(1 \Rightarrow 0) \equiv 1$, $0 \equiv 1$

C) $(q' \Rightarrow p') \equiv 0$ ise $(p \equiv 0 , q \equiv 1)$ için , $(1' \Rightarrow 0') \equiv 0$, $(0 \Rightarrow 1) \equiv 0$, $1 \equiv 0$

D) $(p \wedge q') \equiv 0$ ise $(p \equiv 1 , q \equiv 1)$ için , $(1 \wedge 1') \equiv 0$, $(1 \wedge 0) \equiv 0$, $0 \equiv 0$

$(p \equiv 0 , q \equiv 1)$ için , $(0 \wedge 1') \equiv 0$, $(0 \wedge 0) \equiv 0$, $0 \equiv 0$

$(p \equiv 0 , q \equiv 0)$ için , $(0 \wedge 0') \equiv 0$, $(0 \wedge 1) \equiv 0$, $0 \equiv 0$

"D" seçeneği verildiğinde $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri her zaman 1 olur.

Not :

p	q	p Λ q	p V q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

57. A ve B, bir E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$s(A \cap B') + s(A') = s(E)$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisi her zaman doğrudur?

A) $A \cup B = E$ B) $A \subset B$ C) $B \subset A$ D) $A \cap B = \varnothing$

Çözüm 57

I. Yol

$s(A \cap B') + s(A') = s(E)$ olduğuna göre,

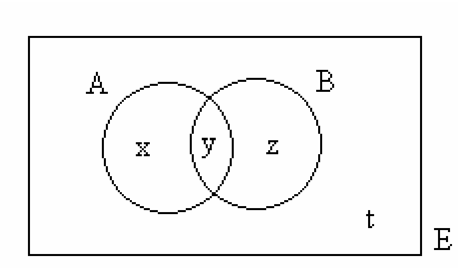
$s(A \cap B') = s(A) - s(A \cap B)$ ise yerine yazarsak,

$[s(A) - s(A \cap B)] + s(A') = s(E) \quad \Rightarrow \quad s(A) - s(A \cap B) + s(A') = s(E)$

$s(A) + s(A') = s(E)$ olduğundan, $s(E) - s(A \cap B) = s(E) \quad \Rightarrow \quad s(A \cap B) = 0$

$s(A \cap B) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cap B = \varnothing$ elde edilir.

II. Yol



$s(A \cap B') + s(A') = s(E)$

$s(A \cap B') = x$

$s(A') = z + t$

$s(E) = x + y + z + t$

$s(A \cap B') + s(A') = s(E)$ olduğuna göre, $x + z + t = x + y + z + t \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad s(A \cap B) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cap B = \varnothing$ elde edilir.

58. 1 ile 100 arasındaki tek doğal sayıların çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $100! + 2^{50}.50!$ B) $\dfrac{100!}{2^{49}.49!}$ C) $\dfrac{100!}{2^{50}.50!}$ D) $100! - 2^{50}.50!$

Çözüm 58

1 ile 100 arasındaki tek doğal sayıların çarpımı = 1.3.5.7. . . . .97.99

$$1.3.5.7.\ldots.97.99 = \frac{1.2.3.4......98.99.100}{2.4.6.8....98.100} = \frac{1.2.3.4.......99.100}{2.(2.2).(2.3).(2.4).....(2.49).(2.50)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1.2.3.4.......99.100}{2^{50}.(1.2.3.4....49.50)} = \frac{100!}{2^{50}.50!}$$

59. xy ve yx rakamları birbirinden farklı iki basamaklı doğal sayılar olmak üzere, xy^{yx} sayısının pozitif bölenlerinin sayısı en az kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 28

Çözüm 59

Pozitif bölenlerinin sayısı en az olması için, xy iki basamaklı sayısı asal sayı olmalıdır.
Bu durumda, yx sayısı da en az seçilmelidir.
Rakamları farklı iki basamaklı en küçük asal sayı 13 dür. (yx = 13)
$x = 3$, $y = 1$ $\Rightarrow$ 31^{13} sayısının pozitif bölenlerinin sayısı, 13 + 1 = 14 bulunur.

Not :

Bir sayının pozitif bölen sayısını bulmak için o sayı asal çarpanlarına ayrılır ve üslerinin birer fazlası alınıp çarpılır.
a , b , c birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere A doğal sayısı $A = a^m.b^n.c^p$ biçiminde ise A'nın (m + 1).(n + 1).(p + 1) tane pozitif böleni vardır.

60. $\left(-\frac{1}{27}\right)^{\frac{-2}{3}}$ üslü sayısının en sade şekli aşağıdakilerden hangisinde verilmiştir?

A) -9 B) $\frac{-1}{9}$ C) $\frac{1}{9}$ D) 9

Çözüm 60

$$\left(-\frac{1}{27}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left((-27)^{-1}\right)^{\frac{-2}{3}} = (-27)^{(-1).(\frac{-2}{3})} = (-27)^{\frac{2}{3}} = [(-1)^{\frac{2}{3}}.(27)^{\frac{2}{3}}] = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

61. $2\sqrt{2,5+\sqrt{6}} - (2,5 + \sqrt{6})$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{-1}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{2}$

Çözüm 61

I. Yol

$2\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} - (2{,}5 + \sqrt{6}) = \sqrt{2^2.(2{,}5+\sqrt{6})} - (2{,}5 + \sqrt{6}) = \sqrt{10+4\sqrt{6}} - (2{,}5 + \sqrt{6})$

$= \sqrt{6+4\sqrt{6}+4} - (2{,}5 + \sqrt{6}) = \sqrt{(\sqrt{6}+2)^2} - (2{,}5 + \sqrt{6}) = (\sqrt{6} + 2) - (2{,}5 + \sqrt{6})$

$= \sqrt{6} + 2 - 2{,}5 - \sqrt{6} = -\,0{,}5 = \dfrac{-1}{2}$ elde edilir.

II. Yol

$2\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} - (2{,}5 + \sqrt{6}) = ?$

$$\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Paydayı rasyonel yapalım. ($\sqrt{2}$ çarp , böl)

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right).\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}.(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$$

Verilen denklemde yerine yazalım.

$$2.\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right) - (2{,}5 + \sqrt{6}) = (\sqrt{6} + 2) - (2{,}5 + \sqrt{6}) = \sqrt{6} + 2 - 2{,}5 - \sqrt{6} = -\,0{,}5 = \frac{-1}{2}$$

Not : Paydanın rasyonel yapılması

Paydanın kökten kurtarılması için kök içindeki sayının üssü kök kuvvetine eşit olacak şekilde pay ve payda çarpılır.

Not : $a \pm 2\sqrt{b}$ ifadesinde b = x.y ve a = x + y olacak biçimde x , y $\in R^+$ varsa,

x > y olmak üzere , $a \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$

Buna göre, $\sqrt{a+2\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\sqrt{a-2\sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$ olur.

62. $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidine, (1 , 0 , 3) noktasında teğet olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x - y - z = 0$ B) $2x + z - 5 = 0$ C) $2x - y + z = 0$ D) $x - 2y + 1 = 0$

Çözüm 62

Verilen yüzeyin denklemi, $x^2 + y^2 + z - 4 = 0$ biçiminde yazılabilir.

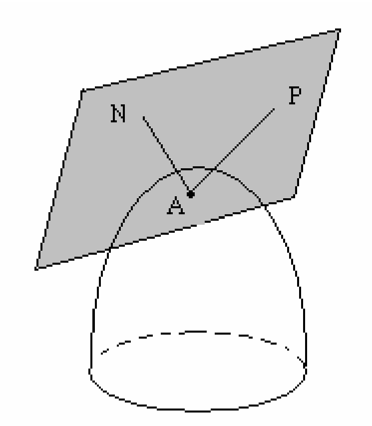
$f(x , y , z) = x^2 + y^2 + z - 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ için, } f'_x(1 , 0 , 3) = 2.1 = 2 \\ f'_y = 2y \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ için, } f'_y(1 , 0 , 3) = 2.0 = 0 \\ f'_z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 3 \text{ için, } f'_z(1 , 0 , 3) = 1 \end{array}\right\} \quad N = (2 , 0 , 1) \quad \text{(N, normali)}$$

Buna göre, teğet düzlemin denklemi,

$2.(x - 1) + 0.(y - 0) + 1.(z - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + z - 5 = 0$

Not :



S yüzeyi $F(x , y , z) = 0$ denklemi ile verilmiş olsun.

F fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri F'_x , F'_y ve F'_z olsun.

S yüzeyinin A(a , b , c) noktasındaki normal vektörü, $(\vec{N})_A = [F'_x , F'_y , F'_z]_A$ olur.

Düzlem içinde değişken bir P(x , y , z) noktası alınırsa, A(a , b , c) noktasındaki teğet düzleminin denklemi, AP vektörü ile normali (N), dik olacaklarından ($\overrightarrow{AP} \perp \vec{N}$) ,

$\overrightarrow{AP}.\vec{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad [(x - a) , (y - b) , (z - c)]. [F'_x , F'_y , F'_z]_A = 0$

$\Rightarrow \quad (F'_x)_A.(x - a) + (F'_y)_A.(y - b) + (F'_z)_A.(z - c) = 0$ olarak tanımlanır.

63. Parametrik denklemleri, x = 3 + λ , y = 2 + λ , z = 1 + nλ olan doğru ile x = 3 + k , y = 4 + k , z = 5 olan doğru arasındaki açının ölçüsü 60° ise n nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{6}$

Çözüm 63

Parametrik denklemleri, x = 3 + λ , y = 2 + λ , z = 1 + nλ olan doğrunun denklemi,

$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{n} \Rightarrow$ doğrultman vektörü, $\vec{v} = (1 , 1 , n)$

Parametrik denklemleri, x = 3 + k , y = 4 + k , z = 5 olan doğrunun denklemi,

$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1}$, z = 5 $\Rightarrow$ doğrultman vektörü, $\vec{u} = (1 , 1 , 0)$

$\vec{v} . \vec{u} = |\vec{v}|.|\vec{u}|.\cos 60 \Rightarrow (1 , 1 , n).(1 , 1 , 0) = \sqrt{1^2+1^2+n^2} . \sqrt{1^2+1^2+0} . \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1.1 + 1.1 + n.0 = \sqrt{n^2+2} . \sqrt{2} . \frac{1}{2} \Rightarrow 16 = (n^2 + 2).2 \Rightarrow n = \sqrt{6}$

64. $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ vektörleri R^3 de birim vektörlerdir.

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$ ve $\overrightarrow{BC} = -4\vec{e_1} + 7\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$ olduğuna göre, $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|$ kaç birimdir?

A) $8\sqrt{2}$ B) $\sqrt{62}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $\sqrt{29}$

Çözüm 64

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 4\vec{e_3} = (3 , -2 , 4)$

$\overrightarrow{BC} = -4\vec{e_1} + 7\vec{e_2} + 2\vec{e_3} = (-4 , 7 , 2)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = -\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 6\vec{e_3} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-1 , 5 , 6)$

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{62} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{62} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$

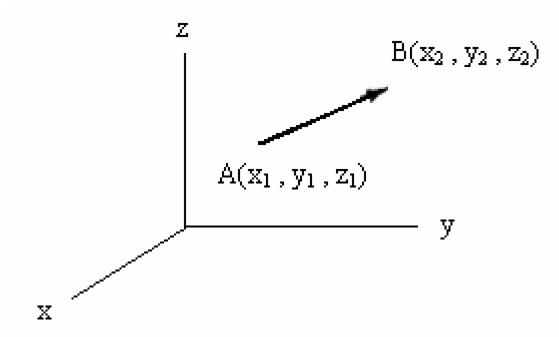
Not :

Başlangıç noktası = A(x_1 , y_1 , z_1)

Bitim noktası = B(x_2 , y_2 , z_2)

$\overrightarrow{AB}$ = ($x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$)

biçiminde bir sıralı ile gösterilir.



Not :

$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ sayısına $\vec{u}$ = (a , b , c) vektörünün boyu (normu) adı verilir.

Not : Lineer (doğrusal) bileşim

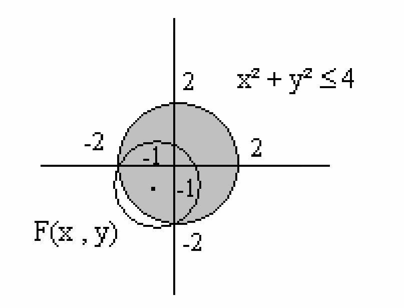
$\vec{u}$ = (x , y , z) = (x , 0 , 0) + (0 , y , 0) + (0 , 0 , z) = x.(1 , 0 , 0) + y.(0 , 1 , 0) + z.(0 , 0 , 1)

Yazılabildiğine göre, (x , y , z) = x.$\vec{e_1}$ + y.$\vec{e_2}$ + z.$\vec{e_3}$ olur. O halde her vektör $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ standart birim vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

65. Tanım kümesi $\{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 , x^2 + y^2 \leq 4\}$ olan ve $F(x , y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ ile verilen fonksiyonun alabileceği <u>en küçük</u> değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) $4 - 4\sqrt{2}$ C) $2 - 2\sqrt{3}$ D) 0

Çözüm 65



$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 2^2 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

(merkezi orjinde (0 , 0) , yarıçapı 2 birim olan çemberin iç bölgesi)

$F(x , y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad F(x , y) = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 - 2$

Burada F(x , y) fonksiyonunun en küçük değere sahip olması için,

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \\ y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \end{array}\right\} F(-1 , -1) = -2 \text{ elde edilir.}$$

66. g : N → N ve $n \geq 1$ olmak üzere g(n+1) = n.g(n) eşitliği sağlanıyor.

g(1) = 20 olduğuna göre, g(20) aşağıdakilerden hangisidir?

A) 18! B) 19! C) 20! D) 21!

Çözüm 66

g(n+1) = n.g(n) $\Rightarrow$ $\dfrac{g(n+1)}{g(n)} = n$

n = 19 için , $\dfrac{g(19+1)}{g(19)} = 19 \Rightarrow \dfrac{g(20)}{g(19)} = 19$

n = 18 için , $\dfrac{g(18+1)}{g(18)} = 18 \Rightarrow \dfrac{g(19)}{g(18)} = 18$

n = 17 için , $\dfrac{g(17+1)}{g(17)} = 17 \Rightarrow \dfrac{g(18)}{g(17)} = 17$

…………

…………

n = 2 için , $\dfrac{g(2+1)}{g(2)} = 2 \Rightarrow \dfrac{g(3)}{g(2)} = 2$

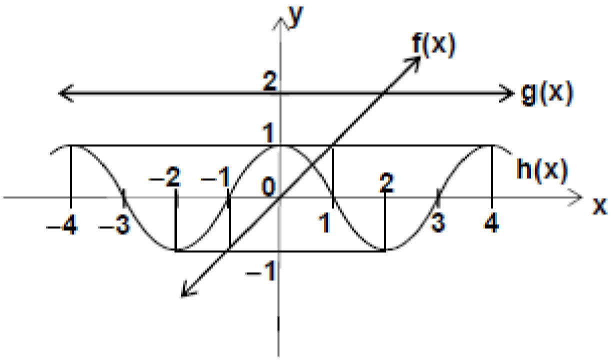
n = 1 için , $\dfrac{g(1+1)}{g(1)} = 1 \Rightarrow \dfrac{g(2)}{g(1)} = 1$

taraf tarafa çarpalım.

$$\frac{g(20)}{g(19)} . \frac{g(19)}{g(18)} . \frac{g(18)}{g(17)} \, . \, . \, . \, . \, . \, \frac{g(3)}{g(2)} . \frac{g(2)}{g(1)} = 19.18.17. \ldots \ldots .2.1 \Rightarrow \frac{g(20)}{g(1)} = 19!$$

g(1) = 20 olduğuna göre, $\dfrac{g(20)}{20} = 19! \Rightarrow$ g(20) = 20.19! $\Rightarrow$ g(20) = 20!

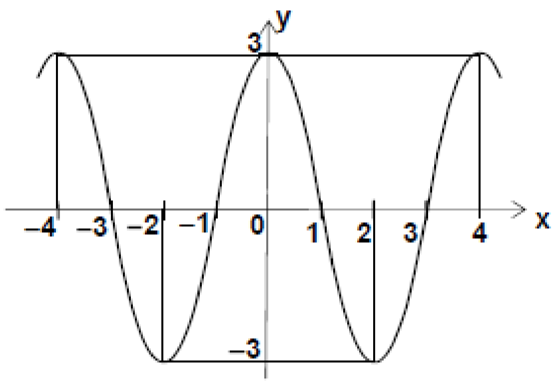
67.



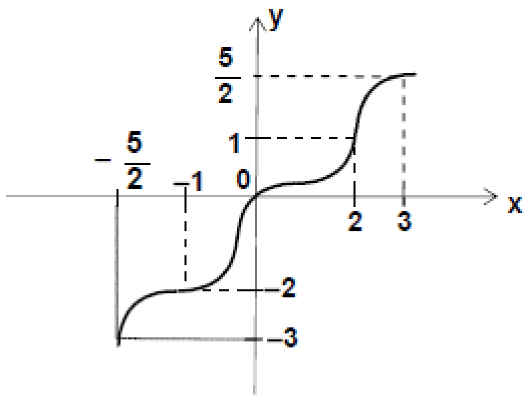
Verilen şekilde f , g ve h fonksiyonlarının grafikleri görülmektedir.

Buna göre, ((h o f) + g)(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

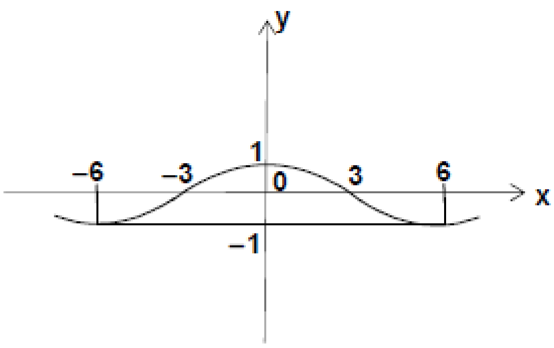
A)



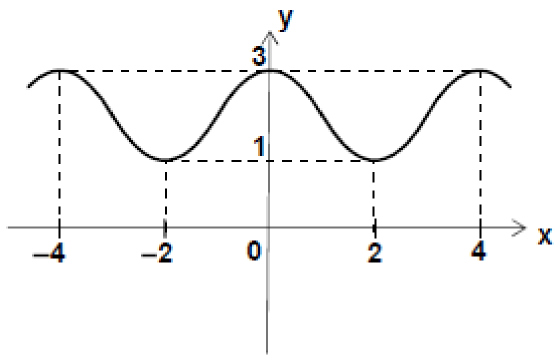
B)



C)



D)



Çözüm 67

Şekilde, $x = 1$ ve $y = 1$ olduğuna göre, $f(x) = x$ olur ve $g(x) = 2$ fonksiyonudur.

Buna göre, $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x)$ olur.

Bu duruma göre, $((h \circ f) + g)(x) = (h \circ f)(x) + g(x) = h(x) + 2$ olacaktır.

$(h(x) + 2)$ grafiği için ,

$x = 0$ için $h(0) + 2 = 1 + 2 = 3$ $(0 , 3)$

$x = 2$ için $h(2) + 2 = -1 + 2 = 1$ $(2 , 1)$

$x = 4$ için $h(4) + 2 = 1 + 2 = 3$ $(4 , 3)$

Bu değerler D seçeneğinde doğru olarak verilmektedir.

68. $R - \{-3\}$ kümesi üzerinde Δ işlemi $x \Delta y = 3x + 3y + xy + 6$ biçiminde tanımlanıyor. Bu işleme göre, 2 nin tersi kaçtır?

A) $\frac{-2}{3}$ B) -2 C) $\frac{-14}{5}$ D) -6

Çözüm 68

Önce birim elemanı bulalım.

$x \Delta e = x$ olacak şekilde bir "e" birim elemanının bulunması gerekir.

$x \Delta y = 3x + 3y + xy + 6 \Rightarrow x \Delta e = 3x + 3e + xe + 6 = x$

$\Rightarrow e.(3 + x) = -2x - 6 \Rightarrow e.(3 + x) = -2.(x + 3) \Rightarrow e = -2$ olur.

2 nin tersi için, $2 \Delta a = e = -2$ olacak şekilde a sayısını bulalım. (2 nin tersi = a olsun.)

$2 \Delta a = 3.2 + 3.a + 2.a + 6 = -2 \Rightarrow 5a = -14 \Rightarrow a = \frac{-14}{5}$ olarak bulunur.

69.

$$3^{\left(27^{669x-1}\right)} = 27^{\left(3^{2005x}\right)}$$

eşitliğini sağlayan x reel sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$

Çözüm 69

$$3^{\left(27^{669x-1}\right)} = 27^{\left(3^{2005x}\right)}$$

$$3^{\left(27^{669x-1}\right)} = \left(3^3\right)^{\left(3^{2005x}\right)}$$

$$3^{\left(27^{669x-1}\right)} = 3^{\left(3^{2005x+1}\right)}$$ $\Rightarrow$ tabanlar eşitse üsler eşit olacağına göre,

$$27^{669x-1} = 3^{2005x+1}$$

$$\left(3^3\right)^{669x-1} = 3^{2005x+1}$$

$$3^{3.(669x-1)} = 3^{2005x+1}$$ $\Rightarrow$ tabanlar eşitse üsler eşit olacağına göre,

$3.(669x - 1) = 2005x + 1 \Rightarrow 2007x - 3 = 2005x + 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

70. $t \in Z^+$ olmak üzere; S(x) polinomunun derecesi t + 1 , R(x) polinomunun derecesi 3t + 3 ve T(x) polinomunun derecesi 2t + 3 tür.

S(x) + R(x) + T(x) polinomunun derecesi 9 ve S(x) , $R^2(x).T(x)$ i tam bölüyorsa,

$\text{der}\left[\frac{R^2(x).T(x)}{S(x)}\right]$ kaçtır?

A) 22 B) 42 C) 56 D) 189

Çözüm 70

derece [S(x)] = t + 1

derece [R(x)] = 3t + 3

derece [T(x)] = 2t + 3

derece [S(x) + R(x) + T(x)] = 9 $\Rightarrow$ derecesi en büyük olan R(x) polinomu olacağına göre,

3t + 3 = 9 $\Rightarrow$ t = 2 olur.

derece [S(x)] = 2 + 1 = 3

derece [R(x)] = 3.2 + 3 = 9

derece [T(x)] = 2.2 + 3 = 7

$$\text{der}\left[\frac{R^2(x).T(x)}{S(x)}\right] = \text{der}\left[\frac{R(x).R(x).T(x)}{S(x)}\right] = \text{der}\,[R(x)] + \text{der}\,[R(x)] + \text{der}\,[T(x)] - \text{der}\,[S(x)]$$

$\Rightarrow$ 9 + 9 + 7 – 3 = 22 elde edilir.

Not :

m inci dereceden bir polinomla, n inci dereceden bir polinomun çarpımının (m + n) inci dereceden bir polinom olduğuna göre,

derece [P(x).Q(x)] = derece [P(x)] + derece [Q(x)] olur.

Not :

m inci dereceden bir polinomla, n inci dereceden bir polinomun bölümünün (m - n) inci dereceden bir polinom olduğuna göre,

derece $\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]$ = derece [P(x)] - derece [Q(x)] olur.

71. $x.y = 8$ ve $x^2 + y^2 = 26$ olduğuna göre, $x^4 + y^4$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 448 B) 548 C) 560 D) 660

Çözüm 71

$x^2 + y^2 = 26$ (her iki tarafın karesini alalım.)

$(x^2 + y^2)^2 = 26^2 \Rightarrow (x^2)^2 + 2.x^2.y^2 + (y^2)^2 = 676 \Rightarrow x^4 + 2.(x.y)^2 + y^4 = 676$

$x.y = 8$ olduğuna göre, $x^4 + 2.8^2 + y^4 = 676 \Rightarrow x^4 + y^4 = 676 - 128 = 548$

72. P(x) polinomunun $x^2 + 2$ ile bölünmesinden kalan $x + 2$ olduğuna göre, $P^2(x)$ polinomunun $x^2 + 2$ ile bölünmesinden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) x C) 2x + 4 D) 4x + 2

Çözüm 72

$P(x) = (x^2 + 2).B(x) + (x + 2)$ olacağına göre,

$P^2(x) = (x^2 + 2).C(x) + K(x)$

$P^2(x)$ polinomu için, P(x) polinomunun karesi alınır ve

$[x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -2] \quad \Rightarrow$ x^2 yerine -2 yazılırsa kalan elde edilir.

$P^2(x) = [(x^2 + 2).B(x) + (x + 2)]^2 \quad \Rightarrow$

$P^2(x) = [((x^2 + 2).B(x))^2 + 2.[((x^2 + 2).B(x)).(x + 2)] + ((x + 2))^2$

$$\left.\begin{aligned} &P^2(-2) = 0 + (-2 + 4x + 4) \quad \Rightarrow \quad P^2(-2) = 4x + 2 \\ &P^2(x) = (x^2 + 2).C(x) + K \quad \Rightarrow \quad P^2(-2) = 0 + K(x) \end{aligned}\right\} \text{K(x) = 4x + 2 elde edilir.}$$

73. Bir fabrikadaki günlük üretimin 0,60'ı A makinesinde, geri kalanı B makinesinde üretilmektedir.
A makinesinde üretilen parçaların 0,03'ü, B makinesinde üretilen parçaların 0,02'si kusurludur.
Bir günlük üretimin sonunda rastgele seçilen bir parçanın kusurlu olduğu görüldüğüne göre, bu parçanın B makinesinde üretilmiş olma olasılığı nedir?

A) $\frac{4}{13}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{6}{13}$ D) $\frac{9}{13}$

Çözüm 73

I. Yol

$$\frac{\frac{40}{100}.\frac{2}{100}}{\frac{60}{100}.\frac{3}{100}+\frac{40}{100}.\frac{2}{100}} = \frac{80}{180+80} = \frac{80}{260} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$$

II. Yol

Günlük 1000 parçanın üretildiğini varsayalım.

A makinesinde 1000.0,60 = 600 parça üretilmiştir.

B makinesinde 1000 – 600 = 400 parça üretilmiştir.

A makinesinde üretilen parçaların 0,03'ü kusurlu $\Rightarrow$ 600.0,03 = 18 tanesi kusurludur.

B makinesinde üretilen parçaların 0,02'si kusurlu $\Rightarrow$ 400.0,02 = 8 tanesi kusurludur.

Toplam kusurlu parça sayısı 18 + 8 = 26 tanedir.

Seçilen kusurlunun B makinesinde üretilen olması olasılığı = $\frac{8}{26} = \frac{4}{13}$

74. İki torbadan birincisinde 3 kırmızı, 2 siyah; ikincisinde ise 5 kırmızı, 10 siyah bilye vardır. Hilesiz bir zar atıldıktan sonra torbaların birinden bir bilye çekilecektir.

Zar atıldığında, tek sayı gelirse bilye birinci torbadan, çift sayı gelirse bilye, ikinci torbadan çekileceğine göre, çekilecek bilyenin kırmızı olma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{7}{15}$

Çözüm 74

Tek veya çift sayı gelme olasılığı = $\frac{1}{2}$

Tek sayı gelirse bilye birinci torbadan, kırmızı olma olasılığı = $\frac{1}{2}.\frac{3}{5}$

Çift sayı gelirse bilye ikinci torbadan, kırmızı olma olasılığı = $\frac{1}{2}.\frac{5}{15}$

Sonuç = $\frac{1}{2}.\frac{3}{5} + \frac{1}{2}.\frac{5}{15} = \frac{1}{2}.(\frac{3}{5} + \frac{5}{15}) = \frac{1}{2}.\frac{14}{15} = \frac{7}{15}$

75. $x \in R^+$ ve cos (arc tanx) = x olduğuna göre, x^2 aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Çözüm 75

cos (arc tanx) = x $\Rightarrow$ arc tanx = a olsun. $\Rightarrow$ cosa = x

arc tanx = a $\Rightarrow$ tan (arc tanx) = tana $\Rightarrow$ x = tana

x = cosa = tana $\Rightarrow$ cosa = $\dfrac{\sin a}{\cos a}$ $\Rightarrow$ sina = $\cos^2$a ($\sin^2A + \cos^2A = 1$)

$\Rightarrow$ sina = 1 – $\sin^2$a $\Rightarrow$ $\sin^2$a + sina – 1 = 0

sina = t olsun. $\Rightarrow$ $t^2 + t - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta = 1^2 - 4.1.(-1) = 5$ $\Rightarrow$ $t_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2.1} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

x = cosa $\Rightarrow$ $x^2 = \cos^2 a$ $\Rightarrow$ x^2 = sina

x^2 negatif sayı olamayacağına göre, $x^2 = t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ elde edilir.

76. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{(1,1)^x}$ limiti için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Limit 0 dır. B) Limit 1 dir. C) Limit 5 tir. D) Limit yoktur.

Çözüm 76

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{(1,1)^x} = \dfrac{(\infty)^5}{(1,1)^\infty} = \dfrac{\infty}{\infty}$ L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4}{(1,1)^x.\ln(1,1)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{20x^3}{(1,1)^x.\ln(1,1).\ln(1,1)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{60x^2}{(1,1)^x.\ln(1,1).\ln(1,1).\ln(1,1)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{120x}{(1,1)^x.\ln(1,1).\ln(1,1).\ln(1,1).\ln(1,1)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{120}{(1,1)^x.\ln(1,1).\ln(1,1).\ln(1,1).\ln(1,1).\ln(1,1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{120}{(1,1)^x.[\ln(1,1)]^5} = \frac{120}{(1,1)^\infty.[\ln(1,1)]^5} = \frac{120}{\infty} = 0$$

Not :

$y = a^u \Rightarrow y' = u'.a^u.\ln a$

77. $f : R \to R$, $f(x) = x^3 - x$ ile verilen fonksiyon için $(f^{-1})'(6)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{210}$ B) $\frac{1}{107}$ C) $\frac{1}{11}$ D) $\frac{1}{6}$

Çözüm 77

$y = f(x) \Rightarrow (f^{-1})(y) = x$

$(f^{-1})(6) = x \Rightarrow y = f(x) = 6 \Rightarrow x^3 - x = 6 \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$

$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(2)} \Rightarrow (f^{-1})'(6) = \frac{1}{3.2^2 - 1} \Rightarrow (f^{-1})'(6) = \frac{1}{11}$

78. $f, g : R \to R$, $f(x) = 3x$ ve $g(x) = \arctan x$ ise $(gof)'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{1+x^2}$ B) $\frac{3}{1+9x^2}$ C) $\frac{9}{1+27x^2}$ D) $\frac{1}{1+3x^2}$

Çözüm 78

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x \\ g(x) = \arctan x \end{array}\right\} (gof)(x) = g(f(x)) = \arctan(3x)$$

$(gof)'(x) = (\arctan(3x))' = \frac{(3x)'}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$

79. $f(x) = |x - 1|$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğru <u>değildir?</u>

A) x = 1 noktasında limiti vardır.

B) [0 , 2] aralığında integrallenebilirdir.

C) Sürekli bir fonksiyondur.

D) x =1 noktasında türevlenebilirdir.

Çözüm 79

A) x – 1 = 0 $\Rightarrow$ x = 1

		1	
x - 1	- - - - - -		+ + + + +

$$f(x) = |x - 1| \begin{cases} x < 1 \text{ için, } f(x) = -x + 1 \\ x > 1 \text{ için, } f(x) = x - 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(-x+1) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$$

B) $\int\limits_0^1 f(x) + \int\limits_1^2 f(x) = \int\limits_0^1 (-x+1) + \int\limits_1^2 (x-1)$ olacağına göre, [0 , 2] aralığında integrallenebilirdir.

C) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ = f(1) = 0 olduğuna göre, fonksiyon süreklidir.

D) x = 1 noktası kritik noktadır. Fonksiyonun eğimi değişmektedir.

$$f'(x) \begin{cases} x < 1 \text{ için, } f'(x) = -1 \\ x > 1 \text{ için, } f'(x) = 1 \end{cases}$$

-1 $\neq$ 1 olduğuna göre, x =1 noktasında türevlenebilir değildir. Türev yoktur.

80. $a_1 = \sqrt{2}$ ve n > 1 için $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinin limiti kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Çözüm 80

(a_n) dizisinin limiti "a" olsun. $\Rightarrow$ $(a_n) \to a$ $\Rightarrow$ $(a_{n+1}) \to a$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1})$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2-a_n})$ $\Rightarrow$ $a = \sqrt{2-a}$ ve buradan

$\Rightarrow$ $a^2 = 2 - a$ $\Rightarrow$ $a^2 + a - 2 = 0$ $\Rightarrow$ $(a - 1).(a + 2) = 0$ $\Rightarrow$ a = 1 bulunur.

O halde, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ elde edilir.

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ serisinin yakınsaklık aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2\ ,\ 2]$ B) $(-4\ ,\ 4]$ C) $(-2\ ,\ 2)$ D) $(-4\ ,\ 4)$

Çözüm 81

I. Yol

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{2^n}$ olduğundan,

yakınsaklık yarıçapı $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}\right|} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{2}\right|} = 2$ olur.

$|x| < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 2$ olur.

Şimdi, $x = -2$ ve $x = 2$ için serinin yakınsak olup olmadığına bakalım.

$x = -2$ için verilen seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ olur ki bu seri ıraksaktır.

$a_n = (-1)^n$ dizisinde,

$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots\ldots = a_{2n-1} = \ldots\ldots = -1$

$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots\ldots = a_{2n} = \ldots\ldots = 1$

olduğundan $(-1)^n$ dizisinin hemen her terimi -1 in yada 1 in her ε (epsilon) komşuluğunda değildir. Öyleyse, $(-1)^n$ dizisinin limiti yoktur. Buna göre, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ıraksaktır.

$x = 2$ için verilen seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots$ ıraksak serisi elde edilir.

O halde yakınsaklık aralığı, $(-2\ ,\ 2)$ olur.

II. Yol

$\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\leftarrow\infty}\left|\dfrac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}}\right| = \left|\dfrac{x}{2}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \dfrac{x}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 2$

Not :

$\sum c_k.(x-a)^k$ kuvvet serisinin $|x - a| < R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin "yakınsaklık yarıçapı" , seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa da "yakınsaklık aralığı" denir.

Not : Cauchy – Hadamard teoremi

$$\sum c_k.(x-a)^k \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_{k+1}}{c_k}\right|} \text{ olsun.}$$

$|x - a| < R$ için, seri yakınsak , $|x - a| > R$ için seri ıraksaktır.

Not :

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ serisi ise bazı x ler için yakınsak, bazıları içinde ıraksak olan kuvvet serisidir.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|$$

olduğundan $|x| < 1$ için $\sum x^k$ yakınsak , $|x| \geq 1$ için ıraksaktır.

82. $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+.....+\frac{1}{n.(n+2)}+.....$ toplamının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{6}$

Çözüm 82

$$\frac{1}{n.(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n.(n+2)}=\frac{A.(n+2)+B.n}{n.(n+2)} \quad \Rightarrow \quad \text{A.n + 2A + B.n = 1}$$

$$\Rightarrow \quad 2A + n.(A + B) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2A = 1 \ , \ A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = 0 \ , \ \frac{1}{2} + B = 0 \ , \ B = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{1}{n.(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}=\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{(\frac{-1}{2})}{n+2}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2.(n+2)}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{n.(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2.(n+2)}$ [(n = 2 , 3 , 4 , 5 , ...) değerlerini verelim.]

n = 2 için , $\frac{1}{2.(2+2)}=\frac{1}{2.2}-\frac{1}{2.(2+2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2.4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$

n = 3 için , $\frac{1}{3.(3+2)}=\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.(3+2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3.5}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$

n = 4 için , $\frac{1}{4.(4+2)}=\frac{1}{2.4}-\frac{1}{2.(4+2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4.6}=\frac{1}{8}-\frac{1}{12}$

n = 5 için , $\frac{1}{5.(5+2)}=\frac{1}{2.5}-\frac{1}{2.(5+2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5.7}=\frac{1}{10}-\frac{1}{14}$

. . . .

. . . . +

$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+.....+\frac{1}{n.(n+2)}+.....=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6+4}{6.4}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$ elde edilir.

83. $\int x^3.e^{x^2}dx$ belirsiz integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $e^{x^4}.(x^2 - 1) + C$ B) $e^{x^2}.(x - 1) + C$ C) $\dfrac{(x-1).e^x}{2} + C$ D) $\dfrac{(x^2-1).e^{x^2}}{2} + C$

Çözüm 83

$\int x^3.e^{x^2}dx \Rightarrow x^2 = t$ dönüşümü yapılırsa, $(x^2)' = t' \Rightarrow 2x\,dx = dt$, $dx = \dfrac{dt}{2x}$

$\int (x^2.x).e^{x^2}dx = \int t.x.e^t\dfrac{dt}{2x} = \dfrac{1}{2}.\int t.e^t dt$ (kısmi integrasyon yöntemi)

$t = u \Rightarrow dt = du$

$e^t.dt = dv \Rightarrow \int e^t.dt = \int dv \Rightarrow e^t = v$

$\dfrac{1}{2}.\int t.e^t dt = \dfrac{1}{2}.(t.e^t - \int e^t dt) = \dfrac{1}{2}.(t.e^t - e^t) = \dfrac{(t-1).e^t}{2} + c \Rightarrow \dfrac{(x^2-1).e^{x^2}}{2} + c$

Not : Kısmi (parçalı) integrasyon yöntemi

İki fonksiyonun çarpımının integralinin hesaplanmasında genelde, kısmi integrasyon yöntemi kullanılır.

u(x) ve v(x) türevlenebilir fonksiyonlar ise çarpımın türevi formülüne göre,

$(u.v)' = u'.v + v'.u$ yazarız.

Her iki tarafı dx ile çarpıp integrallersek, $\int (u.v)'dx = \int u'.v\,dx + \int v'.u\,dx$ bulunur.

Belirsiz integralin tanımından, $\int (u.v)'\,dx = u.v$ yazılabilir.

Bunu dikkate alarak, $u.v = \int u.v'\,dx + \int v.u'\,dx$ formülünü elde ederiz.

$u' = \dfrac{du}{dx} \Rightarrow u'\,dx = du$, $v' = \dfrac{dv}{dx} \Rightarrow v'\,dx = dv$ olduğundan,

$u.v = \int u\,dv + \int v\,du \Rightarrow \int u\,dv = u.v - \int v\,du$ elde edilir.

84. $\int_0^{\pi} x.f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}.\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ olduğuna göre, $\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{\cos^2 x}dx$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) −π B) −2 C) 2 D) π

Çözüm 84

$\int_0^{\pi} x.f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}.\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ $\Rightarrow$ x = $\frac{\pi}{2}$ (fonksiyondan bağımsız x'in değeri)

$\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{\cos^2 x}dx$ $\Rightarrow$ cosx = u dönüşümü yapalım. (cosx)' = (u)' $\Rightarrow$ -sinx dx = du

x = 0 için , cos 0 = 1

x = π için , cos π = -1

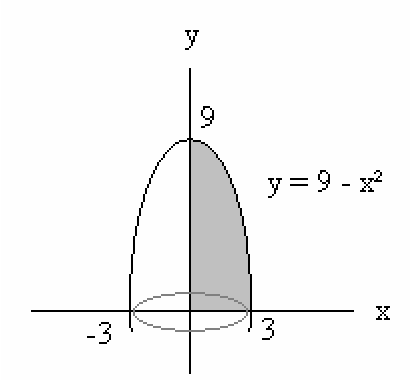
$$\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}.\int_1^{-1} \frac{\sin x}{u^2}\frac{du}{-\sin x} = \frac{-\pi}{2}.\int_1^{-1} \frac{1}{u^2}du = \frac{-\pi}{2}.[\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^{-1}] = \frac{\pi}{2}.[\frac{1}{u}\Big|_1^{-1}]$$

$$= \frac{\pi}{2}.[(\frac{1}{-1})-(\frac{1}{1})] = \frac{\pi}{2}.(-1-1) = \frac{\pi}{2}.(-2) = -\pi$$

85. y = 9 − x² eğrisiyle eksenlerin sınırladığı bölgenin, y ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

A) $\frac{9\pi}{2}$ B) 8π C) 10π D) $\frac{81\pi}{2}$

Çözüm 85



$y = 9 - x^2$

$x = 0$ için , $y = 9$

$y = 0$ için , $x = 3$, $x = -3$

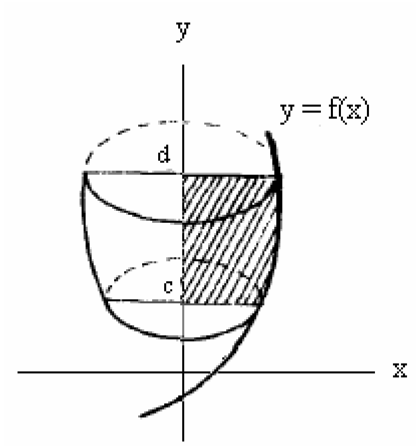
$y = 9 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 - y$

$$\text{Hacim} = \pi.\int_0^9 x^2\,dy$$

$$\text{Hacim} = \pi.\int_0^9 (9 - y)\,dy = \pi.[(9y - \frac{y^2}{2})\Big|_0^9\ ] = \pi.[(9.9 - \frac{9^2}{2}) - 0] = \pi.[(81 - \frac{81}{2})] = \frac{81.\pi}{2}$$

Not : y ekseni etrafında dönme

y = f(x) eğrisi ile y = c , y = d , x = 0 doğrularının belirttiği şekildeki taralı bölgenin y ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşacak dönel cismin hacmi ,



$$H = \pi.\int_c^d x^2\,dy \text{ birim küptür.}$$

86. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\int\limits_{x^3}^{x} e^{\frac{y}{x}}\,dy$ dx integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{\sqrt{e}}{2}-\dfrac{e}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt[4]{e}}{2}-\dfrac{e}{8}$ C) $\dfrac{e}{8}$ D) $\dfrac{\sqrt[4]{e}}{2}$

Çözüm 86

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\int\limits_{x^3}^{x} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,\mathrm{dx} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(\int\limits_{x^3}^{x} e^{\frac{y}{x}}\,dy\Big)\mathrm{dx}$$

$\dfrac{y}{x}$ = u dönüşümü yapılırsa $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x}$dy = du , dy = x.du

y = x için, u = $\dfrac{x}{x}$ = 1 , y = x^3 için, u = $\dfrac{x^3}{x}$ = x^2

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(\int\limits_{x^2}^{1} e^{u}.x.du\Big)\mathrm{dx} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(x.\int\limits_{x^2}^{1} e^{u}du\Big)\mathrm{dx} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(x.[e^{u}\Big|_{x^2}^{1}\Big)\mathrm{dx} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(x.[e^{1}-e^{x^2}])\mathrm{dx} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(x.(e-e^{x^2}))\mathrm{dx}$$

x^2 = t dönüşümü yapılırsa $\Rightarrow$ 2x.dx = dt $\Rightarrow$ dx = $\dfrac{dt}{2x}$

x = 1 için, t = 1 , x = $\dfrac{1}{2}$ için, t = $\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$

$$\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}(x.(e-e^{t}))\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}.\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}(e-e^{t})\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}.(e.t-e^{t})\Big|_{\frac{1}{4}}^{1} = \frac{1}{2}.[(e.1-e^{1})-(e.\frac{1}{4}-e^{\frac{1}{4}})]$$

$$= \frac{1}{2}.[0-(\frac{e}{4}-\sqrt[4]{e})] = \frac{1}{2}.[\sqrt[4]{e}-\frac{e}{4}] = \frac{\sqrt[4]{e}}{2}-\frac{e}{8} \text{ bulunur.}$$

87. $y' + 4xy = 4x$ diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 1 + c.e^{2x^2}$ B) $y = 1 + c.e^{-2x^2}$ C) $y = c.e^{2x^2}$ D) $y = c.e^{-2x^2}$

Çözüm 87

I. Yol

$y' + 4xy = 4x$ lineer diferansiyel denkleminde "sabitin değişimi yöntemi" kullanılırsa,

önce, $4x = 0$ alınır ve böylece elde edilen $y' + 4xy = 0$ diferansiyel denklemi integre edilirse,

$$y' + 4xy = 0 \Rightarrow y' = -4xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = -4x \Rightarrow \int \frac{y'}{y} = \int -4x \Rightarrow \ln y = -2x^2 + ç$$

$\Rightarrow y = e^{-2x^2+ç} \Rightarrow y = e^{ç}.e^{-2x^2}$ ($e^{ç}$, keyfi sabit olduğundan $e^{ç}$ yerine Ç yazarsak)

$\Rightarrow y = Ç.e^{-2x^2}$ bulunur.

Ç keyfi sabiti yerine Ç(x) fonksiyonu alınır ve böylece elde edilen $y = Ç(x).e^{-2x^2}$ fonksiyonu

$y' + 4xy = 4x$ diferansiyel denkleminde yerine konursa,

$$(Ç(x).e^{-2x^2})' + 4.x.(Ç(x).e^{-2x^2}) = 4x \Rightarrow [Ç(x)]'.e^{-2x^2} + [e^{-2x^2}]'.Ç(x) + 4.x.(Ç(x).e^{-2x^2}) = 4x$$

$$\Rightarrow Ç'(x).e^{-2x^2} - 4.x.e^{-2x^2}.Ç(x) + 4.x.(Ç(x).e^{-2x^2}) = 4x$$

$$\Rightarrow Ç'(x).e^{-2x^2} = 4x \Rightarrow Ç'(x) = 4x.e^{2x^2} \text{ elde edilir.}$$

$Ç'(x) = 4x.e^{2x^2}$ integrali alınırsa, $\int Ç'(x) = \int 4x.e^{2x^2}\,dx$ kısmi integrasyon uygulandığında,

$2x^2 = u$ dönüşümü yapılırsa $\Rightarrow 4x\,dx = du$

$$Ç(x) = \int 4x.e^{u} \frac{du}{4x} = e^{u} + c \Rightarrow Ç(x) = e^{2x^2} + c$$

Ç(x) fonksiyonu, $y = Ç.e^{-2x^2}$ de yerine yazılırsa,

$y = (e^{2x^2} + c).e^{-2x^2} \Rightarrow y = 1 + c.e^{-2x^2}$ bulunur.

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü, $y = 1 + c.e^{-2x^2}$ elde edilir.

II. Yol

$y' + 4xy = 4x$ lineer diferansiyel denkleminde, $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ olmak üzere,

$y = u.v$ dönüşümü yapılırsa,

$y' + 4xy = 4x \quad \Rightarrow \quad (u.v)' + 4x(u.v) = 4x \quad \Rightarrow \quad (u'.v + v'.u) + 4x.u.v = 4x$

$\Rightarrow \quad (u' + 4x.u).v + v'.u = 4x$

u fonksiyonu, $(u' + 4x.u) = 0$ olacak şekilde belirlenirse,

$u' = -4x.u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u} = -4x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{u'}{u} = \int -4x \quad \Rightarrow \quad \ln u = -2x^2 + ç \quad \Rightarrow \quad u = e^{-2x^2+ç}$

$\Rightarrow \quad u = e^{ç}.e^{-2x^2}$ ($e^{ç}$, keyfi sabit olduğundan $e^{ç}$ yerine Ç yazarsak)

$\Rightarrow \quad u = Ç.e^{-2x^2}$ (Ç keyfi sabit) bulunur.

u nun değeri, $(u' + 4x.u).v + v'.u = 4x$ yerine yazılırsa,

$((Ç.e^{-2x^2})' + 4x.\,Ç.e^{-2x^2}).v + v'.(Ç.e^{-2x^2}) = 4x$

$(-4x.\,Ç.e^{-2x^2} + 4x.\,Ç.e^{-2x^2}).v + v'.(Ç.e^{-2x^2}) = 4x \quad \Rightarrow \quad 0.v + v'.(Ç.e^{-2x^2}) = 4x$

$\Rightarrow \quad v' = \frac{4x.e^{2x^2}}{Ç}$

İntegrali alınırsa, $\int v' = \int \frac{4}{Ç}.x.e^{2x^2}\,dx = \frac{4}{Ç}\int x.\,e^{2x^2}\,dx$ (kısmi integral uygulanırsa)

$2x^2 = s$ dönüşümü yapılırsa $\Rightarrow$ $4x\,dx = ds$

$v = \frac{4}{Ç}\int x.\,e^{2x^2}\,dx = \frac{4}{Ç}\int x.\,e^{s}\,\frac{ds}{4x} = \frac{1}{Ç}.\int e^{s}\,ds = \frac{1}{Ç}.e^{s} + C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{Ç}.e^{2x^2} + C$

O halde, lineer diferansiyel denklemin çözümü, $y = u.v$

$\Rightarrow \quad y = (Ç.e^{-2x^2}).(\frac{1}{Ç}.e^{2x^2} + C) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{Ç}{e^{2x^2}}.(\frac{1}{Ç}.e^{2x^2} + C)$

$\Rightarrow \quad y = 1 + \frac{Ç.C}{e^{2x^2}}$ (Ç.C yerine c yazarsak) $\Rightarrow$ $y = 1 + c.\,e^{-2x^2}$ bulunur.

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü, $y = 1 + c.\,e^{-2x^2}$ elde edilir.

III. Yol

$y' + 4xy = 4x \Rightarrow y' = 4x - 4xy \Rightarrow y' = -4x.(y-1) \Rightarrow \dfrac{y'}{y-1} = -4x$

Bu ifadenin her iki yanının integrali alınırsa, $\int \dfrac{y'}{y-1} = \int -4x \Rightarrow \ln(y-1) = -4.\dfrac{x^2}{2} + ç$

$\Rightarrow \ln(y-1) = -2x^2 + ç \Rightarrow (y-1) = e^{-2x^2+ç} \Rightarrow y - 1 = e^{-2x^2+ç} \Rightarrow y = 1 + e^{-2x^2+ç}$

$\Rightarrow y = 1 + e^{-2x^2}.e^{ç}$ ($e^{ç}$ yerine keyfi sabit c olsun.)

$\Rightarrow y = 1 + c.e^{-2x^2}$ sonucu bulunur.

88. $4y' = \dfrac{y^2-25}{y}$ diferansiyel denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \pm\sqrt{c.e^{x/2} - 25}$ B) $y = \pm\sqrt{c.e^{x/2} - 5}$

C) $y = \pm\sqrt{c.e^{x/2} + 25}$ D) $= \pm\sqrt{c.e^{x/2} + 5}$

Çözüm 88

$4y' = \dfrac{y^2-25}{y} \Rightarrow 4\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-25}{y} \Rightarrow 4y\,dy = (y^2 - 25)\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{4y}{y^2-25}\,dy$

Denklem integre edilirse

$\int dx = \int \dfrac{4y}{y^2-25}\,dy \Rightarrow x = \int \dfrac{4y}{y^2-25}\,dy$

$y^2 - 25 = u$ dönüşümü yapılırsa, $(y^2 - 25)' = u' \Rightarrow 2y\,dy = du$

$x = \int \dfrac{4y}{y^2-25}\,dy = \int \dfrac{4y}{u}\,\dfrac{du}{2y} = 2.\int \dfrac{du}{u} = 2.\ln u \Rightarrow x = 2.\ln(y^2 - 25)$

$x = 2.\ln(y^2 - 25) \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \ln(y^2 - 25) \Rightarrow e^{x/2} = y^2 - 25 \Rightarrow y^2 = e^{x/2} + 25$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{c.e^{x/2} + 25}$ elde edilir.

Not : Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklemler

$f_1(x).g_2(y)\,dx + f_2(x).g_1(y)\,dy = 0$ şeklindeki bir denkleme "Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem" denir.

Bu diferansiyel denkleminin her iki tarafının $f_2(x).g_2(y) \neq 0$ ile bölünmesiyle elde edilen

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = 0$$

denklemi integre edilirse $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = C$ bulunur.

Genel çözüm = $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = C$

89. Aşağıdakilerden hangisi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinden biri <u>değildir?</u>

A) −3 B) −1 C) 1 D) 4

Çözüm 89

$|A_{3x3} - c.I_{3x3}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} - c.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 2-c & 1 & 0 \\ 2 & 3-c & 0 \\ 0 & 0 & -1-c \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-c & 1 & 0 \\ 2 & 3-c & 0 \\ 0 & 0 & -1-c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2-c).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3-c & 0 \\ 0 & -1-c \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1-c \end{vmatrix} + 0.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 2 & 3-c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad (2 - c).[(3 - c).(-1 - c) - 0] - [2.(-1 - c)] + 0 = 0$

$\Rightarrow \quad (2 - c).[(3 - c).(-1 - c)] + 2c + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (2 - c).(c - 3).(c + 1) + 2.(c + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad (c + 1).[(2 - c).(c - 3) + 2] = 0 \quad \Rightarrow \quad (c + 1).[2c - 6 - c^2 + 3c + 2] = 0$

$\Rightarrow \quad (c + 1).[(-1).(c^2 - 5c + 4)] = 0$

$\Rightarrow \quad (c + 1).[(-1).(c - 4).(c - 1)] = 0 \quad \Rightarrow \quad (c + 1).(-1).(c - 4).(c - 1) = 0$

$\Rightarrow \quad (c + 1).(c - 4).(c - 1) = 0$ denkleminin kökleri özdeğerlerdir.

$\Rightarrow \quad c = -1 \ , \ c = 4 \ , \ c = 1$ bulunur.

Not :

A bir kare matris ve I aynı mertebeden birim matris olmak üzere $|A - c.I| = 0$ denkleminin köklerine A matrisinin öz değerleri (veya karakteristik değeri) denir.

A matrisi, özdeğerini bulmak istediğimiz matris,

c, A matrisinin bir özdeğeri $\Rightarrow$ $|A_{nxn} - c.I_{nxn}| = 0$ (polinomunun kökleri)

I, birim matris $\Rightarrow$ $I_{3x3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

90. Aşağıdaki vektör kümelerinden hangisi, R^2 uzayı için bir taban (baz) dır?

A) $\{(0 , 3) , (1 , 1)\}$ B) $\{(0 , 1) , (0 , -1)\}$

C) $\{(0 , 0) , (0 , 1)\}$ D) $\{(-1 , 2) , (2 , -4) , (0 , 0)\}$

Çözüm 90

A) $\{(0 , 3) , (1 , 1)\} \Rightarrow a.(0 , 3) + b.(1 , 1) = (0 , 0)$

$\Rightarrow (a.0 + b.1 , a.3 + b.1) = (0 , 0) \Rightarrow (b , 3a + b) = (0, 0)$

$\Rightarrow$ b = 0 ve 3a + b = 0 $\Rightarrow$ a = 0 $\Rightarrow$ a = b = 0 bulunur.

O halde, $\{(0 , 3) , (1 , 1)\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

B) $\{(0 , 1) , (0 , -1)\} \Rightarrow a.(0 , 1) + b.(0 , -1) = (0 , 0)$

$(a.0 + b.0 , a.1 + b.(-1)) = (0 , 0) \Rightarrow (0 , a - b) = (0 , 0) \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$

(a = 1 , b = 1 olabilir.)

O halde, $\{(0 , 1) , (0 , -1)\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

C) $\{(0 , 0) , (0 , 1)\} \Rightarrow a.(0 , 0) + b.(0 , 1) = (0 , 0)$

$(a.0 + b.0 , a.0 + b.1) = (0 , 0) \Rightarrow (0 , b) = (0 , 0) \Rightarrow b = 0$ (a = 1 , b = 0 olabilir.)

O halde, $\{(0 , 0) , (0 , 1)\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

D) $\{(-1 , 2) , (2 , -4) , (0 , 0)\} \Rightarrow a.(-1 , 2) + b.(2 , -4) + c.(0 , 0) = (0 , 0)$

$(a.(-1) + b.2 + c.0 , a.2 + b.(-4) + c.0) = (0 , 0) \Rightarrow (-a + 2b , 2a - 4b) = (0 , 0)$

$\Rightarrow -a + 2b = 0 , 2a - 4b = 0 \Rightarrow a = 2b$ (a = 2 , b = 1 olabilir.)

O halde, $\{(-1 , 2) , (2 , -4) , (0 , 0)\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

Not : Bir Vektör Uzayının Tabanı

V bir vektör uzayı ve $E = \{ x_1 , x_2 , ... , x_n \} \subset V$ olsun. Eğer E kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa E ye V nin bir tabanı veya bazı denir.

I - E lineer bağımsız bir kümedir.

II - $< E > = V$ yani E, V yi geren bir kümedir.

Not : Lineer bağımlılık , Lineer bağımsızlık

Bir V vektör uzayındaki $x_1 , x_2 , ... , x_k$ vektörlerinin kümesi $E = \{x_1 , x_2 , ... , x_k\}$ olsun.

$c_1.x_1 + c_2.x_2 + ... + c_k.x_k = 0$

eşitliğini sağlayan, hepsi aynı anda sıfır olmayan $c_1 , c_2 , ... , c_k$ skalerleri varsa

$x_1 , x_2 , ... , x_k$ vektörlerine lineer bağımlı vektörler, E kümesine de lineer bağımlı küme denir.

$c_1.x_1 + c_2.x_2 + ... + c_k.x_k = 0$

eşitliği ancak $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$ için sağlanıyorsa $x_1 , x_2 , ... , x_k$ vektörlerine lineer bağımsız vektörler, E kümesine de lineer bağımsız küme denir.

Burada şu noktaya dikkat etmeliyiz :

$c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$ için

$c_1.x_1 + c_2.x_2 + ... + c_k.x_k = 0$

eşitliği her zaman sağlanır, önemli olan, $c_1.x_1 + c_2.x_2 + ... + c_k.x_k = 0$ eşitliğinin

yalnız ve yalnız $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$ için sağlanmasıdır.

91. $V_1 = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$ ve $V_2 = \{(x, y, z) \mid x = y \text{ ve } z = 0\}$

R cismi üstünde tanımlı R^3 vektör uzayının alt uzayları olduğuna göre, $V_1 + V_2$ vektör uzayının boyutu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Çözüm 91

I. Yol

$V_1 = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$ $\Rightarrow$ V_1 in bir tabanı = $\{(0 , 1 , 0) , (0 , 0 , 1)\}$ $\Rightarrow$ $\text{boy}V_1 = 2$

$V_2 = \{(x, y, z) \mid x = y \text{ ve } z = 0\}$ $\Rightarrow$ V_2 nin bir tabanı = $\{(1 , 1 , 0)\}$ $\Rightarrow$ $\text{boy}V_2 = 1$

$(x, y, z) \in (V_1 \cap V_2)$ $\Rightarrow$ $x = y = z = 0$ bulunur.

$\{0_v\}$, sıfır uzayın boyutu = 0

$\text{boy}(V_1 + V_2) = \text{boy}V_1 + \text{boy}V_2 - \text{boy}(V_1 \cap V_2) = 2 + 1 - 0 = 3$

II. Yol

Önce, V_1 ve V_2 nin birer tabanlarını bulalım.

$V_1 = \{(x, y, z) \mid x = 0\} \quad \Rightarrow \quad x = 0 , y = a , z = b$ parametre olarak alınırsa,
$S = \{(0 , 1 , 0) , (0 , 0 , 1)\}$ nin V_1 in bir tabanı olduğu görülür.

Benzer şekilde,

$V_2 = \{(x, y, z) \mid x = y \text{ ve } z = 0\} \quad \Rightarrow \quad x = y = m , z = 0$ parametre olarak alınırsa,
$T = \{(1 , 1 , 0)\}$ nin V_2 nin bir tabanı olduğu görülür.

Şu halde $(V_1 + V_2)$, $S \cup T$ ile üretilmiştir.
Buradan, $V_1 + V_2 = < (0 , 1 , 0) , (0 , 0 , 1) , (1 , 1 , 0) >$
$\{(0 , 1 , 0) , (0 , 0 , 1) , (1 , 1 , 0)\} \quad \Rightarrow \quad a.(0 , 1 , 0) + b.(0 , 0 , 1) + c.(1 , 1 , 0) = (0 , 0 , 0)$
$\Rightarrow \quad a = b = c = 0 \quad \Rightarrow$ lineer bağımsız
boy$(V_1 + V_2) = 3$ elde edilir.

Not :
V vektör uzayının bir $S = \{v_1 , v_2 , v_3 , \ldots , v_n\}$ alt kümesi hem lineer bağımsız , hem de V vektör uzayını gererse S ye bir taban denir.
Not :
Sonlu boyutlu bir V vektör uzayının herhangi bir tabanındaki vektörlerin sayısına V nin boyutu denir ve boyV ile gösterilir.
V nin bir tabanı, $S = \{v_1 , v_2 , v_3 , \ldots , v_n\}$ ise boyV = n olur.

92. $\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ x - 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$ doğrusal denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(1 , 1 , 1)\}$ B) $\{(2 , 1 , 0)\}$ C) $\{(2 , 2 , -1)\}$ D) $\varnothing$

Çözüm 92

I. Yol

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = [2.1.2 + 1.(-2).1 + 1.1.1] - [1.1.2 + 2.(-2).1 + 1.1.1]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 4 - 2 + 1 - 2 + 4 - 1$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = [5.1.2 + 3.(-2).1 + 0.1.1] - [3.1.2 + 5.(-2).1 + 0.1.1]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_1 = 10 - 6 + 0 - 6 + 10 - 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_1 = 8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = [2.3.2 + 1.0.1 + 1.5.1] - [1.5.2 + 2.0.1 + 1.3.1]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_2 = 12 + 0 + 5 - 10 - 0 - 3$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_2 = 4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = [2.1.0 + 1.(-2).5 + 1.1.3] - [1.1.0 + 2.(-2).3 + 1.1.5]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_3 = 0 - 10 + 3 - 0 + 12 - 5$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_3 = 0$$

$\Delta = 4$ $(\Delta \neq 0)$ olduğuna göre, tek çözüm vardır. Buna göre,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2 \quad , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1 \quad , \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0$$

Çözüm kümesi = {(2 , 1 , 0)} elde edilir.

II. Yol

$2x + y + z = 5 \quad (1)$

$x + y + z = 3 \quad (2)$

$x - 2y + 2z = 0 \quad (3)$

$$\begin{array}{l} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \quad [(-1) \text{ ile çarp}] \\ \hline x = 5 - 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \end{array}$$

(2) ve (3) işlemlerinde x = 2 için,

$$\left.\begin{array}{l} y + z = 1 \\ 2y - 2z = 2 \quad \Rightarrow \quad y - z = 1 \end{array}\right\} \; y = 1 \; , \; z = 0 \text{ elde edilir.}$$

Çözüm kümesi = {(2 , 1 , 0)} olur.

Not : Bilinmeyen sayısı ile denklem sayısının eşit olduğu lineer denklem sistemlerinin çözümü, "cramer kuralı" yöntemiyle elde edilir.

93. a , b , c , d $\in$ R ve $\begin{vmatrix} -1 & 3 & a \\ b & c & 2 \\ 4 & d & 5 \end{vmatrix} = -6$ olduğuna göre, $\begin{vmatrix} -1 & 2b & 4 \\ 9 & 6c & 3d \\ a & 4 & 5 \end{vmatrix}$ determinantı kaçtır?

A) −36 B) −18 C) 12 D) 36

Çözüm 93

I. Yol

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & a \\ b & c & 2 \\ 4 & d & 5 \end{vmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad (-1).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} c & 2 \\ d & 5 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} b & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + a.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} b & c \\ 4 & d \end{vmatrix} = -6$$

$\Rightarrow$ (-1).(5.c – 2.d) – 3.(5.b – 4.2) + a.(b.d – 4.c) = -6

$\Rightarrow$ 2.d – 5.c – 15.b + 24 + a.b.d – 4.c.a = -6

$$\begin{vmatrix} -1 & 2b & 4 \\ 9 & 6c & 3d \\ a & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1).(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 6c & 3d \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (2b).(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 9 & 3d \\ a & 5 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 9 & 6c \\ a & 4 \end{vmatrix} =$$

$\Rightarrow$ (-1).(5.6c – 4.3d) – 2b.(9.5 - 3d.a) + 4.(9.4 - 6c.a)

$\Rightarrow$ -30.c + 12.d – 90.b + 6.d.a.b + 144 – 24.c.a = 6.(-5.c + 2.d – 15b + a.b.d + 24 – 4.c.a)

$\Rightarrow$ 6.(-6) = -36

II. Yol

$\begin{vmatrix} -1 & 2b & 4 \\ 9 & 6c & 3d \\ a & 4 & 5 \end{vmatrix}$ determinantının, 2 inci satırındaki 3 çarpanını ve 2 inci sütunundaki 2 çarpanını determinantın dışına aldığımızda, $2.3.\begin{vmatrix} -1 & b & 4 \\ 3 & c & d \\ a & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6.\begin{vmatrix} -1 & b & 4 \\ 3 & c & d \\ a & 2 & 5 \end{vmatrix}$ olur.

$|A| = |A^t|$ olduğuna göre, $\begin{vmatrix} -1 & 3 & a \\ b & c & 2 \\ 4 & d & 5 \end{vmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & b & 4 \\ 3 & c & d \\ a & 2 & 5 \end{vmatrix} = -6$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2b & 4 \\ 9 & 6c & 3d \\ a & 4 & 5 \end{vmatrix} = 6.\begin{vmatrix} -1 & b & 4 \\ 3 & c & d \\ a & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6.\begin{vmatrix} -1 & b & 4 \\ 3 & c & d \\ a & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6.(-6) = -36$$

Not :

Bir determinantın bir satırı yada sütunu bir “k” sayısı ile çarpılırsa determinant “k” ile çarpılmış olur.

Not :

Bir A kare matrisinin transpozesi'nin determinantı, A matrisinin determinantına eşittir.

$\det(A) = \det(A^t)$

94. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin satır rankı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

Çözüm 94

I. Yol

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi 3 x 2 türünden olduğundan, bu matrisin karesel alt matrisleri en çok 2 x 2 türündendir. Bu nedenle matrisin rankı en fazla 2 olabilir.

Alt matrisleri = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

2 x 2 boyutlu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ alt matrisinin determinantı $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 2.2 = 1 - 4 = -3 \neq 0$ olduğundan, rankı 2 olur.

II. Yol

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (2 inci satırı, (-1) ile çarp , 3 üncü satır ile topla)

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (1 inci satırı, (-1) ile çarp , 2 inci satır ile topla) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Sıfırdan farklı satır sayısı 2 olduğuna göre, rankı = 2 elde edilir.

Not : Bir Matrisin Rankı

A, mxn türünde bir matris olsun.A nın determinantları sıfırdan farklı olan kare alt matrislerinden en büyük mertebeli olanın mertebesine A nın rankı denir ve rank(A) ile gösterilir.

Not : Bir Matrisin Rankı

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırları sayısına A matrisinin rankı denir ve r(A) ile gösterilir.

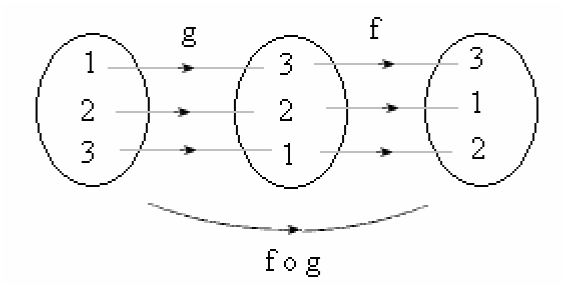
Not :

Bir determinantın bir satırındaki ya da bir sütunundaki elemanlar, $k \in R$ ile çarpılıp başka bir satıra ya da sütuna karşılıklı olarak eklenirse, determinantın değeri değişmez.

95. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ permütasyonları verildiğine göre, fog aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Çözüm 95



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

96. Mertebesi 6 olan devirli bir grubun kaç tane alt grubu vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

Çözüm 96

G = < a > mertebesi 6 olan bir devirli grup olsun. Yani G = {e , a , a^2 , a^3 , a^4 , a^5}
Devirli bir gurubun Alt grup sayısı mertebesinin böleni kadardır.
6 sayısının bölenleri 1 , 2 , 3 , 6 dır.
Bu durumda 6 nın 4 tane böleni olduğundan, 4 tane alt grup vardır.
Buna göre, G nin n-elemanlı altgrubunu C_n ile gösterirsek bu altgruplar,

$C_1 = \langle a^{6/1} \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$

$C_2 = \langle a^{6/2} \rangle = \langle a^3 \rangle = \{e , a^3\}$

$C_3 = \langle a^{6/3} \rangle = \langle a^2 \rangle = \{e , a^2 , a^4\}$

$C_6 = \langle a^{6/6} \rangle = \langle a \rangle = \{e , a , a^2 , a^3 , a^4 , a^5\} = G$

Not :

Bir devirli grubun her altgrubu devirlidir. G = < a > mertebesi n olan bir devirli grup ise, n'yi bölen her m pozitif tam sayısı için mertebesi m olan sadece bir altgrup vardır ve bu altgrup $\langle a^{n/m} \rangle$ dir.

97.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

A={a, b, c, d} kümesi, tablo ile verilen $*$ işlemine göre, bir grup oluşturmaktadır.
Buna göre, aşağıdaki kümelerden hangisi $*$ işlemine göre, (A , $*$) grubunun bir alt grubudur?

A) {b , d} B) {a , c} C) {c , d} D) {b}

Çözüm 97

A) $b * d = a$ $(a \notin \{b , d\})$ $\{b , d\}$ kümesi verilen işleme göre kapalı değildir.

B) $a * c = c$ $(a \in \{a , c\}$, $c \in \{a , c\})$ $\{a , c\}$ kümesi verilen işleme göre kapalıdır.

Birim (etkisiz) eleman = a

a nın tersi = $a^{-1} = a$ $(a \in \{a , c\})$, c nin tersi = $c^{-1} = c$ $(c \in \{a , c\})$

C) $c * d = b$ $(b \notin \{c , d\})$ $\{c , d\}$ kümesi verilen işleme göre kapalı değildir.

D) $b * b = c$ $(c \notin \{b\})$ $\{b\}$ kümesi verilen işleme göre kapalı değildir.

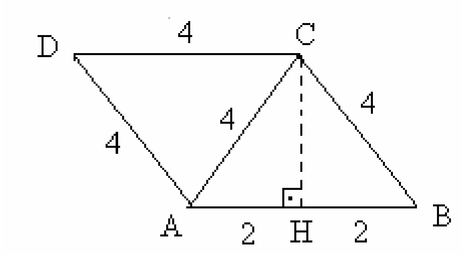
Not :

G bir grup ve H de G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G de tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa H ye G nin bir altgrubu denir ve $H \leq G$ yazılır.

98. Eşkenar dörtgen biçimindeki bir uçurtmanın bir kenarının uzunluğu 4 cm dir.
Bu uçurtmanın, köşegenlerinden birinin uzunluğu, dörtgenin bir kenarının uzunluğuna eşit olduğuna göre, karşılıklı kenarlarının birbirine olan uzaklığı kaç cm dir?

A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 4

Çözüm 98



Eşkenar dörtgen (ABCD) olsun.

$|AB| = |BC| = |CD| = |CA| = 4$

$|AC| = 4$ olsun.

ABC eşkenar üçgen olur.

ABC eşkenar üçgenin yüksekliği, eşkenar dörtgenin karşılıklı kenarlarının birbirine olan uzaklığına eşittir.

$|AC| = 4 \Rightarrow |AH| = 2$

$\Rightarrow |CH| = 2\sqrt{3}$

Not :

Bir dik üçgende, 30 derecenin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısı , 60 derenin karşısındaki kenar, 30 derece karşısındaki kenarın $\sqrt{3}$ katıdır.

99. Bir saatin yelkovanının 1 dakikada taradığı alan, akrebinin aynı sürede taradığı alanın 60 katıdır. Bu saatin yelkovanının uzunluğu, akrebinin uzunluğunun kaç katıdır?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{15}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{15}$

Çözüm 99

Akrebin uzunluğu = a (saati gösterir.)

Yelkovanın uzunluğu = y (dakikayı gösterir.)

Yelkovanın 1 dakikada yaptığı açı,

60 dakikada 360°

1 dakikada x

x.60 = 360.1 ⇒ x = 6°

Yelkovanın taradığı alan = $\dfrac{\pi.y^2.6}{360} = \dfrac{\pi.y^2}{60}$

Akrebin 1 dakikada yaptığı açı,

720 dakikada 360°

1 dakikada z

z.720 = 360.1 ⇒ z = $\dfrac{1}{2}$°

Akrebin taradığı alan = $\dfrac{\pi.a^2.\frac{1}{2}}{360} = \dfrac{\pi.a^2}{720}$

60.(Akrebin taradığı alan) = (Yelkovanın taradığı alan) ⇒ $60.\dfrac{\pi.a^2}{720} = \dfrac{\pi.y^2}{60}$

⇒ $5.a^2 = y^2$ ⇒ $y = \sqrt{5}\,a$

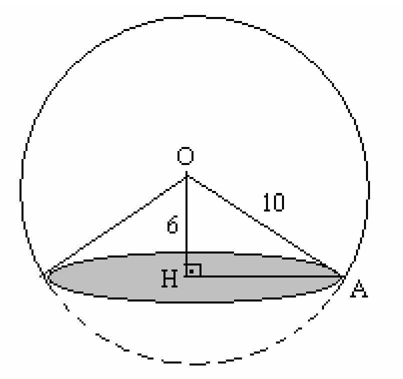
100. Bir kürenin merkezinden 6 cm uzaklıktaki kesitini taban, kürenin merkezini tepe noktası kabul eden bir koni oluşturuluyor.

Kürenin alanı 1200 cm² olduğuna göre, oluşturulan koninin hacmi kaç cm³ tür?

(π yerine 3 alınız.)

A) 384 B) 586 C) 768 D) 1052

Çözüm 100



Kürenin alanı = 1200

Kürenin alanı = $4.\pi.R^2$ (Kürenin yarıçapı = R = |OA|)

$\Rightarrow$ $4.3.R^2 = 1200$ $\Rightarrow$ R = 10 = |OA|

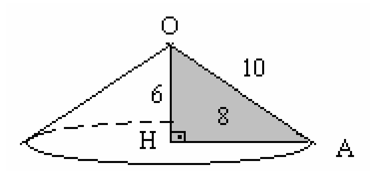
|OH| = 6

OHA dik üçgeninde, $10^2 = 6^2 + |AH|^2$ (pisagor)

$\Rightarrow$ |AH| = 8

Koninin yarıçapı = |AH| = 8 olduğuna göre,

Koninin hacmi = $\frac{1}{3}.\pi.r^2.h$ (Koninin yarıçapı = r = |AH|)



Koninin hacmi = $\frac{1}{3}.3.8^2.6 = 64.6 = 384$

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA