28 Haziran 2008

Fen Liseleri, Sosyal Bilimler Liseleri, Spor Liseleri, Anadolu Liseleri Öğretmenlerinin Seçme Sınavı

Matematik Soruları ve Çözümleri

56. $[\, p \wedge (q \Rightarrow (q' \wedge s))\,] \wedge s' \equiv 1$ olduğuna göre, aşağıdaki önermelerden hangisinin doğruluk değeri 0 dır?

A) $p \Rightarrow q$ B) $q \Rightarrow s$ C) $s \Rightarrow p$ D) $q' \Rightarrow p$

Çözüm 56

$[\, p \wedge (q \Rightarrow (q' \wedge s))\,] \wedge s' \equiv 1$ $(1 \wedge 1 \equiv 1)$

$[\, p \wedge (q \Rightarrow (q' \wedge s))\,] \equiv 1$ ve $s' \equiv 1$ olur. $s' \equiv 1$ olduğundan, $s \equiv 0$ olur.

$p \wedge (q \Rightarrow (q' \wedge s)) \equiv 1$ olacağından, $p \equiv 1$ ve $(q \Rightarrow (q' \wedge s)) \equiv 1$ $(1 \wedge 1 \equiv 1)$

$(q \Rightarrow (q' \wedge s)) \equiv 1$ olması için, $q \equiv 1$ olamaz. $(1 \Rightarrow 0 \equiv 0)$ $q \equiv 0$ olur.

Veya

$(q \Rightarrow (q' \wedge s)) \equiv 1$ olması için, $(1 \Rightarrow 1 \equiv 1\ ,\ 0 \Rightarrow 1 \equiv 1\ ,\ 0 \Rightarrow 0 \equiv 1)$

$s \equiv 0$ olduğuna göre, $(q' \wedge s) \equiv (q' \wedge 0) \equiv 0$ olur. $(1 \wedge 0 \equiv 0\ ,\ 0 \wedge 0 \equiv 0)$

$(q \Rightarrow (q' \wedge s)) \equiv q \Rightarrow 0 \equiv 1$ olması için, $q \equiv 0$ olur. $(0 \Rightarrow 0 \equiv 1)$

Bu değerler seçeneklerde yerine yazılırsa, $(p \Rightarrow q) \equiv (1 \Rightarrow 0) \equiv 0$ olur.

Not :

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

57. A ve B iki küme olmak üzere, $[A \cup (A' \cap B)]' \cup B$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $A' \cup B$ B) $A' \cap B$ C) $A \cap B'$ D) $A \cup B'$

Çözüm 57

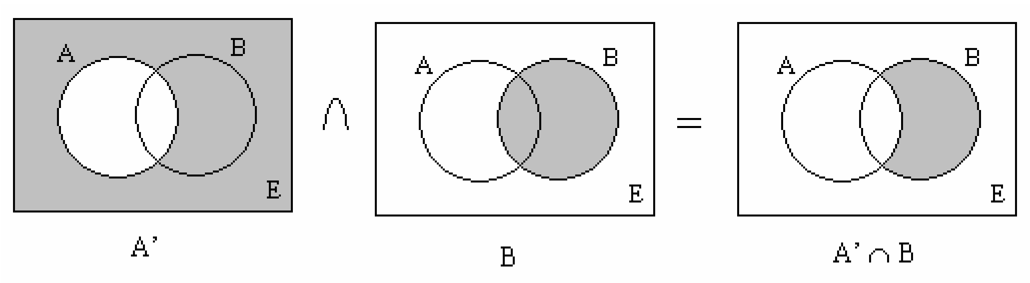
I. Yol

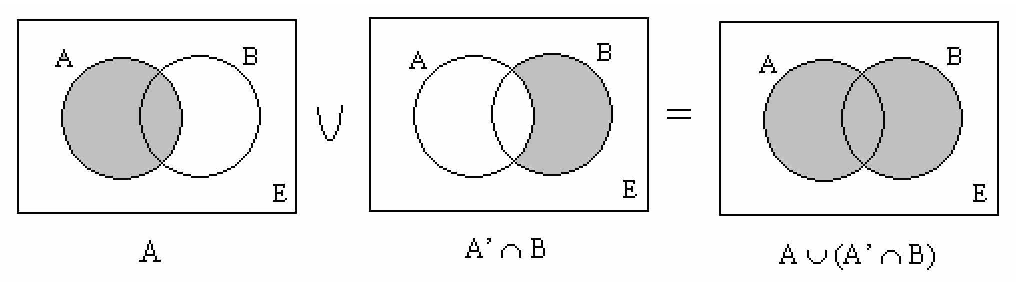
$$[A \cup (A' \cap B)]' \cup B = [(A \cup A') \cap (A \cup B)]' \cup B = [E \cap (A \cup B)]' \cup B$$

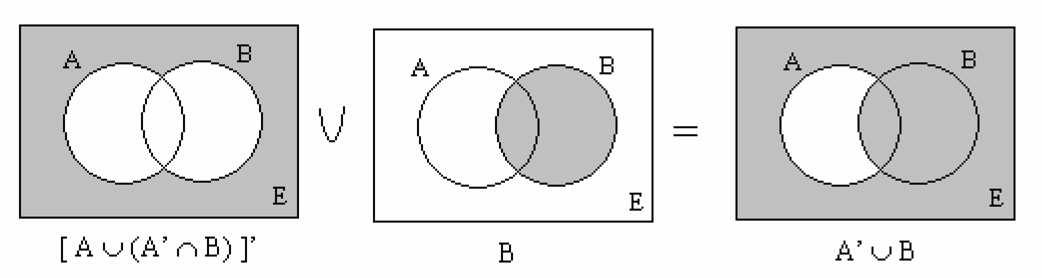
$$= (A \cup B)' \cup B = (A' \cap B') \cup B = (A' \cup B) \cap (B' \cup B)$$

$$= (A' \cup B) \cap E = A' \cup B \text{ olur.}$$

II. Yol







58. a, b $\in$ R olmak üzere, f : R $\to$ R ve g : R $\to$ R fonksiyonları sırasıyla f(x) = 5x + a ve g(x) = bx + 4 seklinde tanımlanmaktadır.

fog fonksiyonu birim fonksiyon ise b − a kaçtır?

A) $\frac{17}{5}$ B) $\frac{121}{9}$ C) $\frac{101}{5}$ D) $\frac{91}{2}$

Çözüm 58

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 5x + a \\ g(x) = bx + 4 \end{array}\right\} (fog)(x) = f(g(x)) = f(bx + 4) = 5.(bx + 4) + a$$

(fog)(x) = x birim fonksiyon olduğuna göre, 5.(bx + 4) + a = x $\Rightarrow$ 5.b.x + 20 + a = x

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad 5.b.x = x \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow \quad 20 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b - a = \frac{1}{5} - (-20) = \frac{1}{5} + 20 = \frac{101}{5}$$

Not : Birim Fonksiyon

A dan A ya bir fonksiyon, her elemanı kendisine eşliyorsa, bu fonksiyona birim fonksiyon denir. Birim fonksiyon genel olarak I ile gösterilir.

Buna göre, I : A $\to$ A
f(x) = x birim fonksiyondur.

59. $g(x) = \begin{cases} 5x - \frac{1}{3} & , \quad 0 \le x < \frac{1}{3} \quad ise \\ \frac{x - \frac{1}{3}}{2} & , \quad \frac{1}{3} \le x < 1 \quad ise \end{cases}$ seklinde tanımlanan g parçalı fonksiyonuna göre, g(g($\frac{3}{5}$)) kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$

Çözüm 59

$g(\frac{3}{5}) = ? \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{3}{5} < 1$ olduğundan, $g(\frac{3}{5}) = \dfrac{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{\frac{9-5}{15}}{2} = \frac{2}{15}$

$g(g(\frac{3}{5})) = g(\frac{2}{15}) = ? \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{2}{15} < \frac{1}{3}$ olduğundan, $g(\frac{2}{15}) = 5.\frac{2}{15} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ bulunur.

60. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 6}{x+3}}$ seklinde verilen f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-3, \infty) \setminus \{2\}$ B) $(-3, \infty)$ C) $(-\infty, 2] \setminus \{-3\}$ D) $[2, \infty)$

Çözüm 60

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x+3}} = \sqrt{\frac{(x+3).(x-2)}{x+3}} = \sqrt{x-2}$$

$(x - 2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$ olmalıdır. f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $= [2, \infty)$ olur.

61. ABC , BCA , CAB biçimindeki üç basamaklı üç doğal sayının toplamı 1887 dir.

$A > B > C$ olduğuna göre, B kaç farklı değer alır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Çözüm 61

ABC + BCA + CAB = 1887

100A + 10B + C + 100B + 10C + A + 100C + 10A + B = 1887

111A + 111B + 111C = 1887 $\Rightarrow$ A + B + C = 17 olur.

A > B > C olduğuna göre,

A = 9 alınırsa, 9 + B + C = 17 $\Rightarrow$ B + C = 8 $\Rightarrow$ B = 7 ve C = 1 (A > B > C)
$\Rightarrow$ B + C = 8 $\Rightarrow$ B = 6 ve C = 2
$\Rightarrow$ B + C = 8 $\Rightarrow$ B = 5 ve C = 3

A = 8 alınırsa, 8 + B + C = 17 $\Rightarrow$ B + C = 9 $\Rightarrow$ B = 7 ve C = 2 (A > B > C)
$\Rightarrow$ B + C = 9 $\Rightarrow$ B = 6 ve C = 3
$\Rightarrow$ B + C = 9 $\Rightarrow$ B = 5 ve C = 4

A = 7 alınırsa, 7 + B + C = 17 $\Rightarrow$ B + C = 10 $\Rightarrow$ B = 6 ve C = 4 (A > B > C)

Bu durumda, B rakamı = {7 , 6 , 5} olmak üzere üç farklı değer alabilir

62. a, b ve c birbirinden farklı doğal sayılar olmak üzere, $2^a.15^b$ sayısı ile 10^c sayısının O.B.E.B.'i $2^a.5^c$ sayısıdır.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) a < b < c B) c < b < a C) a < c < b D) b < c < a

Çözüm 62

$$\left.\begin{array}{l} A = 2^a.15^b = 2^a.3^b.5^b \\ \\ B = 10^c = 2^c.5^c \end{array}\right\} \text{OBEB(A , B)} = 2^a.5^c \text{ olduğuna göre, .}$$

A ve B sayılarının OBEB i bulunurken, ortak çarpanlardan üssü küçük olanların alınması gerekir.
a < c ve c < b $\Rightarrow$ a < b < c elde edilir

Not : Ortak Bölenlerin En Büyüğü (OBEB)

En az biri sıfırdan farklı iki ya da daha fazla tam sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların ortak bölenlerinin en büyüğü denir ve OBEB biçiminde gösterilir.

OBEB bulunurken, verilen sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak olan asal çarpanlardan büyük olmayan üslülerin çarpımı bu sayıların OBEB ini verir.

63. x ve y birer tam sayı ve $x^2 - y = 13 = y^2 + x$ olduğuna göre, x'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 3

Çözüm 63

$x^2 - y = 13 = y^2 + x \Rightarrow x^2 - y = y^2 + x \Rightarrow x^2 - y^2 = x + y$

$\Rightarrow (x + y).(x - y) = x + y \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$ olur.

$x^2 - y = 13 = y^2 + x$ olduğundan, $y = x - 1$ değeri, $x^2 - y = 13$ de yerine yazılırsa,

$x^2 - y = x^2 - (x - 1) = x^2 - x + 1 = 13 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemde kökler toplamı, $\dfrac{-(-1)}{1} = 1$ bulunur.

64. $\dfrac{2^2}{2^2-1}.\dfrac{3^2}{3^2-1}.\dfrac{4^2}{4^2-1}\,\ldots\ldots\ldots\,\dfrac{49^2}{49^2-1} = A^2$ ise A kaçtır?

A) $\dfrac{7\sqrt{3}}{15}$ B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ C) $\dfrac{7}{6}$ D) $\dfrac{7}{5}$

Çözüm 64

$$\frac{2.2}{(2-1).(2+1)}.\frac{3.3}{(3-1).(3+1)}.\frac{4.4}{(4-1).(4+1)}\,\ldots\ldots\ldots\,\frac{49.49}{(49-1).(49+1)} = A^2$$

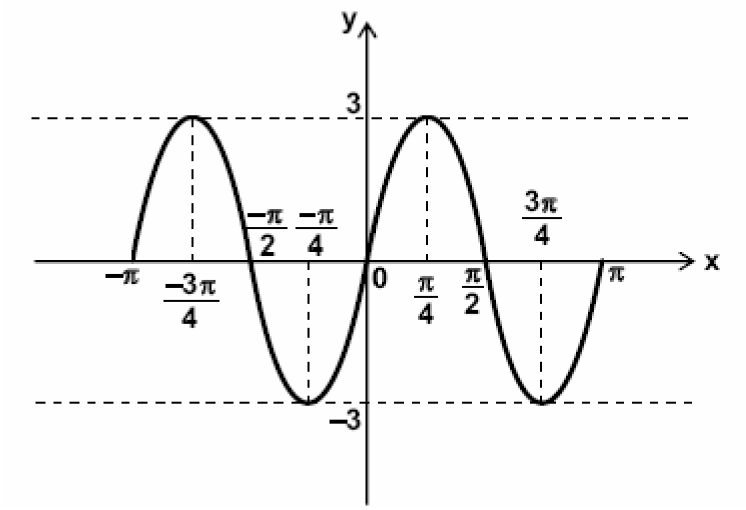
$$\frac{2.2}{1.3}.\frac{3.3}{2.4}.\frac{4.4}{3.5}\,\ldots\ldots\ldots\,\frac{49.49}{48.50} = \frac{(2.3.4.........49).(2.3.4........49)}{(1.2.3........48).(3.4.5........50)} = \frac{49.2}{50} = \frac{49}{25} = A^2$$

$A^2 = \dfrac{49}{25} \Rightarrow A = \dfrac{7}{5}$ bulunur.

Not :

$a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$

65. Şekilde $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında çizilmiş olan grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait <u>olabilir?</u>



A) f(x) = 3sin2x B) g(x) = 3cos2x C) h(x) = 2cos3x D) t(x) = 2sin3x

Çözüm 65

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = 3$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$

$x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow y = -3$

$x = \pi \Rightarrow y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow y = -3$

$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$

$x = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow y = 3$

$x = -\pi \Rightarrow y = 0$

x	π	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$
y	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0
	↗	↘	↘	↗	↗	↘	↘	↗	

Fonksiyonun 3 katı alınmıştır. y = 3.f(x) şeklindedir.

Periyodu = π ve (0 , 0) noktasından geçen fonksiyon = f(x) sin2x olabilir.

[(sinax ‘in periyodu = T = $\frac{2\pi}{a}$) $\Rightarrow$ (sin2x ‘in periyodu, T = $\frac{2\pi}{2}$ = π)]

O halde, y = 3.sin2x olabilir.

66. cos4x + 2sinx.cosx = 0 denkleminin [0 , π] aralığında kaç çözümü vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

Çözüm 66

$\cos 4x + 2\sin x.\cos x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 1 - 2.\sin^2 2x$ ve $2.\sin x.\cos x = \sin 2x$ olduğundan,

$\cos 4x + 2\sin x.\cos x = 0 \Rightarrow 1 - 2.\sin^2 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow 2.\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$

$\sin 2x = a$ olsun. $2.a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow (2a + 1).(a - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$ ve $a = 1$ bulunur.

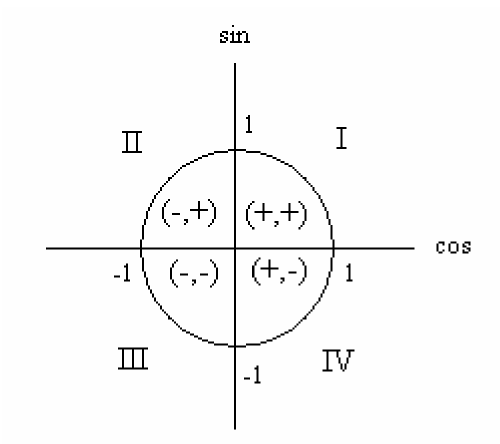
$\sin 2x = a = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \sin 2x = \sin 210 \Rightarrow 2x = 210 \Rightarrow x = 105$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} = \sin 2x = \sin 330 \Rightarrow 2x = 330 \Rightarrow x = 165$

$\sin 2x = a = 1 \Rightarrow 1 = \sin 2x = \sin 90 \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45$

Dolayısıyla üç tane çözümü vardır.

Not :



Şekildeki dört bölgeden herhangi birindeki açının kosinüs ve sinüsünün işareti, o bölgedeki bir noktanın apsis ve ordinatının işareti ile aynıdır.

Tanjant ve kotanjantın işareti ise sinüs ve kosinüsün işaretleri oranıdır.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, I. bölgede, hepsi (+)

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$, II. bölgede, sin (+) , diğerleri (-)

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, III. bölgede, sin (-) , cos (-) , tan (+) , cot (+)

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, IV. bölgede, cos (+) , diğerleri (-)

67. $\tan(\arccos\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5})$ ifadesinin değeri nedir?

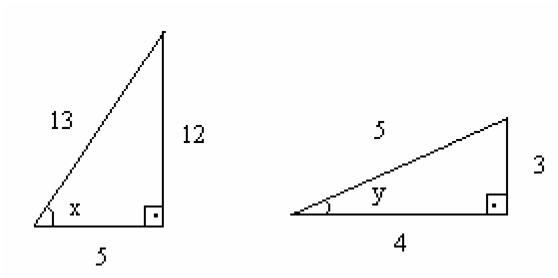
A) $\frac{-9}{16}$ B) $\frac{-63}{16}$ C) $\frac{9}{56}$ D) $\frac{63}{56}$

Çözüm 67

$\arccos\frac{5}{13} = x$ ve $\arcsin\frac{3}{5} = y$ olsun. $\tan(\arccos\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5}) = \tan(x + y) = ?$

$\arccos\frac{5}{13} = x \Rightarrow \cos(\arccos\frac{5}{13}) = \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{5}{13}$

$\arcsin\frac{3}{5} = y \Rightarrow \sin(\arcsin\frac{3}{5}) = \sin y \Rightarrow \sin y = \frac{3}{5}$



$\cos x = \frac{5}{13} \Rightarrow \tan x = \frac{12}{5}$

$\sin y = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan y = \frac{3}{4}$

$$\tan(\arccos\frac{5}{13} + \arcsin\frac{3}{5}) = \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y} = \frac{\frac{12}{5} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{12}{5}.\frac{3}{4}} = \frac{\frac{63}{20}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-63}{16}$$

68. Kutupsal koordinatları $(6\ ,\ \frac{2\pi}{3})$ olan karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3\sqrt{3} - 3i$ B) $3 - 3\sqrt{3}\ i$ C) $3 + 3\sqrt{3}\ i$ D) $-3 + 3\sqrt{3}\ i$

Çözüm 68

$r = 6$ ve $\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow Z = 6.(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow Z = 6.(-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow Z = -3 + i.3\sqrt{3} \Rightarrow Z = -3 + 3\sqrt{3}\ i$ elde edilir.

Not :

$Z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta)$ yazılışına karmaşık sayının kutupsal (trigonometrik) biçimi denir.

(r , θ) ikilisine Z karmaşık sayısının kutupsal koordinatları denir.

$r.(\cos\theta + i.\sin\theta) = r.\text{cis}\theta$ gösterimi kullanılır.

69. Kendisi hariç bütün pozitif bölenlerinin toplamı, kendisinden küçük olan sayılara *eksik sayı* denir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi eksik sayı değildir?

A) 2'nin kuvveti olan bir sayı
B) 3'ün kuvveti olan bir sayı
C) 10'un kuvveti olan bir sayı
D) Bir asal sayı

Çözüm 69

I. Yol

10'un kuvveti olan bir sayı olarak, 100 sayısını alalım.

Kendisi hariç pozitif bölenlerinin toplamını yazacak olursak.

$1 + 2 + 5 + 10 + 20 + 25 + 50 = 113$ olur.

($113 > 100$ olduğundan tanıma göre 100 sayısı eksik sayı değildir.)

Diğer seçeneklerdeki sayılar yapılan tanıma göre eksik sayılardır.

Not : a , b , c birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere, $A = a^m.b^n.c^p$ ise,

A nın pozitif bölenlerinin toplamı $= (1+a+a^2+\ldots+a^m).(1+b+b^2+\ldots+b^n).(1+c+c^2+\ldots+c^p)$

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^m) = \frac{a^{m+1}-1}{a-1}$$

$$(1 + b + b^2 + \ldots + b^n) = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$$

$$(1 + c + c^2 + \ldots + c^p) = \frac{c^{p+1}-1}{c-1}$$

II. Yol

A) 2'nin kuvveti olan bir sayı, $A = 2^m$ olsun.

A nın pozitif bölenlerinin toplamı = $(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^m)$

Kendisi hariç ($A = 2^m$) pozitif bölenlerinin toplamı = $(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1})$

$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1}) < 2^m \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2^m - 1}{2 - 1} < 2^m \quad \Rightarrow \quad 2^m - 1 < 2^m$ bulunur.

Bu durumda, $A = 2^m$ eksik sayıdır.

B) 3'ün kuvveti olan bir sayı, $B = 3^n$ olsun.

B nin pozitif bölenlerinin toplamı = $(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n)$

Kendisi hariç ($A = 2^m$) pozitif bölenlerinin toplamı = $(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1})$

$(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) < 3^n \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3^n - 1}{3 - 1} < 3^n \quad \Rightarrow \quad 3^n - 1 < 2.3^n$ bulunur.

Bu durumda, $B = 3^n$ eksik sayıdır.

C) 10'un kuvveti olan bir sayı, $C = 10^p$ olsun. ($C = 10^p = (2.5)^p = 2^p.5^p$)

C nin pozitif bölenlerinin toplamı = $(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^p).(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^p)$

Kendisi hariç ($C = 10^p = (2.5)^p = 2^p.5^p$) pozitif bölenlerinin toplamı =

$= [(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^p).(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^p)] - [2^p.5^p] < 2^p.5^p$

$= \left[(\dfrac{2^{p+1} - 1}{2 - 1}).(\dfrac{5^{p+1} - 1}{5 - 1}) \right] < 2.2^p.5^p \quad \Rightarrow \quad (2^{p+1} - 1).(5^{p+1} - 1) < 4.2.2^p.5^p$

$\Rightarrow \quad (2^{p+1} - 1).(5^{p+1} - 1) < 2^{p+3}.5^p \quad \Rightarrow \quad (2^{p+1} - 1) < 2^{p+3}$ ve $(5^{p+1} - 1) < 5^p$

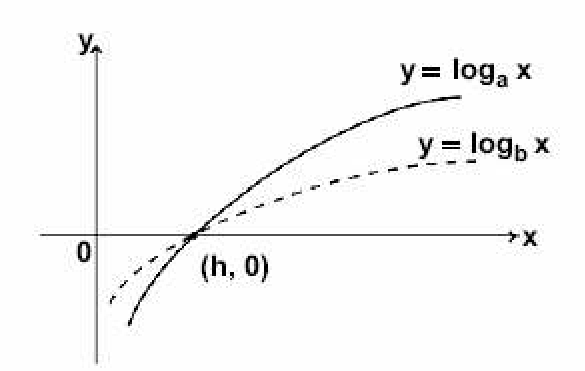
$(5^{p+1} - 1) < 5^p$ olamayacağı için $(p > 0)$, eksik sayı değildir.

D) Bir asal sayı, d olsun.

$d = 1.d \quad \Rightarrow$ Kendisi hariç pozitif bölenlerinin toplamı = 1 $\quad \Rightarrow \quad 1 < d$ bulunur.

Bu durumda, d asal sayısı eksik sayıdır.

70. a, b ve h $\in Z^+$ olmak üzere, x eksenini (h , 0) noktasında kesen $y = \log_b x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafikleri şekilde verilmiştir.



Grafiğe göre, aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>

A) h = 1 B) $\log_b 3 < \log_a 3$ C) $\log_b \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{2}$ D) b < a

Çözüm 70

$y = \log_b x$ $(b^y = x)$ $\Rightarrow$ (h , 0) $\Rightarrow$ $0 = \log_b h$ $\Rightarrow$ $b^\circ = h$ $\Rightarrow$ h = 1
veya
$y = \log_a x$ $(a^y = x)$ $\Rightarrow$ (h , 0) $\Rightarrow$ $0 = \log_a h$ $\Rightarrow$ $a^\circ = h$ $\Rightarrow$ h = 1

$\Big\}$ (h , 0) = (1 , 0)

$$\log_b 3 < \log_a 3 \Rightarrow \frac{\log 3}{\log b} < \frac{\log 3}{\log a} \Rightarrow \frac{1}{\log b} < \frac{1}{\log a} \Rightarrow \log a < \log b \Rightarrow a < b$$

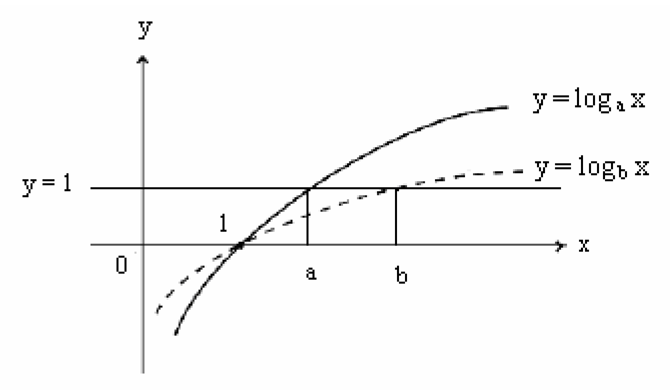
$$\log_b \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\log \frac{1}{2}}{\log b} < \frac{\log \frac{1}{2}}{\log a} \Rightarrow \frac{1}{\log b} < \frac{1}{\log a} \Rightarrow \log a < \log b \Rightarrow a < b$$

y = 1 doğrusu için,

$y = \log_b x$ $(b^y = x)$ $\Rightarrow$ x = b

$y = \log_a x$ $(a^y = x)$ $\Rightarrow$ x = a

a < b olduğu görülür.

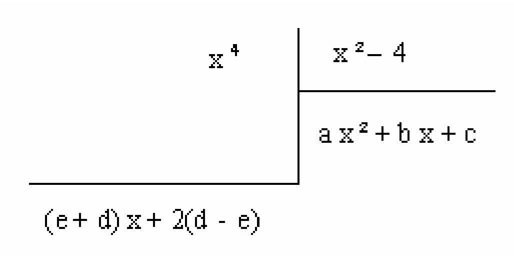


Not : $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$

71. $P(x) = x^4$ polinomu $x^2 - 4$ ile bölündüğünde,
bölüm $B(x) = ax^2 + bx + c$ ve kalan $K(x) = (e + d)x + 2(d - e)$ olduğuna göre,
$a + b + c + d + e$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 13 B) 8 C) 5 D) 0

Çözüm 71



$P(x) = (x^2 - 4).B(x) + K(x)$ olduğuna göre,

$x^4 = (x^2 - 4).(ax^2 + bx + c) + ((e + d)x + 2(d - e))$

$x^4 = [(ax^2.x^2 + bx.x^2 + c.x^2) – 4.ax^2 - 4.bx – 4.c] + (e.x + d.x + 2d - 2e))$

$x^4 = [a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 - 4a.x^2 - 4b.x – 4c + e.x + d.x + 2d – 2e]$

$x^4 = [a.x^4 + b.x^3 + (c – 4a).x^2 + (e + d – 4b).x + (2d – 2e – 4c)]$

$a = 1$
$b = 0$
$(c – 4a) = 0 \Rightarrow c = 4$
$(e + d – 4b) = 0 \Rightarrow e + d = 0 \Rightarrow e = -d$
$(2d – 2e – 4c) = 0 \Rightarrow d – e – 8 = 0 \Rightarrow d – e = 8 \Rightarrow d – (-d) = 8 \Rightarrow d = 4 , e = -4$

$a + b + c + d + e = 1 + 0 + 4 + 4 + (-4) = 5$ elde edilir.

72. Üçüncü dereceden bir reel katsayılı $P(x)$ polinomunun çarpanlarından biri $(x - 3)$ tür.
$P(x)$ polinomunun $(x^2 - 17).(x - 2)$ ile bölünmesinden elde edilen kalan 48 ise $P(x)$
polinomunun baş katsayısı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

Çözüm 72

Polinomların bölme kuralına göre, $x – 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ için $P(3) = 0$ olur.

Polinom üçüncü dereceden olduğundan, aynı dereceden başka polinoma bölünmesi sonucu,
kalan 48 olduğuna göre, bölen sabit bir sayı = A olsun.

$P(x) = [(x^2 - 17).(x - 2)].A + 48 \Rightarrow P(3) = [(3^2 - 17).(3 - 2)].A + 48 = 0$

$\Rightarrow (-8).A + 48 = 0 \Rightarrow A = 6$

$P(x) = [(x^2 - 17).(x - 2)].6 + 48 = 6.x^3 - 12.x^2 - 102.x + 252$

73. i sayısı, $i^2 = -1$ şartını sağlayan kompleks sayı ve $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}\,i$ olduğuna göre,

$x^3 + \frac{1}{x^3}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-6\sqrt{3}\ i$ B) $-3\sqrt{3}\ i$ C) $\sqrt{3}\ i$ D) $3\sqrt{3}\ i$

Çözüm 73

I. Yol

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}\,i \;\Rightarrow\; (x + \frac{1}{x})^3 = (\sqrt{3}\,i)^3 \;\Rightarrow\; x^3 + 3.x^2.\frac{1}{x} + 3.x.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 3\sqrt{3}\,i^3 = -3\sqrt{3}\,i$$

$$x^3 + 3.(x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3} = -3\sqrt{3}\,i \;\Rightarrow\; x^3 + \frac{1}{x^3} + 3.(\sqrt{3}\,i) = -3\sqrt{3}\,i \;\Rightarrow\; x^3 + \frac{1}{x^3} = -6\sqrt{3}\,i$$

II. Yol

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) = (x + \frac{1}{x}).(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}) = (x + \frac{1}{x}).(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1)$$

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) = (x + \frac{1}{x}).([(x + \frac{1}{x})^2 - 2.x.\frac{1}{x}] - 1) = (x + \frac{1}{x}).((x + \frac{1}{x})^2 - 3)$$

$$\Rightarrow\; (x^3 + \frac{1}{x^3}) = (\sqrt{3}\,i).((\sqrt{3}\,i)^2 - 3) = (\sqrt{3}\,i).(3.i^2 - 3) = \sqrt{3}\,i.(-6) = -6\sqrt{3}\,i$$ bulunur.

Not :

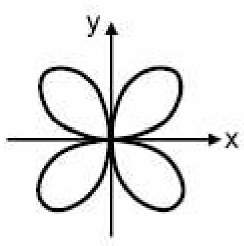
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b).(a^2 - a.b + b^2)$

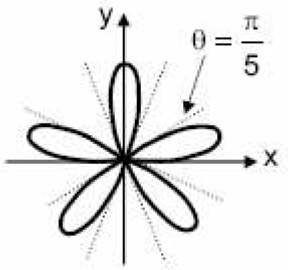
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

74. r = 2cos4θ denkleminin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

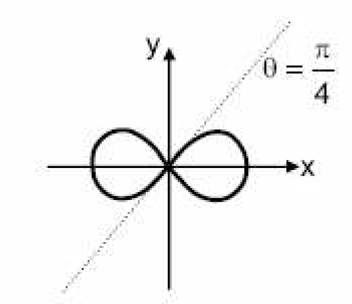
A)



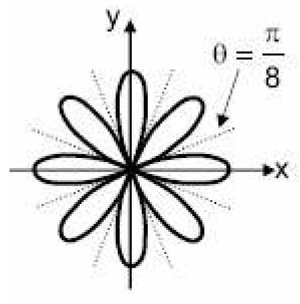
B)



C)



D)



Çözüm 74

r = 2.cos 4θ eğrisinin grafiğini çizelim.

I) Periyod = T = $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ olur, 2.cos (4θ + π) = -2.cos4θ olduğundan,

İncelemeyi, $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{4}$ e eşit uzunluktaki bir aralıkta yapmak yeterlidir.

$\frac{\pi}{4}$ e eşit uzunluktaki aralık $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ seçilebilir.

Bunun için inceleme aralığı olarak $[0, \frac{\pi}{8}]$ alınabilir ve kutupsal eksen simetrik eksenidir ve yalnız pozitif değerleri için incelemek yeterli olur.

II) r' = (2.cos 4θ)' = -8.sin 4θ

-8.sin 4θ = 0   ⇒   sin 4θ = 0

$$\Rightarrow \quad 4\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2.\cos 4\theta = 2.\cos 4.0 = 2.\cos 0 = 2$$

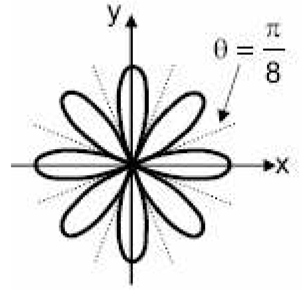
$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad r = 2.\cos 4\theta = 2.\cos 4\frac{\pi}{4} = 2.\cos \pi = -2$$

III) r = 2.cos 4θ = 0 ⇒ cos 4θ = 0 ⇒ $4\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$, $4\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8}$

IV)

θ	0		$\frac{\pi}{8}$
r'		- - -	
r	2		0

V)



75. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{\sin(x - \frac{\pi}{3})}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) 0 D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Çözüm 75

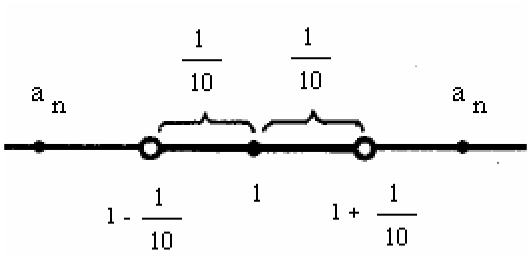
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{\sin(x - \frac{\pi}{3})} = \frac{2\cos\frac{\pi}{3} - 1}{\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})} = \frac{2.\frac{1}{2} - 1}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$$ belirsizliğidir.

L'Hospital kuralı uygulanırsa, $$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin x}{\cos(x - \frac{\pi}{3})} = \frac{-2.\sin\frac{\pi}{3}}{\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})} = \frac{-2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos(0)} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

76. $(a_n) = (\dfrac{n^2 + 1}{n^2})$ dizisinin, 1 sayısının $\dfrac{1}{10}$ komşuluğu dışında kaç terimi vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Çözüm 76



1 ' in $\dfrac{1}{10}$ komşuluğu dışındaki bir terim ile 1 arasındaki farkın $\dfrac{1}{10}$ dan büyük veya eşit olması gerekir.

Yani, $|a_n - 1| \geq \dfrac{1}{10}$ eşitsizliğini sağlayan sayma sayılarının sayısı kadar terim bu komşuluğun dışındadır.

$$|a_n - 1| \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \left|1 + \frac{1}{n^2} - 1\right| \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2}\right| \geq \frac{1}{10} \Rightarrow 0 < n^2 \leq 10$$

$\Rightarrow$ n = 1 , 2 , 3 olur. O halde, 3 terim dışarıdadır.

77. Bir ağacın dikildikten t yıl sonraki boyu f(t) = $\sqrt{t+9}$ (metre) fonksiyonu ile veriliyor.

Bu ağacın boyunun değişim hızı ilk defa kaçıncı yılda 0,1 m/yıl'ın altına düşer?

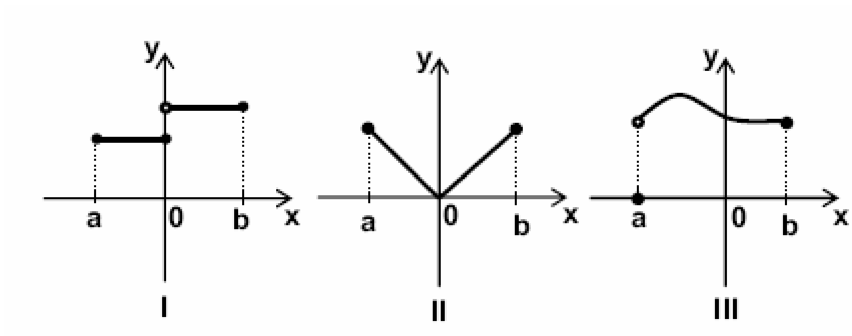
A) 18 B) 17 C) 15 D) 14

Çözüm 77

$f'(t) = (\sqrt{t+9})' = \dfrac{1}{2\sqrt{t+9}} < 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{t+9}} < \dfrac{1}{10} \Rightarrow 10 < 2\sqrt{t+9}$

$\Rightarrow 5 < \sqrt{t+9} \Rightarrow 5^2 < t+9 \Rightarrow 25 - 9 < t \Rightarrow t > 16$ (ilk defa 17)

78.



Yukarıda verilen grafiklerden hangileri (a , b) aralığında türevlenebilir bir fonksiyona ait değildir?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II D) II ve III

Çözüm 78

I) Fonksiyon sürekli olmadığından, türevlide değildir.

II) Fonksiyon 0 noktasında sürekli olduğu halde bu noktada türevli değildir.
Grafikde, eğimler birbirinden farklıdır.

III) Fonksiyon (a , b) aralığında sürekli ve bu aralıkta fonksiyona teğet çizilebilir.
Bu teğetin eğimi türeve eşit olacağından, fonksiyon türevlenebilir.

79. $xy^2 - xy - 5x + 1 = 0$ bağıntısı ile verilen fonksiyonun y türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{-y^2+y+5}{2.x.y-x}$ B) $\dfrac{x.y^2-x.y-5}{x^2.y-x}$ C) $\dfrac{y^2-y-5}{2.x.y-x}$ D) $\dfrac{2.x.y-x}{x.y^2-y}$

Çözüm 79

Kapalı fonksiyonun türevini alalım. y’ = $-\dfrac{f_x'}{f_y'}$ $\Rightarrow$ y’ = $-\dfrac{(y^2-y-5)}{2.x.y-x} = \dfrac{-y^2+y+5}{2.x.y-x}$ olur.

Not : Kapalı fonksiyonların türevi

f(x , y) = 0 $\Rightarrow$ y’ = $-\dfrac{f_x'}{f_y'}$ [f ’$_x$ = x’e göre türev (y sabit) , f ’$_y$ = y’ye göre türev (x sabit)]

80. f(x) = $(x-1)^{\arctan\frac{x}{2}}$ ise f ’(2) nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{\pi}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 2 D) π

Çözüm 80

y = $(x-1)^{\arctan\frac{x}{2}}$ yazalım ve her iki yanın logaritmasını alalım.

lny = ln$(x-1)^{\arctan\frac{x}{2}}$ $\Rightarrow$ lny = (arctan$\dfrac{x}{2}$).ln(x - 1) [her iki tarafın türevini alalım]

(lny)’ = (arctan$\dfrac{x}{2}$)’.ln(x - 1) + (ln(x - 1))’. (arctan$\dfrac{x}{2}$)

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{(\frac{x}{2})'}{1+(\frac{x}{2})^2}\right).\ \ln(x-1) + \frac{(x-1)'}{x-1}.(\arctan\frac{x}{2}) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}\right).\ \ln(x-1) + \frac{1}{x-1}.(\arctan\frac{x}{2})$$

$$\frac{y'}{y} = (\frac{2}{4+x^2}).\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}.(\arctan\frac{x}{2})$$

$$y' = ((x-1)^{\arctan\frac{x}{2}}).[\ (\frac{2}{4+x^2}).\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}.(\arctan\frac{x}{2})\ ]$$

$$f'(2) = ((2-1)^{\arctan\frac{2}{2}}).[\ (\frac{2}{4+2^2}).\ln(2-1) + \frac{1}{2-1}.(\arctan\frac{2}{2})\ ] = 1.[0+\frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{4}$$

81. x = 1 − t² ve y = t³ parametrik denklemleri verildiğine göre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ aşağıdakilerden hangisidir?

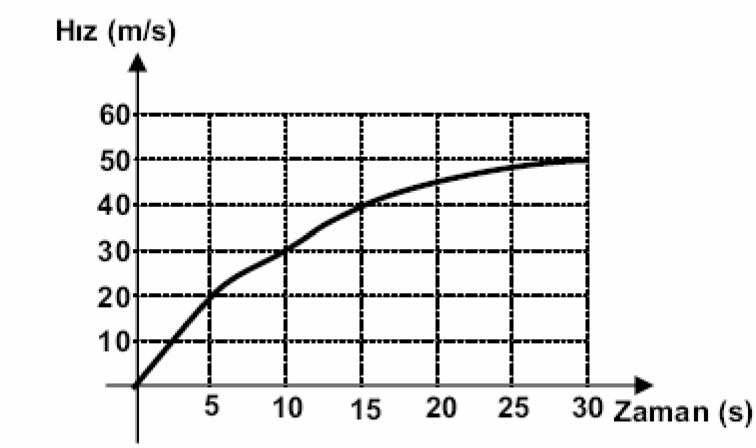
A) $\frac{-3t}{2}$ B) $\frac{3}{t}$ C) $\frac{-3}{2}$ D) $\frac{3}{4t}$

Çözüm 81

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(t^3)'}{(1-t^2)'} = \frac{3t^2}{-2t} = \frac{-3t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{-3t}{2}\right)'}{(1-t^2)'} = \frac{\frac{-3}{2}}{-2t} = \frac{3}{4t}$$ elde edilir.

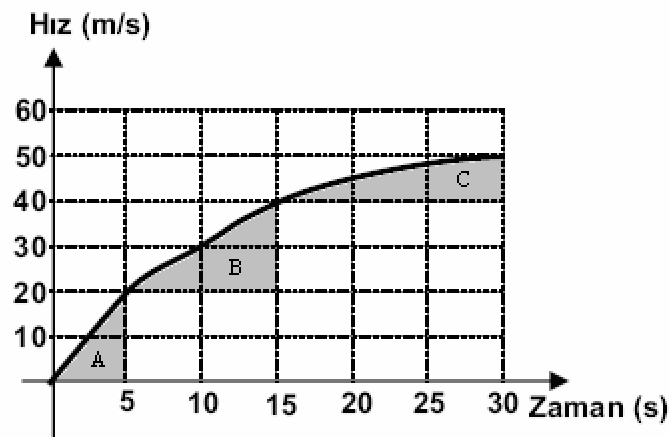
82.



Verilen grafik bir bisikletin hareketine ait hız-zaman grafiğidir.
Aşağıdakilerden hangisi bu bisikletin ilk 30 saniyede aldığı yolun en yakın tahminidir?

A) 550 m B) 1050 m C) 1550 m D) 2050 m

Çözüm 82



Alan A = $\dfrac{20.5}{2}$ = 50

Alan B = $\dfrac{(40-20).(15-5)}{2}$ = 100

Alan C = $\dfrac{(50-40).(30-15)}{2}$ = 75

1 dikdörtgenin alanı = 5.10 = 50

Alınan yolun tamamı = 16.50 + 50 + 100 + 75 = 1025 m (tahmini)

Eğrinin altındaki alan hareketlinin aldığı yolu ifade eder. (x = v.t)
Hareketlinin A , B , C bölgelerinde aldığı yolu hesaplarken, hareketlinin hızını, düzgün hızlanan olarak hesap ettik.

83. $\int_2^5 \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}$ dx integrali aşağıdakilerden hangisidir?

A) e(2e − 1) B) e²(2e − 1) C) e(e² − 1) D) 2e(e − 1)

Çözüm 83

$\int_2^5 \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}$ dx (Değişken değiştirerek integral almak)

$\sqrt{x-1} = u$ olsun. $(\sqrt{x-1})' = u' = \dfrac{du}{dx}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2u}$ $\Rightarrow$ dx = 2u du olur.

x = 5 için, u = $\sqrt{5-1}$ $\Rightarrow$ u = 2

x = 2 için, u = $\sqrt{2-1}$ $\Rightarrow$ u = 1

$\int_2^5 \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}$ dx = $\int_1^2 \dfrac{e^u}{u}$ 2u du = $\int_1^2 2e^u$ du = 2.($e^u \Big|_1^2$) = 2.(e² - e) = 2e.(e - 1) elde edilir.

84. Kimsesiz öğrenciler adına düzenlenen bir kermeste elde edilen gelirin değişim hızı

f(t) = $4000.e^{\frac{t}{10}}$ (YTL/gün) fonksiyonu ile verilmektedir.

t, kermesin basından itibaren açık olduğu gün sayısını gösterdiğine göre, kermesin ilk 10 gününde elde edilen toplam gelir kaç YTL'dir? (e sayısını 2,7 alınız.)

A) 6800 B) 10800 C) 68000 D) 108000

Çözüm 84

Kermeste elde edilen toplam gelir, [0 , 10] aralığında fonksiyonun grafiğinin x ekseni ile sınırladığı bölgenin alanı ile ifade edilmektedir.

Buna göre, $\int_0^{10} f(t)\,dt = \int_0^{10} 4000.e^{\frac{t}{10}}\,dt = 4000.\int_0^{10} e^{\frac{t}{10}}\,dt$

$\frac{t}{10}$ = u diyelim. t = 10 u $\Rightarrow$ dt = 10 du olur.

t = 0 için, u = 0

t = 10 için, u = 1

$4000.\int_0^{10} e^{\frac{t}{10}}\,dt = 4000.\int_0^{1} e^{u}\,10\,du = 4000.10.\int_0^{1} e^{u}\,du = 40000.[e^u \,\Big|_0^1] = 40000.(e^1 - e^0)$

$\Rightarrow$ 40000.(2,7 – 1) = 40000.(1,7) = 68000 elde edilir.

85. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t.\cos^3 t\,dt$ integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\frac{2}{35}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{5}$

Çözüm 85

$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t.\cos^3 t \, dt \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 t.(\cos^2 t.\cos t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^4 t.(1 - \sin^2 t).\cos t \, dt$

sin t = u dönüşümü yapılırsa, (sin t)’ = (u)’ $\Rightarrow$ cos t = $\dfrac{du}{dt}$ $\Rightarrow$ cos t dt = du

t = 0 için, sin 0 = 0 ve t = $\dfrac{\pi}{2}$ için, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

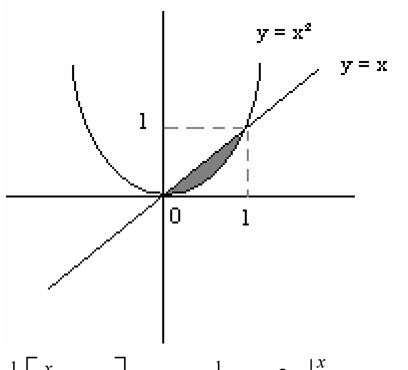
$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t.(1 - \sin^2 t).\cos t \, dt = \int_0^1 u^4.(1 - u^2)\, du = \int_0^1 (u^4 - u^6)\, du = \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Rightarrow \quad = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) - 0 = \frac{2}{35} \quad \text{elde edilir.}$$

86. y = x doğrusu ve y = x² parabolü ile sınırlanan bölge A olduğuna göre, $\iint_A y \, dA$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{1}{10}$ D) $\dfrac{1}{15}$

Çözüm 86



y = x doğrusu ve y = x² parabolün kesişme noktaları,

x = x² $\Rightarrow$ x.(x - 1) = 0 $\Rightarrow$ x = 0 , y = 0 , (0 , 0)
$\Rightarrow$ x = 1 , y = 1 , (1 , 1)

$$\iint_A y \, dA = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} y \, dy \right] dx$$

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} y \, dy \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_{x^2}^{x} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - 0 \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

Not : S = $\iint\limits_A f(x,y)$ dA integralini hesaplamak için,

Önce x i sabit tutup y ye göre, $\int f(x,y)$ dy belirli integrali hesaplanır.
Bu integralin sonucu x e bağlı olduğundan bu sonuç x in fonksiyonudur.
Bu fonksiyona g (x) diyelim. g(x) = $\int f(x,y)$ dy

Sonra g(x) fonksiyonunun integrali hesaplanarak sonuç bulunur.

$$S = \iint\limits_A f(x,y)\,dA = \int g(x)\,dx = \int \left[\int f(x,y)\,dy \right] dx$$

Not : İki katlı integralin hesaplanmasında integralleme sırası değişebilir.

87. $\int_0^1 \int_1^{x^2} \int_x^{x+y}$ dz dy dx integralinin değeri asağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{-2}{5}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{5}{8}$ D) $\dfrac{3}{2}$

Çözüm 87

$$\int_0^1 \int_1^{x^2} \int_x^{x+y} dz\,dy\,dx = \int_0^1 (\int_1^{x^2} (\int_x^{x+y} dz)\,dy)\,dx = \int_0^1 (\int_1^{x^2} (z \Big|_x^{x+y})\,dy)\,dx = \int_0^1 (\int_1^{x^2} ([(x+y) - x])\,dy)\,dx$$

$$= \int_0^1 (\int_1^{x^2} y\,dy)\,dx = \int_0^1 (\frac{y^2}{2} \Big|_1^{x^2})\,dx = \int_0^1 (\frac{(x^2)^2}{2} - \frac{1}{2})\,dx = \int_0^1 (\frac{(x^2)^2}{2} - \frac{1}{2})\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4 - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[(\frac{x^5}{5} - x) \Big|_0^1] = \frac{1}{2}[(\frac{1}{5} - 1) - (0 - 0)] = \frac{1}{2}.(\frac{-4}{5}) = \frac{-2}{5}$$

88. $y' - y = x$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$ koşulunu sağlayan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2.e^x - x - 1$ B) $y = e^{2x} + x - 1$ C) $y = 2.e^x + x + 1$ D) $y = e^{2x} - x$

Çözüm 88

I. Yol

$y' - y = x$ lineer diferansiyel denkleminde "sabitin değişimi yöntemi" kullanılırsa,

önce, $x = 0$ alınır ve böylece elde edilen $y' - y = 0$ diferansiyel denklemi integre edilirse,

$$y' - y = 0 \Rightarrow y' = y \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} = \int 1 \Rightarrow \ln y = x + ç \Rightarrow y = e^{x+ç}$$

$\Rightarrow$ $y = e^{ç}.e^x$ ($e^{ç}$, keyfi sabit olduğundan $e^{ç}$ yerine c yazarsak)

$\Rightarrow$ $y = c.e^x$ bulunur.

c keyfi sabiti yerine $c(x)$ fonksiyonu alınır ve böylece elde edilen $y = c(x).e^x$ fonksiyonu

$y' - y = x$ diferansiyel denkleminde yerine konursa,

$$(c(x).e^x)' - (c(x).e^x) = x \Rightarrow [c(x)]'.e^x + [e^x]'.c(x) - (c(x).e^x) = x$$

$$\Rightarrow c'(x).e^x + e^x.c(x) - (c(x).e^x) = x$$

$$\Rightarrow c'(x).e^x = x \Rightarrow c'(x) = \frac{x}{e^x} \Rightarrow c'(x) = x.e^{-x} \text{ elde edilir.}$$

$c'(x) = x.e^{-x}$ integrali alınırsa, $\int c'(x) = \int x.e^{-x}\,dx$ kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\left.\begin{array}{l} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^{-x}\,dx = dv \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\} c(x) = -x.e^{-x} - \int -e^{-x}.dx \Rightarrow c(x) = -x.e^{-x} - e^{-x} + c_1$$

$c(x)$ fonksiyonu, $y = c(x).e^x$ de yerine yazılırsa,

$y = (-x.e^{-x} - e^{-x} + c_1).e^x \Rightarrow y = -x - 1 + c_1.e^x$ bulunur.

$y(0) = 1$ olduğundan, $1 = -0 - 1 + c_1.e^0 \Rightarrow c_1 = 2$ olur.

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü, $y = 2e^x - x - 1$ elde edilir.

II. Yol

$y' - y = x$ lineer diferansiyel denkleminde, $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ olmak üzere,

$y = u.v$ dönüşümü yapılırsa,

$$y' - y = x \quad \Rightarrow \quad (u.v)' - u.v = x \quad \Rightarrow \quad (u'.v + v'.u) - u.v = x \quad \Rightarrow \quad (u' - u).v + v'.u = x$$

u fonksiyonu, $(u' - u) = 0$ olacak şekilde belirlenirse,

$$u' = u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{u'}{u} = \int 1 \quad \Rightarrow \quad \ln u = x + ç \quad \Rightarrow \quad u = e^{x+ç}$$

$\Rightarrow \quad u = e^{ç}.e^{x}$ ($e^{ç}$, keyfi sabit olduğundan $e^{ç}$ yerine c yazarsak)

$\Rightarrow \quad u = c.e^{x}$ (c keyfi sabit) bulunur.

u nun değeri, $(u' - u).v + v'.u = x$ yerine yazılırsa,

$$((c.e^{x})' - c.e^{x}).v + v'.(c.e^{x}) = x \quad \Rightarrow \quad (c.e^{x} - c.e^{x}).v + v'.(c.e^{x}) = x \quad \Rightarrow \quad v'.c.e^{x} = x$$

$$\Rightarrow \quad v' = \frac{1}{c}.x.e^{-x}$$

İntegrali alınırsa, $\int v' = \int \frac{1}{c}.x.e^{-x}\,dx = \frac{1}{c}\int x.e^{-x}\,dx$ (kısmi integral uygulanırsa)

$$\left.\begin{array}{l} x = s \quad \Rightarrow \quad dx = ds \\ \\ e^{-x}\,dx = dt \quad \Rightarrow \quad t = -e^{-x} \end{array}\right\} \quad v = \frac{1}{c}.[-x.e^{-x} - \int -e^{-x}.dx] \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{c}.[-x.e^{-x} - e^{-x} + C]$$

O halde, lineer diferansiyel denklemin çözümü, $y = u.v$

$$\Rightarrow \quad y = (c.e^{x}).[\frac{1}{c}.(-x.e^{-x} - e^{-x} + C)] \quad \Rightarrow \quad y = e^{x}.(-x.e^{-x} - e^{-x} + C)$$

$\Rightarrow \quad y = -x - 1 + C.e^{x}$ bulunur.

$y(0) = 1$ olduğundan, $1 = -0 - 1 + C.e^{0} \quad \Rightarrow \quad C = 2$ olur.

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü, $y = 2e^{x} - x - 1$ elde edilir.

Not : Kısmi (parçalı) integrasyon yöntemi

İki fonksiyonun çarpımının integralinin hesaplanmasında genelde, kısmi integrasyon yöntemi kullanılır.

u(x) ve v(x) türevlenebilir fonksiyonlar ise çarpımın türevi formülüne göre,

$(u.v)' = u'.v + v'.u$ yazarız.

Her iki tarafı dx ile çarpıp integrallersek, $\int (u.v)'dx = \int u'.v\,dx + \int v'.u\,dx$ bulunur.

Belirsiz integralin tanımından, $\int (u.v)'\,dx = u.v$ yazılabilir.

Bunu dikkate alarak, $u.v = \int u.v'\,dx + \int v.u'\,dx$ formülünü elde ederiz.

$u' = \dfrac{du}{dx} \Rightarrow u'\,dx = du$, $v' = \dfrac{dv}{dx} \Rightarrow v'\,dx = dv$ olduğundan,

$u.v = \int u\,dv + \int v\,du \quad \Rightarrow \quad \int u\,dv = u.v - \int v\,du$ elde edilir.

89. Aşağıdaki ifadelerden hangileri <u>yanlıştır?</u>

I- Herhangi iki rasyonel sayının arasında en az bir reel sayı vardır.

II- Rasyonel sayılar kümesi sayılamazdır.

III- İrrasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalı değildir.

IV- İrrasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir.

A) II – III B) I – IV C) III – IV D) II – IV

Çözüm 89

I) Herhangi iki rasyonel sayının arasında en az bir reel sayı vardır.

$(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}) \Rightarrow (\frac{2}{2})$ genişletirsek $\Rightarrow (\frac{4}{10}, \frac{6}{10}) \Rightarrow \frac{5}{6}$

II) Rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir.

Q = {x : x = $\frac{a}{b}$; a, b $\in$ Z ve b $\neq$ 0; a ile b aralarında asal }

III) İrrasyonel sayılar toplam altında kapalı değildir.

$\sqrt{2}$ irrasyonel ve $-\sqrt{2}$ de irrasyoneldir. Fakat , $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ olduğunda “0” rasyoneldir.

IV) İrrasyonel sayılar kümesi sayılamazdır.

$\sqrt{2}$, π , e , …..Her irrasyonel sayı, devirli olmayan sonsuz ondalıklı bir sayıdır.

Sonuç olarak seçeneklerden II – IV yanlıştır.

Not :

Rasyonel Sayılar Kümesi , (Q)

Q = {x : x = $\frac{a}{b}$; a, b $\in$ Z ve b $\neq$ 0; a ile b aralarında asal } şeklinde gösterebiliriz.

İrrasyonel Sayılar Kümesi , (Q’)

Gerçek (reel) Sayılar Kümesi , (Q $\cup$ Q’)

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayıların birleşim kümesine gerçek (reel) sayılar kümesi denir.

90. Z_8 toplamsal grubunda $\bar{3}$ nın mertebesi kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

Çözüm 90

Toplama işleminde (Z_8 de) birim eleman 0 olduğuna göre,

$\bar{3} + \bar{3} + \bar{3} + \ldots + \bar{3} = n.\bar{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8.3 = 0$ olduğundan,

Z_8 toplamsal grubunda $\bar{3}$ nın mertebesi = 8 bulunur.

Not :

Bir G grubunun elemanlarının sayısına G nin mertebesi denir ve $|\,G\,|$ ile gösterilir.

G bir grup, $a \in G$ olsun. $a^n = e$ olacak şekilde bir en küçük pozitif n doğal sayısı varsa bu sayıya a nın derecesi denir ve $|\,a\,|$ ile gösterilir.

Böyle bir n sayısı yoksa $|\,a\,| = \infty$ yazılır.

Başka bir ifadeyle,

Z_m de, birim eleman e olmak üzere, bir x elemanı için, $x^n = e$ ise n sayısına, x in mertebesi denir.

91. Aşağıdakilerden hangisi düzlemde bir doğru denklemi belirtir?

A) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x \\ 3 & 1 & y \end{vmatrix} = 0$ B) $\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 1 & y \end{vmatrix} = 0$ C) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix} = 0$ D) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & y \end{vmatrix} = 0$

Çözüm 91

A) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x \\ 3 & 1 & y \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{array} \right| \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array}$ = 1.(-1).y + 2.1.0 + 3.1.x - 2.1.y - 1.1.x - 3.(-1).0

$\Rightarrow$ = -y + 3x - 2y – x = 2x – 3y = 0 (doğru denklemi)

B) $\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 1 & y \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc} x & y & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 1 & y \\ x & y & 0 \\ 2 & 3 & x \end{array} \right| \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array}$ = x.3.y + 2.1.0 + (-1).y.x – 2.y.y – x.1.x – (-1).3.0

$\Rightarrow$ = 3xy – xy – 2y² - x² = 2xy – 2y² - x² = 0

C) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix}$ = 0 (1. sütundaki terimler 0 olduğuna göre determinantı = 0 dır.)

D) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & y \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & y \\ x & y & 1 \\ 1 & 2 & x \end{array} \right| \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array}$ = x.2.y + 1.0.1 + (-1).y.x – 1.y.y – x.0.x – (-1).2.1

$\Rightarrow$ 2xy – xy – y² + 2 = xy – y² + 2 = 0

Not : İçerisinde kareli terim ve x.y ‘li terim olmayan determinant, doğru denklemi olacaktır.

Not : Bir determinantın, herhangi bir satırı ya da sütunundaki elemanların hepsi sıfır ise, bu determinantın değeri sıfırdır.

92. Aşağıdakilerden hangisi $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin bir özdeğeridir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Çözüm 92

$|A_{2x2} - c.I_{2x2}| = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} - c.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-c & 1 \\ 6 & 2-c \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-c & 1 \\ 6 & 2-c \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ $[6.1 - (1 - c).(2 - c)] = 6 – (2 – 3c + c^2) = c^2 - 3c - 4 = 0$

$c^2 - 3c - 4 = 0$ denkleminin kökleri özdeğerlerdir.

$\Rightarrow$ $(c - 4).(c + 1) = 0 \Rightarrow c = 4$, $c = -1$ bulunur.

Not :

A bir kare matris ve I aynı mertebeden birim matris olmak üzere $|A – c.I| = 0$ denkleminin köklerine A matrisinin öz değerleri (veya karakteristik değeri) denir.

A matrisi, özdeğerini bulmak istediğimiz matris,

c, A matrisinin bir özdeğeri $\Rightarrow$ $|A_{nxn} - c.I_{nxn}| = 0$ (polinomunun kökleri)

I, birim matris $\Rightarrow$ $I_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

93. $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, R^3 ün standart bazı olmak üzere, $T : R^3 \to R^3$ lineer dönüşümü için $T(\vec{e_1}) = (-3, 2, 5)$, $T(\vec{e_2}) = (2, -1, 0)$, $T(\vec{e_3}) = (-5, 3, 5)$ dır.

T dönüşümüne karşılık gelen matrisin rankı nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Çözüm 93

I.Yol

R^3 de standart tabanın, $E = \{ e_1 = (1, 0, 0) , e_2 = (0, 1, 0) , e_3 = (0, 0, 1) \}$ olduğunu biliyoruz.

$$\left.\begin{array}{l} T(\vec{e_1}) = (-3, 2, 5) \\ T(\vec{e_2}) = (2, -1, 0) \\ T(\vec{e_3}) = (-5, 3, 5) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} T(x , y , z) = x.\, T(\vec{e_1}) + y.\, T(\vec{e_2}) + z.\, T(\vec{e_3}) \\ \qquad = x.(-3 , 2 , 5) + y.(2 , -1 , 0) + z.(-5 , 3 , 5) \\ \\ T(x , y , z) = (-3x + 2y -5z , 2x - y + 3z , 5x + 5z) \end{array}$$

T dönüşüm matrisi, $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ olur.

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det T = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc} -3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

$= [(-3).(-1).5 + 2.0.(-5) + 5.2.3] - [2.2.5 + (-3).0.3 + 5.(-1).(-5)] = 45 - 45 = 0$ olduğundan,

T matrisinin rankı = rank(T) = 3 olamaz.

2x2 türündeki alt matrisi, $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3).(-1) - 2.2 = -1 \neq 0$ olduğundan, rank(T) = 2 olur.

Not : Bir Matrisin Rankı

A, mxn türünde bir matris olsun.A nın determinantları sıfırdan farklı olan kare alt matrislerinden en büyük mertebeli olanın mertebesine A nın rankı denir ve rank(A) ile gösterilir.

Not : Bir Matrisin Rankı

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırları sayısına A matrisinin rankı denir ve r(A) ile gösterilir.

Not :

Bir determinantın bir satırındaki ya da bir sütunundaki elemanlar, $k \in R$ ile çarpılıp başka bir satıra ya da sütuna karşılıklı olarak eklenirse, determinantın değeri değişmez.

II.Yol

R^3 de standart tabanın, E = { e_1 = (1, 0, 0) , e_2 = (0, 1, 0) , e_3 = (0, 0, 1) } olduğunu biliyoruz.

$$\left.\begin{aligned} T(\vec{e_1}) &= (-3, 2, 5) \\ T(\vec{e_2}) &= (2, -1, 0) \\ T(\vec{e_3}) &= (-5, 3, 5) \end{aligned}\right\} \quad \text{T dönüşüm matrisi} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a.1+b.0+c.0 \\ d.1+e.0+f.0 \\ g.1+h.0+k.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a = -3 , d = 2 , g = 5

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a.0+b.1+c.0 \\ d.0+e.1+f.0 \\ g.0+h.1+k.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b = 2 , e = -1 , h = 0

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a.0+b.0+c.1 \\ d.0+e.0+f.1 \\ g.0+h.0+k.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ f \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c = -5 , f = 3 , k = 5

$$\text{T dönüşüm matrisi} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

T dönüşüm matrisinin, 2. satırını (2) ile çarpıp, 1.satıra ekleyelim.
1. satırı (-5) ile çarpıp, 3. satıra ekleyelim.
1. satırı (-2) ile çarpıp, 2. satıra ekleyelim.

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sonuç olarak, T dönüşüm matrisinin rankı = rank(T) = 2 olur.

Not : Lineer Dönüşümler

T = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Lineer dönüşüm matrisi, A(x_1 , y_1) noktasını K(x , y) noktasına dönüştürüyorsa,

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ şeklinde gösterilir.

94. $x^2 + y^2 = 5$ denkleminin belirttiği eğrinin (−1, 2) noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2y − x + 1 = 0 B) 2y − x −5 = 0 C) y − 2x − 5 = 0 D) y − 2x + 4 = 0

Çözüm 94

I. Yol

$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x_0.x + y_0.y = 5$ teğet denkleminde (x_0 , y_0) = (-1 , 2) noktası yazılırsa,

(-1).x + 2.y = 5 $\Rightarrow$ 2y – x – 5 = 0 teğet denklemi bulunur.

II. Yol

$x^2 + y^2 - 5 = 0$ kapalı fonksiyonunun türevini alalım. $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x'}{f_y'} = -\dfrac{2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$

Türevde, x = -1 , y = 2 değerleri, yerine yazıldığında, teğetin eğimi bulunur.

$y' = -\dfrac{(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$ (teğetin eğimi)

(−1, 2) noktasındaki teğetinin denklemi, teğetin eğimi = $\dfrac{1}{2}$ olduğuna göre,

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{y-2}{x-(-1)} \Rightarrow$ 2y – 4 = x + 1 $\Rightarrow$ 2y – x – 5 = 0 bulunur.

III. Yol

$x^2 + y^2 = 5$ çember denkleminin merkezi O(0 , 0) olsun.

(−1, 2) noktasında çember üzerinde olduğuna göre,

iki noktası bilinen doğrunun eğiminden, $m = \dfrac{2-0}{(-1)-0} = -2$ elde edilir.

$m_t . m_n = -1 \Rightarrow m_t.(-2) = -1 \Rightarrow m_t = \dfrac{1}{2}$

(−1, 2) noktasındaki teğetinin denklemi, teğetin eğimi $= \dfrac{1}{2}$ olduğuna göre,

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{y-2}{x-(-1)} \Rightarrow 2y - 4 = x + 1 \Rightarrow 2y - x - 5 = 0$ bulunur.

95. A(3 , 1 , 3) noktasından geçen ve $2x + y - z = 1$ düzlemine dik olan doğrunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3t , t , 3t) B) (3 + 2t , 1 + t , 3 − t) C) (2t + 1 , t , t + 2) D) (2t − 1 , t , 1 − t)

Çözüm 95

$2x + y - z = 1$ düzleminin normali, n = (2 , 1 , -1)

Doğrunun düzleme dik olması için, v // n olmalıdır. v // n $\Rightarrow \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{1} = \dfrac{c}{-1} = k$

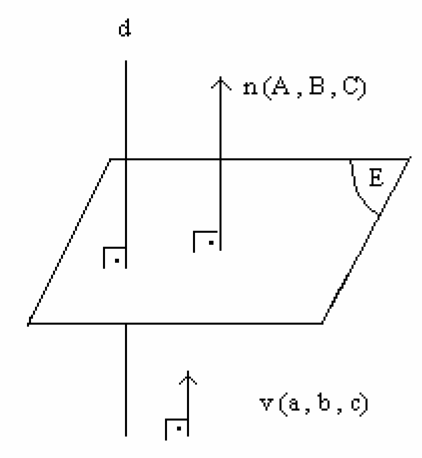
A(3 , 1 , 3) dan geçen ve doğrultmanı v(2k , k , -k) olan doğrunun denklemi,

$\dfrac{x-3}{2k} = \dfrac{y-1}{k} = \dfrac{z-3}{-k}$ bulunur.

$\dfrac{x-3}{2k} = \dfrac{y-1}{k} = \dfrac{z-3}{-k} = m \Rightarrow x = 2.k.m + 3$, $y = k.m + 1$, $z = 3 - k.m$

k.m = t olsun. $\Rightarrow x = 2t + 3$, $y = t + 1$, $z = 3 - t \Rightarrow (3 + 2t , 1 + t , 3 - t)$

Not : Doğrunun düzleme dik olma şartı



d doğrusunun E düzlemine dik olması için gerek ve yeter şart doğrunun v = (a , b , c) doğrultman vektörünün, düzlemin n = (A , B , C) normaline paralel olmasıdır.
İki vektörün paralel olması için karşılıklı bileşenlerinin orantılı olması gerek ve yeterdir.

E : Ax + By + Cz + D = 0

d : $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$

Dolayısıyla, $d \perp E \Leftrightarrow \dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B} = \dfrac{c}{C}$ olur.

96. Bir torbanın içindeki toplar, 1'den başlanarak numaralandırılmıştır. Torbadan rastgele çekilen bir topun üzerindeki sayının 7'den büyük bir asal sayı olma olasılığı $\dfrac{1}{6}$ 'dir.
Buna göre, torbanın içinde <u>en az</u> kaç tane top vardır?

A) 11 B) 13 C) 17 D) 18

Çözüm 96

Torbadaki top sayısı = x olsun. {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , …………., }

7 den büyük asal sayılar = {11 , 13 , 17 , ….., } y tane olsun.

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow x = 6y \Rightarrow y = 1$ için $x = 6.1 = 6$

(çekilen bir topun üzerindeki sayının 7'den büyük olacağından)

$\Rightarrow y = 2$ için $x = 6.2 = 12$

(1 ile 12 arasında, 7'den büyük asal sayı , 2 tane olmadığından)

$\Rightarrow y = 3$ için $x = 6.3 = 18$ tane top vardır. ({11 , 13 , 17})

97. Sınıf başkanının kız olduğu bir sınıfta, erkeklerin sayısı kızların sayısından 3 fazladır. Bu sınıftan, içinde sınıf başkanının yer alacağı 2 kız ve 1 erkekten oluşan 3 kişilik bir komisyon, 117 farklı şekilde oluşturulabilmektedir.

Buna göre, sınıf mevcudu kaç kişidir?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25

Çözüm 97

Erkeklerin sayısı = e = k + 3 , Kızların sayısı = k

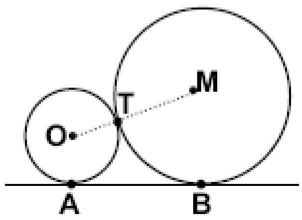
Sınıf başkanının kız olduğu göre, komisyon için, kalan kızlardan (k - 1), 1 ve erkeklerden 1 kişi seçmeliyiz.

$\binom{k-1}{1}.\binom{e}{1} = 117 \Rightarrow \binom{k-1}{1}.\binom{k+3}{1} = 117 \Rightarrow$ (k - 1).(k + 3) = 117

$k^2 + 2k - 120 = 0 \Rightarrow (k + 12).(k - 10) = 0 \Rightarrow k = 10$, e = k + 3 = 10 + 3 = 13

sınıf mevcudu = k + e = 10 + 13 = 23

98.



Merkezleri O ve M olan küre seklindeki iki top, şekildeki gibi düz bir zemin üzerinde birbirine T noktasında değiyor.

Merkezlerinin arasındaki uzaklık 50 cm ve yarıçaplarının uzunlukları oranı $\frac{1}{4}$ olduğuna göre, bu topların zemine değdiği A ve B noktaları arasındaki uzaklık kaç cm'dir?

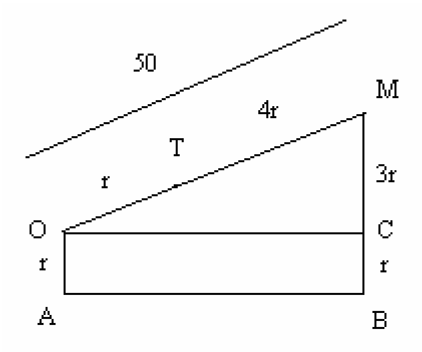
A) 30 B) 35 C) 40 D) 50

Çözüm 98

O merkezli kürenin yarıçapı = r

M merkezli kürenin yarıçapı = R $\Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ R = 4r olur.

$|OM| = 50 \Rightarrow |AB| = ?$



$$\left.\begin{aligned}|OT| &= r\\ |TM| &= 4r\end{aligned}\right\} |OM| = 5r = 50$$

$5r = 50 \Rightarrow r = 10$

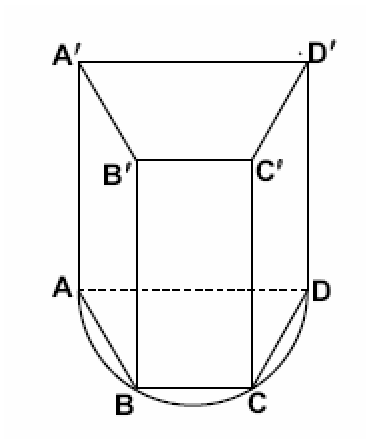
$|MC| = 3r = 3.10 = 30$

OCM üçgeninde, $50^2 = 30^2 + |OC|^2$ (pisagor) $\Rightarrow |OC| = 40$

$|OC| = |AB|$ olduğundan, $|AB| = 40$ elde edilir.

99.

Tabanı yamuk seklinde olan yandaki dik prizmanın A, B, C, D köşeleri [AD] çaplı çember yayı üzerindedir.



$|AD| = 8$ cm,

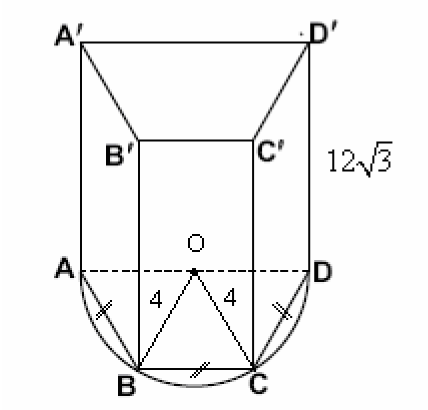
$|DD'| = 12\sqrt{3}$ cm ve

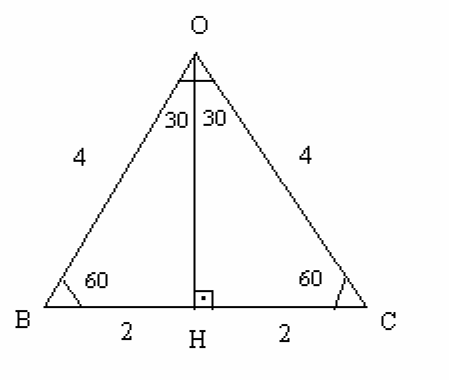
$|AB| = |BC| = |CD|$ olduğuna göre,

bu prizmanın hacmi kaç cm^3 tür?

A) 144 B) 288 C) 432 D) 576

Çözüm 99





Yarım çemberin merkezini O diyelim ve B ve C köşeleriyle birleştirelim.
Burada oluşan üçgenler eşkenardır. (OAB , OBC , OCD)
Çünkü, Kirişler eş olduğuna göre, ($|AB| = |BC| = |CD|$) bunlara ait yaylar da eştir.

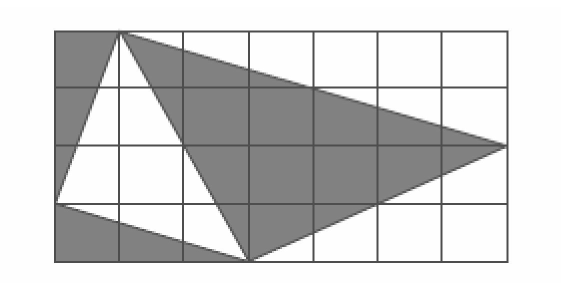
$|AD| = 8$ cm olduğuna göre, $|AO| = |OD| = |OB| = |OC| = |AB| = |BC| = |CD| = 4$

Yamuğun uzun kenarı = $|AD| = 8$
Yamuğun kısa kenarı = $|BC| = 4$
Yamuğun yüksekliği = $|OH| = 2\sqrt{3}$ (OHC üçgeninde pisagor uygulanırsa)

Prizmanın taban alanı = Yamuğun alanı = $\frac{(4+8).2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ olur.

Prizmanın Hacmi = (yamuğun alanı) x (yükseklik) = $12\sqrt{3}.12\sqrt{3} = 432$ elde edilir.

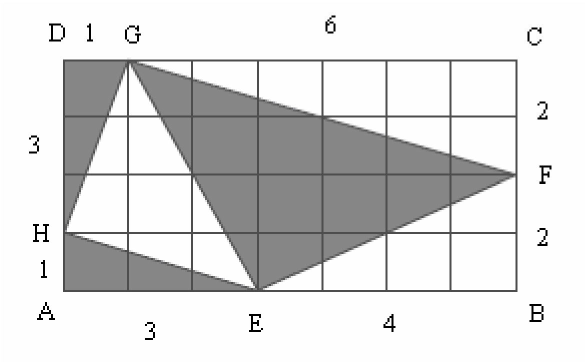
100. Kenar uzunlukları 4 cm ve 7 cm olan dikdörtgensel bölge, es karesel bölgelere ayrılmıştır.



Buna göre, şekildeki boyalı bölgelerin alanları toplamı kaç cm² dir?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15

Çözüm 100



alan (AEH) + alan (DHG) + alan (EFG) = ?

$$\text{alan (AEH)} = \frac{3.1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{alan (DHG)} = \frac{1.3}{2} = \frac{3}{2}$$

alan (EFG) = alan (BEGC) – [alan (BEF) + alan (FCG)]

$$\text{alan (EFG)} = \frac{(4+6).4}{2} - [\frac{4.2}{2} + \frac{6.2}{2}] = 20 - [4+6] = 10$$

$$\text{alan (AEH)} + \text{alan (DHG)} + \text{alan (EFG)} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 10 = 13 \text{ cm}^2 \text{ (boyalı alan)}$$

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA