T.C.

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI

Fen Liseleri, Sosyal Bilimler Liseleri, Güzel Sanatlar Ve Spor Liseleri

İle Her Türdeki Anadolu Liseleri Öğretmenlerini Seçme Sınavı

27 Aralık 2009

Matematik Soruları ve Çözümleri

56. $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisi ile çarpıldığında,

çarpım $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ifadesine eşit olur?

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{6}$

Çözüm 56

Sayı = x olsun. $\Rightarrow$ $x.\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $x = ?$

$$\left.\begin{array}{l} x.\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1}=x.\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1}=x.\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}=x.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\[2em] \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ $x.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ $\Rightarrow$ $x.\sqrt{2}.\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2}).(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$x.\sqrt{12}=3-2$ $\Rightarrow$ $x.\sqrt{12}=1$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{1}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{12}}{12}=\dfrac{2\sqrt{3}}{12}$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

57. $A = 4^2 + 6^2 + 8^2 + \ldots\ldots + 22^2$ ve

$B = 2.4 + 4.6 + 6.8 + \ldots\ldots + 20.22$ olduğuna göre, A – B kaçtır?

A) 220 B) 260 C) 312 D) 330

Çözüm 57

$A = 4^2 + 6^2 + 8^2 + \ldots\ldots + 22^2 \Rightarrow A = 4.4 + 6.6 + 8.8 + \ldots\ldots + 22.22$

$A = 4.4 + 6.6 + 8.8 + \ldots\ldots + 22.22$

$B = 2.4 + 4.6 + 6.8 + \ldots\ldots + 20.22$

$A - B = (4.4 + 6.6 + 8.8 + \ldots\ldots + 22.22) - (2.4 + 4.6 + 6.8 + \ldots\ldots + 20.22)$

$A - B = 4.(4 - 2) + 6.(6 - 4) + 8.(8 - 6) + \ldots\ldots + 22.(22 - 20)$

$A - B = 4.2 + 6.2 + 8.2 + \ldots\ldots + 22.2$

$A - B = 2.(4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + 22)$

$A - B = 2.(2.(2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 11))$

$A - B = 4.(-1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 11)$

$A - B = 4.(-1 + \frac{11.(11+1)}{2}) = 4.(-1 + \frac{11.12}{2}) = 4.(-1 + 66) = 4.65 \Rightarrow A - B = 260$

Not : $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$

58. x , y ∈ R olmak üzere $(625)^x.\left(\frac{1}{25}\right)^y = (125)^2$ ve $(243)^x : \left(\frac{1}{9}\right)^y = 27$ ise x + y kaçtır?

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2

Çözüm 58

$$(625)^x.\left(\frac{1}{25}\right)^y = (125)^2$$

$$(5^4)^x.\left(\frac{1}{5^2}\right)^y = (5^3)^2 \Rightarrow 5^{4x}.5^{-2y} = 5^6 \Rightarrow 5^{4x-2y} = 5^6$$

4x – 2y = 6

$$(243)^x : \left(\frac{1}{9}\right)^y = 27$$

$$(3^5)^x.(3^2)^y = 3^3 \Rightarrow 3^{5x}.3^{2y} = 3^3 \Rightarrow 3^{5x+2y} = 3^3$$

5x + 2y = 3

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 3 \end{array}\right\} \quad 9x = 9 \Rightarrow x = 1 \;,\; y = -1$$

$\Rightarrow$ x + y = 1 + (– 1) $\Rightarrow$ x + y = 0

59. $a^2 + 5a + 3 = 0$ ise $\left(a - \frac{3}{a}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 25 B) 5 C) $\sqrt{19}$ D) $\sqrt{13}$

Çözüm 59

$a^2 + 5a + 3 = 0$

$a^2 + 5a = -3 \Rightarrow a.(a + 5) = -3 \Rightarrow a + 5 = -\frac{3}{a} \Rightarrow a + \frac{3}{a} = -5$

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$ olduğuna göre,

$$\left(a + \frac{3}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{3}{a}\right)^2 = 4.a.\frac{3}{a}$$

$$(-5)^2 - \left(a - \frac{3}{a}\right)^2 = 4.3 \Rightarrow 25 - \left(a - \frac{3}{a}\right)^2 = 12$$

$$\left(a - \frac{3}{a}\right)^2 = 13 \Rightarrow \left(a - \frac{3}{a}\right) = \pm\sqrt{13}$$ elde edilir.

60. "Tersten okunuşu da aynı olan bir sayıya palindrom sayı denir.
Örneğin, 1331 bir palindrom sayıdır."
Buna göre, 100 ile 500 arasında kaç tane palindrom sayı vardır?

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50

Çözüm 60

(a b a) biçiminde yazılabilen üç basamaklı sayı palindrom sayıdır.

100 ile 500 arasındaki palindrom sayılar için,

en az a = 1 değerini alır. (1 b 1) $\Rightarrow$ b = {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}

en çok a = 4 değerini alır. (4 b 4) $\Rightarrow$ b = {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}

$$\left.\begin{array}{l} a = \{1, 2, 3, 4\} \\ b = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \end{array}\right\} 4.10 = 40$$

61. $x, y, z \in R^+$, $\frac{x-y}{z} = 0{,}6$ ve $\frac{z+y}{x} = 1{,}\overline{3}$ olduğuna göre,

aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $x < y < z$ B) $z < y < x$ C) $y < x < z$ D) $y < z < x$

Çözüm 61

$$\frac{x-y}{z} = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad x - y = 0{,}6.z$$

$$\frac{z+y}{x} = 1{,}\overline{3} \quad \Rightarrow \quad z + y = 1{,}\overline{3}.x$$

$$x + z = 0{,}6.z + 1{,}\overline{3}.x \quad \Rightarrow \quad 0{,}4.z = 0{,}\overline{3}.x \quad \Rightarrow \quad \frac{2.z}{5} = \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{z} = \frac{6}{5}$$

$$x = 6\ ,\ z = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{z} = \frac{6-y}{5} = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

$$x = 6\ ,\ z = 5\ ,\ y = 3 \quad \Rightarrow \quad y < z < x$$

62. I. torbada 3 mavi, 4 beyaz ve II. torbada 4 sarı, 2 beyaz bilye vardır.

I. torbadan rasgele seçilen bir bilye II. torbaya atılıyor.

II. torbadan rasgele seçilen bir bilyenin renginin, I. torbadan seçilen bilyenin renginden farklı olma olasılığı nedir?

A) $\frac{22}{49}$ B) $\frac{28}{49}$ C) $\frac{34}{49}$ D) $\frac{45}{49}$

Çözüm 62

I. torbada 3 mavi , 4 beyaz

II. torbada 4 sarı 2 beyaz

I. torbadan bir bilye çekiliyor. Bu bilye ya mavi ya da beyazdır. Yani iki durum vardır.

1. durum

I. torbadan 1 mavi bilye alıp II. torbaya atıldıktan sonra II. torbadan çekilen bilyenin mavi

olmama olasılığı $= \left(\frac{3}{3+4}\right).\left(\frac{4+2}{4+2+1}\right) = \frac{3}{7}.\frac{6}{7} = \frac{18}{49}$

2. durum

I. torbadan 1 beyaz bilye alıp II. torbaya atıldıktan sonra II. torbadan çekilen bilyenin beyaz

olmama olasılığı $= \left(\frac{4}{3+4}\right).\left(\frac{4}{4+2+1}\right) = \frac{4}{7}.\frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

Buna göre , istenen olasılık $= \frac{18}{49} + \frac{16}{49} = \frac{34}{49}$

63. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{|2x+5|-1}}{sgn(x^2-3x-10)-1}$ ile tanımlı f fonksiyonunun <u>en geniş</u> tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-2 , 5]$ B) $[-5 , 2]$ C) $(-\infty , -5) \cup (2 , +\infty)$ D) $(-\infty , -2) \cup (5 , +\infty)$

Çözüm 63

$f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{|2x+5|-1}}{sgn(x^2-3x-10)-1}$ $\Rightarrow$ $sgn(x^2 - 3x - 10) - 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $sgn(x^2 - 3x - 10) \neq 1$

$\Rightarrow$ $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ $\Rightarrow$ $(x - 5).(x + 2) = 0$ $\Rightarrow$ $x = 5$, $x = -2$

		-2		5	
$x-5$	$-----$		$-----$	0	$+++++$
$x+2$	$-----$	0	$+++++$		$+++++$
$(x-5).(x+2)$	$+++++$	0	$-----$	0	$+++++$

$x^2 - 3x - 10 \leq 0$

$[-2 , 5]$

Not :

$A \subset R$ olmak üzere $f : A \to R$ fonksiyonu için

$$g(x) = sgn(f(x)) = \begin{cases} -1 , & f(x) < 0 \\ 0 , & f(x) = 0 \\ 1 , & f(x) > 0 \end{cases}$$

ile tanımlı $g : A \to R$ fonksiyonuna f ' nin işaret fonksiyonu denir.

64. Almanca ve İngilizce dillerinden

en az birini bilenlerin oluşturduğu bir topluluğun $\frac{3}{8}$ 'ü Almanca bilmektedir.

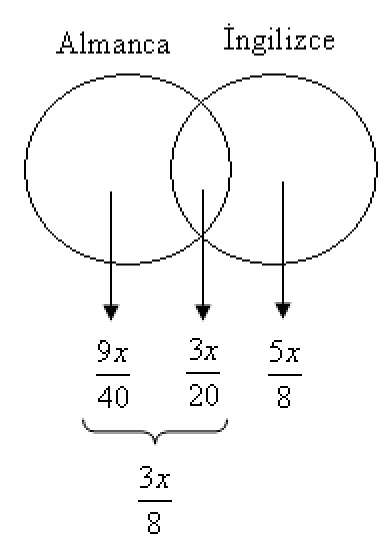
Almanca bilenlerin $\frac{2}{5}$ 'si İngilizce de bildiğine göre,

yalnız İngilizce bilen <u>en az</u> kaç kişi vardır?

A) 15   B) 19   C) 21   D) 25

Çözüm 64

Toplam kişi sayısı = x olsun.



Almanca bilenlerin sayısı = $\frac{3x}{8}$

Almanca ve İngilizce bilenlerin sayısı = $\frac{2}{5}.\frac{3x}{8} = \frac{3x}{20}$

Yalnızca İngilizce bilenlerin sayısı = $x - \frac{3x}{8} = \frac{5x}{8}$

Yalnız Almanca bilenlerin sayısı = y olsun.

$y + \frac{3x}{20} = \frac{3x}{8} \Rightarrow y = \frac{3x}{8} - \frac{3x}{20} \Rightarrow y = \frac{9x}{40}$

x = okek (8 , 20 , 40) = 40

Yalnız İngilizce bilenlerin sayısı = $\frac{5.40}{8} = 25$

65. x , y , z $\in$ N olmak üzere, x.y = 12 , y.z = 4 ve x.z = 3 eşitliklerini sağlayan x , y , z sayılarının toplamının, çarpımlarına oranı nedir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$

Çözüm 65

x.y = 12

y.z = 4

x.z = 3 (taraf tarafa çarpalım.)

---

x.y.y.z.x.z = 12.4.3 $\Rightarrow$ $x^2.y^2.z^2 = 12^2$ $\Rightarrow$ x.y.z = 12

x.y = 12 $\Rightarrow$ 12.z = 12 $\Rightarrow$ z = 1

y.z = 4 $\Rightarrow$ x.4 = 12 $\Rightarrow$ x = 3

x.z = 3 $\Rightarrow$ 3.y = 12 $\Rightarrow$ y = 4

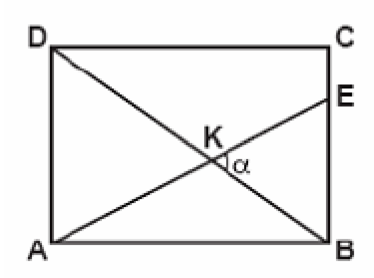
$$\frac{x+y+z}{x.y.z} = \frac{3+4+1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

66.

Şekildeki ABCD dikdörtgeninde

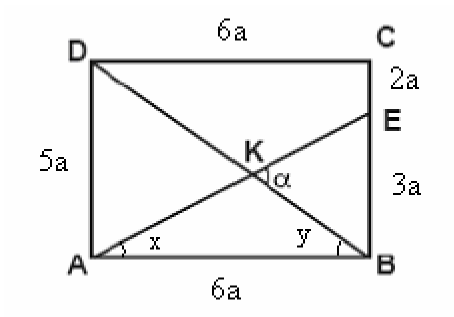
$|AB| = 2|BE| = 3|EC|$ olduğuna göre,

cotα aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\dfrac{7}{16}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{3}{5}$ D) $\dfrac{5}{6}$

Çözüm 66



m(BAE) = x

m(DBA) = y olsun.

α = x + y olur.

$|AB| = 2|BE| = 3|EC|$

$|AB| = 6a$ olsun.

$|BE| = 3a$

$|EC| = 2a$ olur.

$$\alpha = x + y \quad \Rightarrow \quad \cot\alpha = \cot(x+y) = \frac{\cot x.\cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{6a}{3a}.\frac{6a}{5a} - 1}{\frac{6a}{3a} + \frac{6a}{5a}} = \frac{\frac{12}{5} - 1}{2 + \frac{6}{5}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{7}{16}$$

veya

$$\cot\alpha = \cot(x+y) = \frac{1}{\tan(x+y)} = \frac{1}{\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y}} = \frac{1 - \tan x.\tan y}{\tan x + \tan y}$$

$$\Rightarrow \quad \cot\alpha = \frac{1 - \frac{3a}{6a}.\frac{5a}{6a}}{\frac{3a}{6a} + \frac{5a}{6a}} = \frac{1 - \frac{5}{12}}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{12}.\frac{3}{4} = \frac{7}{16}$$

Not :

$\cot(A + B) = \dfrac{\cot A.\cot B - 1}{\cot A + \cot B}$

$\tan A.\cot A = 1 \quad \Rightarrow \quad \cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

$\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$

67. .cosx + $\sqrt{3}$.sinx = $\sqrt{2}$ denkleminin [0 , π] aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\dfrac{7\pi}{12}\right\}$ B) $\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}\right\}$ C) $\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$ D) $\left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$

Çözüm 67

cosx + $\sqrt{3}$.sinx = $\sqrt{2}$

$\sqrt{3}$ = tan60 olduğuna göre, cosx + tan60.sinx = $\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \cos x + \dfrac{\sin 60}{\cos 60}.\sin x = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x.\cos 60 + \sin x.\sin 60 = \cos 60.\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \cos(x - 60) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(x - 60) = \cos 45 \quad \Rightarrow \quad x - 60 = 45 \quad \Rightarrow \quad x = 105$

$\Rightarrow \quad \cos(x - 60) = \cos(-45) \quad \Rightarrow \quad x - 60 = -45 \quad \Rightarrow \quad x = 15$

$\{15 , 105\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}\right\}$

Not :

cos(A – B) = cosA.cosB + sinA.sinB

$\cos A = \cos(-A) \quad \Rightarrow \quad \cos 45 = \cos(-45) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

68. $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{4}+1\right) + \cos(2x + 5) + 4\tan\dfrac{x}{3} + 5$ fonksiyonunun esas periyodu nedir?

A) 6π B) 8π C) 12π D) 24π

Çözüm 68

I. Yol

$\sin\left(\dfrac{x}{4}+1\right) \Rightarrow$ periyodu $= T_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

$\cos(2x + 5) \Rightarrow$ periyodu $= T_2 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$\tan\dfrac{x}{3} \Rightarrow$ periyodu $= T_3 = \dfrac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$

$T = k_1.T_1 = k_2.T_2 = k_3.T_3$

$T = k_1.8\pi = k_2.\pi = k_3.3\pi \Rightarrow$ okek(π , 3π , 8π) = 24π $\Rightarrow$ T = 24π

II. Yol

$\sin\left(\dfrac{x}{4}+1\right)$ fonksiyonunun T_1 gibi bir periyodu varsa,

$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \sin\left(\dfrac{x+T_1}{4}+1\right) = \sin\left(\dfrac{x}{4}+1\right)$

$\Rightarrow \sin\left(\dfrac{x}{4}+1+\dfrac{T_1}{4}\right) = \sin\left(\left(\dfrac{x}{4}+1\right)+2\pi\right)$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x}{4}+1+\dfrac{T_1}{4}\right) = \left(\left(\dfrac{x}{4}+1\right)+2\pi\right)$

$\Rightarrow \dfrac{T_1}{4} = 2\pi$

$\Rightarrow T_1 = 8\pi$

cos(2x + 5) fonksiyonunun T_2 gibi bir periyodu varsa,

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \cos(2.(x + T_2) + 5) = \cos(2x + 5)$$

$$\Rightarrow \cos(2x + 5 + 2.T_2) = \cos(2x + 5 + 2\pi)$$

$$\Rightarrow 2x + 5 + 2.T_2 = 2x + 5 + 2\pi$$

$$\Rightarrow 2.T_2 = 2\pi$$

$$\Rightarrow T_2 = \pi$$

$\tan\frac{x}{3}$ fonksiyonunun T_3 gibi bir periyodu varsa,

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \tan\left(\frac{x + T_3}{3}\right) = \tan\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{T_3}{3}\right) = \tan\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{3} + \frac{T_3}{3}\right) = \left(\frac{x}{3} + \pi\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T_3}{3} = \pi$$

$$\Rightarrow T_3 = 3\pi$$

$T = k_1.T_1 = k_2.T_2 = k_3.T_3$

$T = k_1.8\pi = k_2.\pi = k_3.3\pi \quad \Rightarrow \quad$ okek(π , 3π , 8π) = 24π

T = 24π elde edilir.

Not :

$A \subset R$ olmak üzere $f : A \to R$, $x \to f(x)$ fonksiyonunda

$\forall\, x \in A$ için $(x + T) \in A$ ve $f(x + T) = f(x)$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir T gerçel sayısı varsa, f fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir.

$f(x + T) = f(x)$ eşitliğini sağlayan pozitif T gerçel sayılarının en küçüğüne, fonksiyonun periyodu denir.

Not :

$f(x) = a.\sin(bx + c)$ ile tanımlı f fonksiyonunun periyodu $\dfrac{2\pi}{b}$ ' dir.

$g(x) = a.\cos(bx + c)$ ile tanımlı g fonksiyonunun periyodu $\dfrac{2\pi}{b}$ ' dir.

$h(x) = a.\tan(bx + c)$ ile tanımlı h fonksiyonunun periyodu $\dfrac{\pi}{b}$ ' dir.

Not :

f fonksiyonun periyodu T_1 , g fonksiyonunun periyodu T_2 ise

$(f + g)$ ve $(f - g)$ fonksiyonlarının periyodu $T = k_1.T_1 = k_2.T_2$ eşitliğini sağlayan

en küçük k_1 , k_2 sayma sayıları ile belirlenen $T = k_1.T_1 = k_2.T_2$ ' dir.

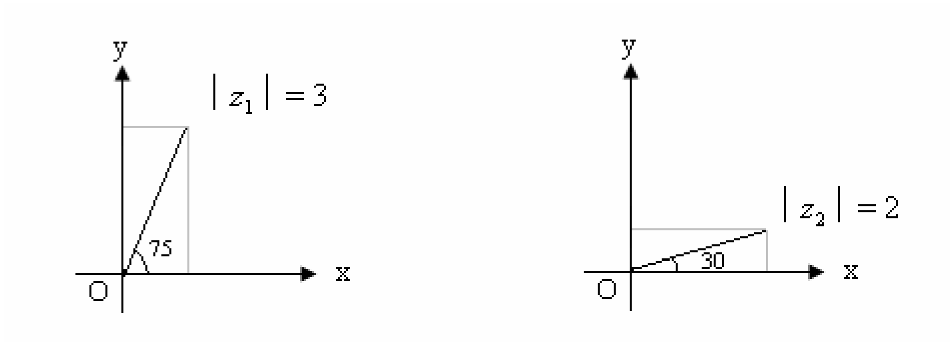
69. $|\, z_1 \,| = 3$, $|\, z_2 \,| = 2$, arg(z_1)= 75º ve arg(z_2) = 30º olduğuna göre,

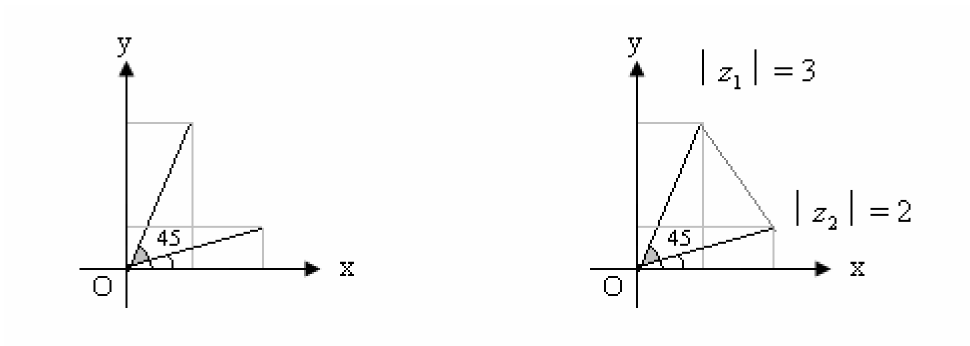
z_1 ve z_2 kompleks sayılarına düzlemde karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklık kaç birimdir?

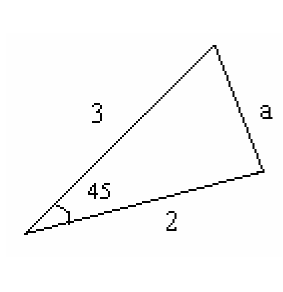
A) $3\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $\sqrt{13-3\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$

Çözüm 69

I. Yol







Kosinüs Teoremine göre,

$a^2 = 3^2 + 2^2 - 2.3.2.\cos 45$

$a^2 = 13 - 12.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$a = \sqrt{13-6\sqrt{2}}$

II. Yol

$$\left.\begin{array}{l} |\, z_1 \,| = 3 \\[2ex] \arg(z_1) = 75 \\[2ex] z_1 = |\, z_1 \,|.(\cos\theta + i.\sin\theta) \end{array}\right\} \qquad z_1 = 3.(\cos 75 + i.\sin 75)$$

$$\left.\begin{array}{l} |\, z_2 \,| = 2 \\[2ex] \arg(z_2) = 30 \\[2ex] z_2 = |\, z_2 \,|.(\cos\theta + i.\sin\theta) \end{array}\right\} \qquad z_2 = 2.(\cos 30 + i.\sin 30)$$

$$|\, z_1 - z_2 \,| = \sqrt{(3\cos 75 - 2\cos 30)^2 + (3\sin 75 - 2\sin 30)^2}$$

$$|\, z_1 - z_2 \,| = \sqrt{9\cos^2 75 - 12.\cos 75.\cos 30 + 4\cos^2 30 + 9\sin^2 75 - 12.\sin 75.\sin 30 + 4\sin^2 30}$$

$$|\, z_1 - z_2 \,| = \sqrt{9 - 12.(\cos 75.\cos 30 + \sin 75.\sin 30) + 4}$$

$$|\, z_1 - z_2 \,| = \sqrt{13 - 12.\cos(75 - 30)}$$

$$|\, z_1 - z_2 \,| = \sqrt{13 - 12.\cos 45} = \sqrt{13 - 12.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$$

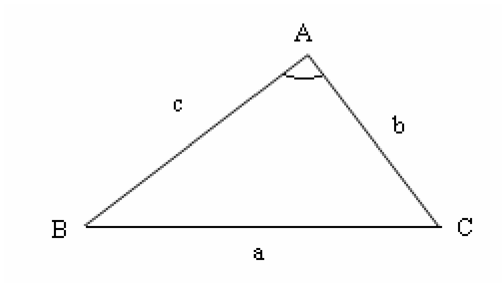
Not : Kosinüs teoremi

Bir ABC üçgeninde,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(A)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(B)$

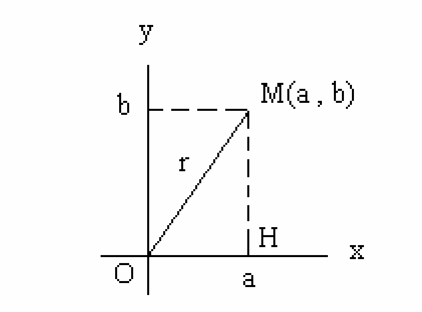
$c^2 = b^2 + a^2 - 2.a.b.\cos(C)$



Not : İki Açının Toplamının / Farkının Trigonometrik Değerleri

$\cos(A - B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$

Not : Bir karmaşık sayının kutupsal (trigonometrik) biçimde yazılması



z = a + b.i karmaşık sayısının düzlemdeki görüntüsü M(a , b) ve $|OM| = r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

OMH dik üçgeninde,

$\cos\theta = \dfrac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r.\cos\theta$

$\sin\theta = \dfrac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad b = r.\sin\theta$

Bu değerler z = a + b.i ‘ de yerine yazılırsa

z = r.cosθ + r.sinθ.i

z = r.(cosθ + i.sinθ) elde edilir.

$0 \le \theta \le 2\pi$ koşuluna uyan θ açısına z nin esas argümenti denir.

Argz = θ biçiminde yazılır.

Not : Karmaşık düzlemde iki nokta arası uzaklık

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a_1 + b_1.i \\ \\ z_2 = a_2 + b_2.i \end{array}\right\} \quad |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2}$$

Not :

$0 \le \theta < 2\pi$ koşulunu sağlayan θ gerçel sayısına, z = |z|.(cosθ + i.sinθ) karmaşık sayısının esas argümenti denir. Arg(z) = θ olarak yazılır.

70. 0,301 < log 2 < 0,302 olduğuna göre, 2^{-10} sayısının ondalık karşılığının virgülden sonra baştan kaç basamağı sıfırdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Çözüm 70

I. Yol

2^{-10} sayısının logaritmasını alalım.

$\log 2^{-10} = -10.\log 2$

$0,301 < \log 2 < 0,302 \Rightarrow 0,301.(-10) > (-10).\log 2 > 0,302.(-10)$

$\Rightarrow -3,01 > -10.\log 2 > -3,02 \Rightarrow -3,02 < -10.\log 2 < -3,01$

$\Rightarrow \log 10^{-3,02} < \log 2^{-10} < \log 10^{-3,01}$

$\Rightarrow 10^{-3,02} < 2^{-10} < 10^{-3,01} \Rightarrow \dfrac{1}{10^{3,02}} < 2^{-10} < \dfrac{1}{10^{3,01}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{10^{3}.10^{0,02}} < 2^{-10} < \dfrac{1}{10^{3}.10^{0,01}}$

$10^{0} < 10^{x} < 10^{1} \Rightarrow 0 < x < 1$

$10^{0} < 10^{0,02} < 10^{1} \Rightarrow 10^{0,02} = a$ olsun. $\Rightarrow 1 < a < 10$

$10^{0} < 10^{0,01} < 10^{1} \Rightarrow 10^{0,01} = b$ olsun. $\Rightarrow 1 < b < 10$

$\Rightarrow \dfrac{1}{10^{3}.a} < 2^{-10} < \dfrac{1}{10^{3}.b}$

$1 < a < 10$ olduğuna göre, $\dfrac{1}{a} < 1 \Rightarrow 0,c < 1$

$1 < b < 10$ olduğuna göre, $\dfrac{1}{b} < 1 \Rightarrow 0,d < 1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{0,c}{10^{3}}\right) < 2^{-10} < \left(\dfrac{0,d}{10^{3}}\right) \Rightarrow 0,000c < 2^{-10} < 0,000d$ elde edilir.

Buna göre, 2^{-10} sayısının ondalık karşılığının virgülden sonra baştan 3 basamağı sıfırdır.

II. Yol

2^{-10} sayısının logaritmasını alalım.

$\log 2^{-10} = -10.\log 2$

$0{,}301 < \log 2 < 0{,}302 \quad \Rightarrow \quad 0{,}301.(-10) > (-10).\log 2 > 0{,}302.(-10)$

$\Rightarrow \quad -3{,}01 > -10.\log 2 > -3{,}02$

$\Rightarrow \quad -3{,}02 < -10.\log 2 < -3{,}01$

$\Rightarrow \quad -(3 + 0{,}02) < -10.\log 2 < -(3 + 0{,}01)$

$\Rightarrow \quad -3 - 0{,}02 < -10.\log 2 < -3 - 0{,}01$

$\Rightarrow \quad -3 - 1 + 1 - 0{,}02 < -10.\log 2 < -3 - 1 + 1 - 0{,}01$

$\Rightarrow \quad -4 + 0{,}98 < -10.\log 2 < -4 + 0{,}99$

$\Rightarrow \quad \bar{4}{,}98 < -10.\log 2 < \bar{4}{,}99$

$\Rightarrow \quad \log 10^{(-4+0{,}98)} < \log 2^{-10} < \log 10^{(-4+0{,}99)}$

$\Rightarrow \quad \log 10^{(-4+0{,}98)} < \log 2^{-10} < \log 10^{(-4+0{,}99)}$

$$\Rightarrow \quad \log\left(\frac{10^{0{,}98}}{10^4}\right) < \log 2^{-10} < \log\left(\frac{10^{0{,}99}}{10^4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{10^{0{,}98}}{10^4}\right) < 2^{-10} < \left(\frac{10^{0{,}99}}{10^4}\right)$$

$10^0 < 10^x < 10^1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 1$

$10^0 < 10^{0{,}98} < 10^1 \quad \Rightarrow \quad 10^{0{,}98} = a$ olsun. $\quad \Rightarrow \quad 1 < a < 10$

$10^0 < 10^{0{,}99} < 10^1 \quad \Rightarrow \quad 10^{0{,}99} = b$ olsun. $\quad \Rightarrow \quad 1 < b < 10$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{10^4}\right) < 2^{-10} < \left(\frac{b}{10^4}\right)$$

$\Rightarrow \quad 0{,}000a < 2^{-10} < 0{,}000b$ elde edilir.

Buna göre, 2^{-10} sayısının ondalık karşılığının virgülden sonra baştan 3 basamağı sıfırdır.

Not :

a , b , c birer reel sayı ve c < 0 olmak üzere, a < b $\Leftrightarrow$ a.c > b.c

Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayı ile çarpılır ya da bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

Not : Bir sayının logaritmasının tam kısmı (karakteristiği) ve ondalık kısmı (mantisi)

k tamsayı , $0 \leq m < 1$ olmak üzere,

her a pozitif gerçel sayısı için $\log_{10} a$ = k + m olacak biçimde k ve m sayıları vardır.

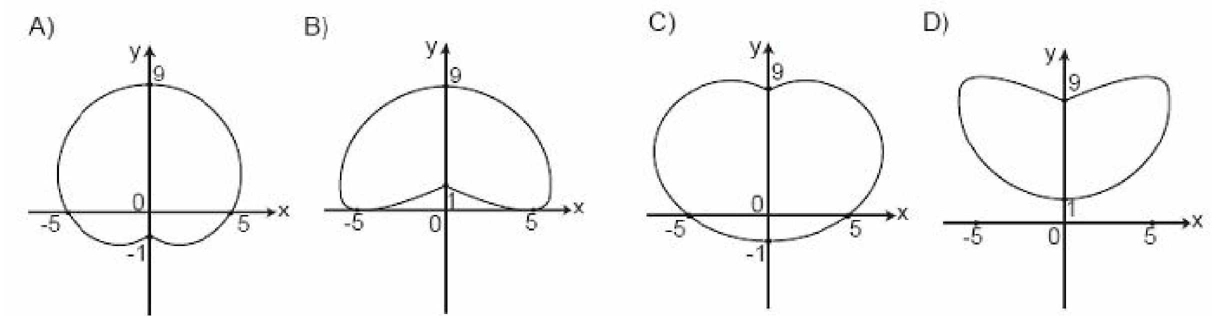
k tamsayısına a ’ nın logaritmasının tam kısmı (karakteristiği),

m sayısına da a ’ nın logaritmasının ondalık kısmı (mantisi) denir.

Not : Bir sayının logaritmasının karakteristiği negatif ise karakteristiğin üzerine (–) işareti konularak gösterilir.

Not : 0 ile 1 arasındaki bir sayının logaritmasının karakteristiği, sayının ondalık olarak yazılışında, sıfırdan farklı ilk rakamının solundaki tüm sıfırların sayısının negatif işaretlisidir.

71. Kutupsal koordinatlarda verilen r = 5 + 4sinθ denkleminin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



Çözüm 71

I. Yol

$r = 5 + 4.sin\theta$ eğrisinin grafiğini çizelim.

1) Tanım kümesi tüm reel sayılardır.

2) Fonksiyonun periyodu 2π dir.

2π uzunluğunda bir aralıkta inceleme yapmak yeterli olur.

3) θ yerine $\pi - \theta$ yazıldığında aynı eşitlik elde edilebildiğinden eğrinin grafiği y – eksenine ($\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna) göre simetriktir.

Çizimi, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ veya $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralıklarından birinde yapıp y – eksenine göre simetriğini almak yeterli olur.

4) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığını ve bu aralıktan işimizi zorlaştırmayacak değerler seçerek değişim tablosunu oluşturalım.

5)

$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.0 = 5$

$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.\frac{1}{2} = 7$

$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.\frac{\sqrt{2}}{2} = 5 + 2\sqrt{2} = 7{,}8$

$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 2\sqrt{3} = 8{,}4$

$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.1 = 9$

$\theta = -\dfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.(\dfrac{-1}{2}) = 3$

$\theta = -\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}) = 5 - 2\sqrt{2} = 2{,}2$

$\theta = -\dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = 5 - 2\sqrt{3} = 1{,}5$

$\theta = -\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.(-1) = 1$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	1	1,5	2,2	3	5	7	7,8	8,4	9

Bir noktanın kartezyen koordinatları ile kutupsal koordinatları arasında

$x = r.cos\theta$ ve $y = r.sin\theta$ bağıntıları olduğuna göre,

Örneğin, kutupsal koordinatları $(r,\theta) = \left(1, \dfrac{-\pi}{2}\right)$ noktası için

$$x = r.\cos\theta = 1.\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1.0 = 0$$

$$y = r.\sin\theta = 1.\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1.(-1) = -1$$

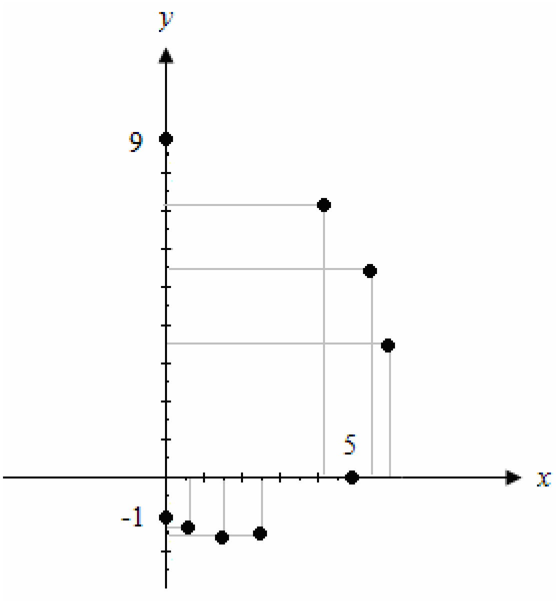
olup, bu noktanın kartezyen koordinat sistemindeki gösterimi : (x , y) = (0 , – 1) dür.

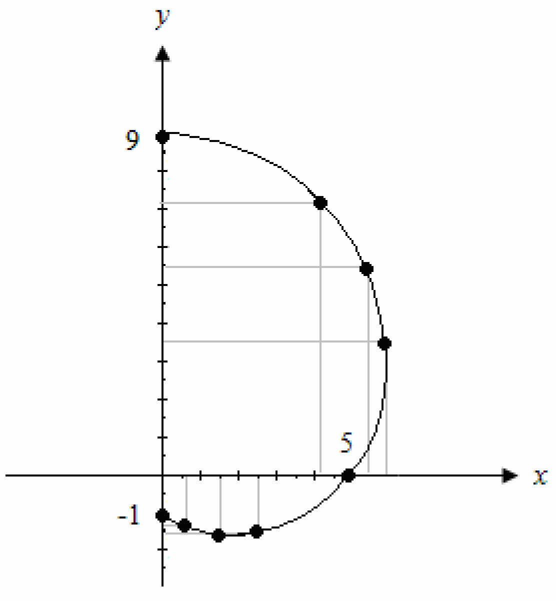
$x = r.cos\theta$ ve $y = r.sin\theta$ olduğuna göre,

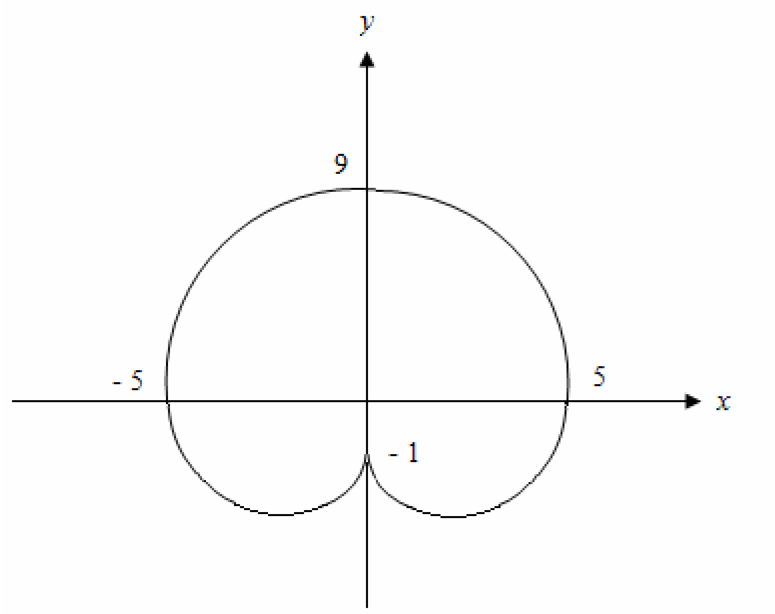
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	1	1,5	2,2	3	5	7	7,8	8,4	9
x	0	0,7	1,5	2,5	5	5,9	5,4	4,2	0
y	– 1	– 1,2	– 1,54	– 1,5	0	3,5	5,4	7,1	9

($\sqrt{2}$ = 1,4 ve $\sqrt{3}$ = 1,7)

6) Elde ettiğimiz grafiğin y – eksenine göre simetriği de alınarak çizim tamamlanır.







II. Yol

$r = 5 + 4.sin\theta$ eğrisinin grafiğini çizelim.

I) $r = f(\theta)$ fonksiyonunda θ yerine $\pi - \theta$ konduğunda,

$f(\pi - \theta) = f(\theta)$ oluyorsa $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusu simetri eksenidir.

$r = 5 + 4.\sin(\pi - \theta) = 5 + 4.\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ olduğuna göre,

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusu simetri eksenidir.

O halde incelemeyi $[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}]$ aralığında yapmalı ve buna karşılık olan eğri çizilmelidir.

Elde edilen eğrinin $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriği alınırsa eğrinin tamamı elde edilir.

II) $r = 5 + 4\sin\theta$ fonksiyonunun türev yardımıyla değişimini inceleyelim.

$r' = 4\cos\theta$

$4.\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}\ ,\ \theta = \dfrac{3\pi}{2}$

III) $r = 5 + 4\sin\theta$ fonksiyonun sonlu noktalardaki bilhassa eğrinin kutuptan geçen kollarının kutuptaki teğetleri belirtilir.

Bunun için $r = 5 + 4\sin\theta = 0$ denklemini sağlayan θ değerlerini bulalım.

$r = 5 + 4\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{-5}{4}$ ise r yu sıfır kılan bir θ değeri mevcut değildir.

$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.0 = 5$

$\theta = \dfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.\dfrac{1}{2} = 7$

$\theta = \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5 + 2\sqrt{2} = 7{,}8$

$\theta = \dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5 + 2\sqrt{3} = 8{,}4$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.1 = 9$

$\theta = -\dfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.(\dfrac{-1}{2}) = 3$

$\theta = -\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}) = 5 - 2\sqrt{2} = 2{,}2$

$\theta = -\dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = 5 - 2\sqrt{3} = 1{,}5$

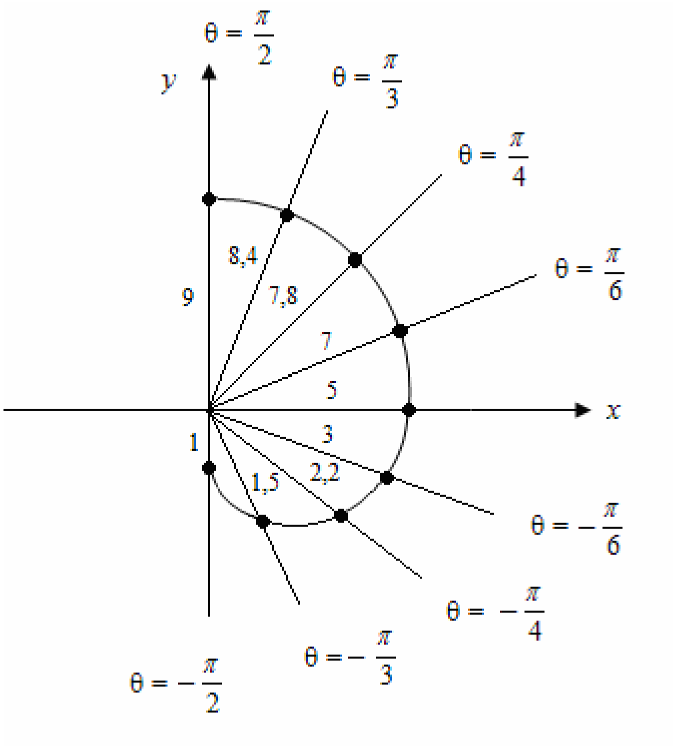
$\theta = -\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad r = 5 + 4.(-1) = 1$

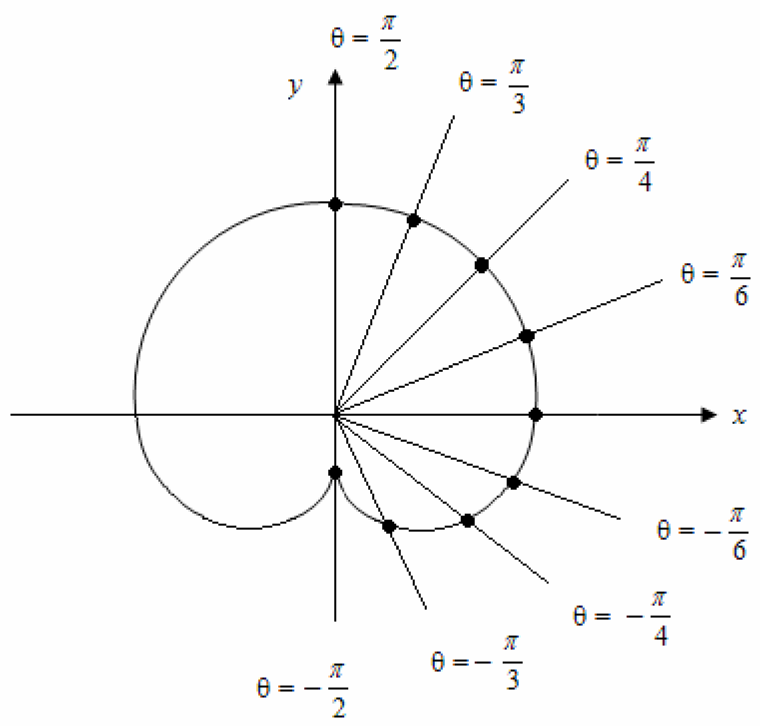
θ	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
r	1	1,5	2,2	3	5	7	7,8	8,4	9

IV) Değişim tablosu :

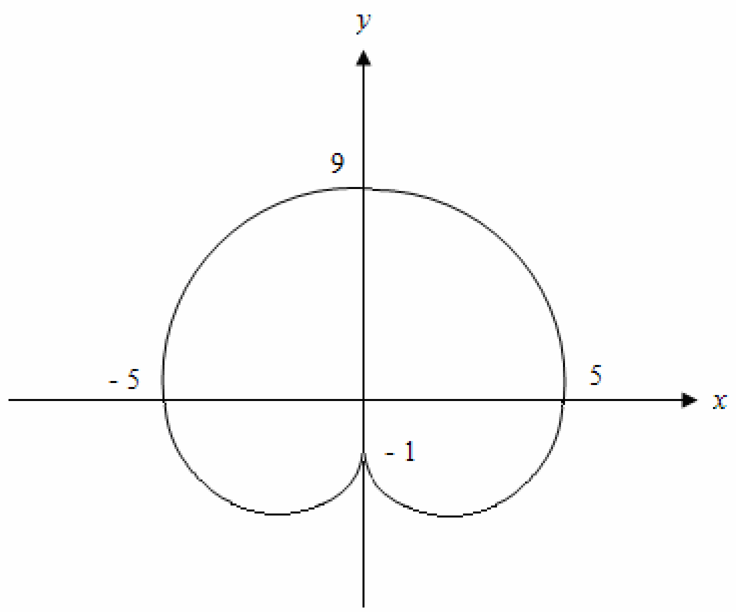
θ	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
r'	0	$-$	
r	9	$\searrow$	1
$\frac{r}{r'}$	∞		

V) Tabloya göre $r = 5 + 4\sin\theta$ grafiğini çizelim.





$\theta = \frac{\pi}{2}$
y
$\theta = \frac{\pi}{3}$
$\theta = \frac{\pi}{4}$
$\theta = \frac{\pi}{6}$
x
$\theta = -\frac{\pi}{6}$
$\theta = -\frac{\pi}{4}$
$\theta = -\frac{\pi}{3}$
$\theta = -\frac{\pi}{2}$



y
9
- 5
5
x
- 1

72. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n}{4n-30}$ ise n kaçtır?

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19

Çözüm 72

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1).(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

Kesrin paydası çarpanlarına ayrıldığı için basit kesirlere ayrılarak işleme devam edilir.

A.(k + 2) + B.(k + 1) = 1

k.(A + B) + 2A + B = 1

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{array}\right\} \quad A = 1 \ , \ B = -1$$

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1).(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2}\right) + \left(\frac{1}{2+1} - \frac{1}{2+2}\right) + \left(\frac{1}{3+1} - \frac{1}{3+2}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-2}{2.(n+2)} = \frac{n}{2n+4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n}{4n-30} = \frac{n}{2n+4} \quad \Rightarrow \quad 4n - 30 = 2n + 4 \quad \Rightarrow \quad n = 17$$

73. $t \in R$ için $x = t^2 - 1$ ve $y = 1 - t^3$ parametrik denklemleri veriliyor.

Buna göre, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\dfrac{3}{4.t}$ B) $-\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{3.t}{2}$ D) $\dfrac{2}{3.t^2}$

Çözüm 73

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3t^2}{2t} = \frac{-3t}{2} = y^{/}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy^{/}}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy^{/}}{dx} = \frac{\frac{dy^{/}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-3}{2}}{2t} = -\frac{3}{4.t}$$

74. R^3 te $z^2 = x^2 + y^2 - xy$ denklemi ile verilen S yüzeyine üzerindeki A(1 , 1 , – 1) noktasından çizilen teğet düzleminin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + y + 2z = 0$ B) $x + 2y + z = 0$ C) $2x - y + z = 0$ D) $2x - 2y + z = 0$

Çözüm 74

$z^2 = x^2 + y^2 - xy \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$

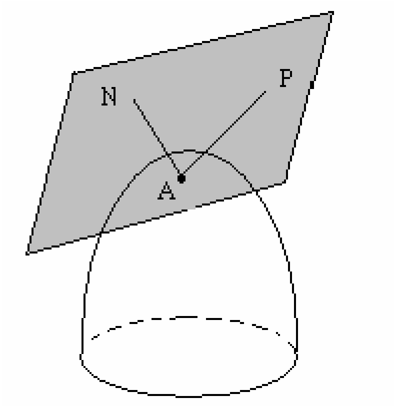
$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2x - y \quad \Rightarrow \quad f_x(1\,,1\,,-1) = 2 - 1 = 1 \\ f_y(x,y,z) &= 2y - x \quad \Rightarrow \quad f_y(1\,,1\,,-1) = 2 - 1 = 1 \\ f_z(x,y,z) &= -2z \quad \Rightarrow \quad f_z(1\,,1\,,-1) = -2.(-1) = 2 \end{aligned}\right\} (\vec{N})_A = (f_x, f_y, f_z)_A = (1\,,1\,,2)$$

Düzlem içinde değişken bir $P(x, y, z)$ noktası alınırsa,

Teğet düzlemin denklemi : $1.(x - 1) + 1.(y - 1) + 2.(z - (-1)) = 0$

$\Rightarrow \; = x - 1 + y - 1 + 2z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + 2z = 0$

Not :



S yüzeyi $f(x,y,z) = 0$ denklemi ile verilmiş olsun.

f fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri f_x , f_y ve f_z olsun.

S yüzeyinin $A(a,b,c)$ noktasındaki normal vektörü, $(\vec{N})_A = (f_x, f_y, f_z)_A$ olur.

Düzlem içinde değişken bir $P(x,y,z)$ noktası alınırsa,

$A(a,b,c)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemi,

AP vektörü ile normali (N) dik olacağından, ($\overrightarrow{AP} \perp \vec{N}$) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AP} \times (\vec{N})_A = 0$

$[(x-a),(y-b),(z-c)] \times [f_x, f_y, f_z]_A = 0$

$(f_x)_A.(x-a) + (f_y)_A.(y-b) + (f_z)_A.(z-c) = 0$

$f_x(a,b,c).(x-a) + f_y(a,b,c).(y-b) + f_z(a,b,c).(z-c) = 0$ olur.

75. x = u.v , y = u + v ve u = m^2 + n , v = n^2 + m olduğuna göre,

$\dfrac{\partial x}{\partial m}$ nin (m , n) = (1 , 2) deki değeri kaçtır?

A) 9 B) 13 C) 15 D) 19

Çözüm 75

I. Yol

$$\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{\partial(u.v)}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}[(m^2 + n).(n^2 + m)] = \frac{\partial}{\partial m}(m^2.n^2 + m^3 + n^3 + m.n) = 2mn^2 + 3m^2 + n$$

(m , n) = (1 , 2) deki değeri : $2.1.2^2 + 3.1^2 + 2 = 8 + 3 + 2 = 13$ elde edilir.

II. Yol

Zincir kuralına göre $\frac{\partial x}{\partial m} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial m} + \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial m}$ olduğundan,

$$\frac{\partial x}{\partial m} = v.2m + u.1$$

(m , n) = (1 , 2) deki değeri için $u = 1^2 + 2 \Rightarrow u = 3$, $v = 2^2 + 1 \Rightarrow v = 5$

$$\frac{\partial x}{\partial m} = 5.2.1 + 3.1 = 13$$ elde edilir.

Not : Zincir Kuralı

$z = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan f : B $\rightarrow$ R fonksiyonu verilmiş olsun.

f , f_x , f_y fonksiyonları B üzerinde sürekli ve $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ fonksiyonlarının u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri varsa $z = f(g(u,v), h(u,v))$ fonksiyonunun da u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır ve

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$ dir.

76. $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ şeklinde verilen f fonksiyonunun mutlak minimum değeri kaçtır?

A) – 3 B) – 1 C) 0 D) 1

Çözüm 76

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

$f_x(x,y) = 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$f_y(x,y) = 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

$f(1 , 1) = 1^2 + 1^2 - 2.1 - 2.1 + 2 \quad \Rightarrow \quad f(1 , 1) = 0$

77. $\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x^2+1}$ dx integralinin değeri kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) ln2

Çözüm 77

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x^2+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \left[(x^3 - x) + (\frac{x}{x^2+1}) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x^3 - x]\,dx + \int_{-1}^{1} \left[\frac{x}{x^2+1} \right] dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}.\int_{-1}^{1} \left[\frac{2.x}{x^2+1} \right] dx$$

$$= \left[\left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{2}.\ln(x^2+1) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= 0 + \left[\left(\frac{1}{2}.\ln(1^2+1) \right) - \left(\frac{1}{2}.\ln((-1)^2+1) \right) \right] = 0 + 0 = 0$$

78. Bir petrol tankerinden sızan petrolün deniz yüzeyinde kapladığı alanın değişimi

ilk 4 saatte $\dfrac{dA(t)}{dt} = 3.t^{-1/2}$ bağıntısı ile verilmektedir.

A(1) = 31 m² olduğuna göre 4. saatin sonunda petrolün yüzeyde kapladığı alan kaç m² dir?

A) 33 B) 35 C) 37 D) 41

Çözüm 78

$$\frac{dA(t)}{dt} = 3.t^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dA(t)}{dt} = \int 3.t^{-1/2}\,\mathrm{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A(t)} = 3.\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + \mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A(t)} = 6.\,t^{1/2} + \mathrm{c}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{A(t)} = 6.\sqrt{t} + \mathrm{c}$$

$$\mathrm{A(1)} = 31 \quad \Rightarrow \quad 31 = 6.\sqrt{1} + \mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{c} = 25$$

$$\mathrm{A(4)} = 6.\sqrt{4} + 25 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A(4)} = 12 + 25 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A(4)} = 37$$

79. z = x² + y² ile z = 2 – x² – y² yüzeyleri ile sınırlı cismin hacmini aşağıdakilerden hangisi verir?

A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}\int_{2-x^2-y^2}^{x^2+y^2} dz\ dy\ dx$

B) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz\ dy\ dx$

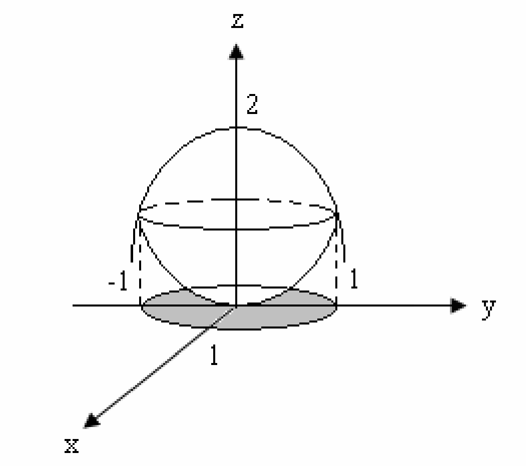
C) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{2-x^2-y^2}^{x^2+y^2} dz\ dy\ dx$

D) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz\ dy\ dx$

Çözüm 79

$z = x^2 + y^2$ ile $z = 2 - x^2 - y^2$ paraboloidleri arasında kalan bölgeyi çizelim.

Bu bölgenin xoy – düzlemi üzerindeki dik izdüşümü $x^2 + y^2 \leq 1$ dairesidir.



$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - x^2 - y^2 \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

Buna göre,

x in değişim aralığı : $-1 \leq x \leq 1$

y in değişim aralığı : $x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

z in değişim aralığı : alt dan $x^2 + y^2$, üst den $2 - x^2 - y^2$ ile sınırlıdır.

Böylece istenilen hacim = $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz\ dy\ dx$ bulunur.

80. Aşağıdaki serilerden hangisi yakınsaktır?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{3n+2}$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$

Çözüm 80

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n} \quad \Rightarrow$ D'Alembert Oran Testinin Limit Şeklini uygularsak,

$$a_n = \frac{n^3}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{(n+1)^3}{2^n.2}.\frac{2^n}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{2.n^3}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{2.n^3} = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ serisi yakınsaktır.

B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad$ p = $\frac{1}{2}$ olduğu için, ıraksaktır.

C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{3n+2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{3n+2} = \frac{-1}{3} \neq 0$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{3n+2}$ serisi ıraksaktır.

D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad$ p = 1 olduğu için, ıraksaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad$ p = 2 olduğu için, yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$ = Iraksak + Yakınsak = Iraksak

Not :

Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfırdır.

Eğer bir serinin genel terimi sıfıra gitmiyorsa (limiti sıfır değilse) bu seri ıraksaktır.

Not : D'Alembert Oran Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. N doğal sayı olmak üzere N > n için

I) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

II) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ mevcut ise, D'Alembert Oran Testi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Not : D'Alembert Oran Testinin Limit Şekli

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun. Bu takdirde

I) L < 1 ise , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

II) L > 1 ise , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

III) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranı 1 sayısına 1 den büyük değerle yaklaşırsa seri ıraksak olup, bu oranın 1 sayısına 1 den küçük değerle yaklaşması halinde serinin tabiatı hakkında bir şey söylenemez.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ olması halinde, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin tabiatının belirlenmesinde Raabe Testinden faydalanılır.

Not : Raabe Testi

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi verilmiş olsun. $R_n = n.\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ diyelim. Bu takdirde

I) $\lim_{n\to\infty} R_n > 1$ ise, seri yakınsaktır.

II) $\lim_{n\to\infty} R_n < 1$ ise, seri ıraksaktır.

Not :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \quad (p > 0) \text{ serisi } \begin{cases} p > 1 \text{ için yakınsak} \\ \\ 0 < p \leq 1 \text{ için ıraksak} \end{cases}$$

İspat :

p > 0 için $\{\frac{1}{n^p}\}$ dizisi monoton azalan olduğundan Cauchy Sıklaştırma Testine göre,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ serisi $\sum_{m=0}^{\infty}2^m\frac{1}{(2^m)^p} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^m}$ serisi ile aynı tabiattadır.

$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^m}$ serisi ortak çarpanı q = $\frac{1}{2^{p-1}}$ olan bir geometrik seridir.

p > 1 için q < 1 olacağından geometrik seri ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ serisi yakınsaktır.

0 < p < 1 ise q > 1 olur.

O halde, geometrik seri ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ serisi de ıraksaktır.

p = 1 için verilen seri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik serisinden ibaret olup, ıraksaktır.

Not : Cauchy Sıklaştırma Testi

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ pozitif terimli bir seri ne $a_{n+1} \leq a_n$ ise,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi ile $\sum_{m=0}^{\infty}2^m a_{2^m}$ serisi aynı tabiattadır.

81. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi x = 2 noktasında süreklidir?

A) f(x) = sgn(x – 2) + 1

B) g(x) = $|2 - x|$ + sinx

C) h(x) = $2\cos\frac{x}{x-2}$

D) k(x) = $\begin{cases} |x-4| &, \ x > 2 \quad ise \\ x-4 &, \ x \leq 2 \quad ise \end{cases}$

Çözüm 81

A) f(x) = sgn(x – 2) + 1 fonksiyonunun x = 2 noktasında sürekli olması için

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}[\operatorname{sgn}(x-2)+1] = 1 + 1 = 2 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}[\operatorname{sgn}(x-2)+1] = -1 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad 2 \neq 0$$

Fonksiyonun limiti olmadığından f(x) sürekli değildir.

B) g(x) = $|2 - x|$ + sinx

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = g(2)$ olmalıdır.

$2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$x > 2$ ise $2 - x < 0 \quad \Rightarrow \quad |2 - x| = -(2 - x) = x - 2$ olduğundan,

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}[(x-2)+\sin x] = \sin 2$

$x < 2$ ise $2 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad |2 - x| = 2 - x$ olduğundan,

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}[(2-x)+\sin x] = \sin 2$

g(2) = sin2

Buna göre, g(x) fonksiyonu x = 2 noktasında süreklidir.

C) $h(x) = 2\cos\dfrac{x}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = h(2)$ olmalıdır.

$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

x = 2 noktasında h(x) fonksiyonu tanımsız olduğundan h(x) sürekli değildir.

D) $k(x) = \begin{cases} |x-4| & , \quad x > 2 \quad ise \\ x-4 & , \quad x \leq 2 \quad ise \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} k(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} k(x) \quad \Rightarrow \quad -(2-4) = 2-4 \quad \Rightarrow \quad 2 \neq -2 \quad \Rightarrow$ sürekli değildir.

Not : Fonksiyonların Sürekliliği ve Süreksizliği

A ⊂ R , a ∈ R olmak üzere f : A → R fonksiyonunda, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise,

f fonksiyonuna x = a noktasında süreklidir denir.

f fonksiyonuna x = a noktasında sürekli değilse, f fonksiyonu x = a noktasında süreksizdir denir.

Not :

f ve g fonksiyonları x = a noktasında sürekli iseler :

(f + g) ve (f – g) fonksiyonları x = a noktasında süreklidir.

82. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2}{n^3}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{4}{3}$ D) ∞

Çözüm 82

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2}{n^3}$$

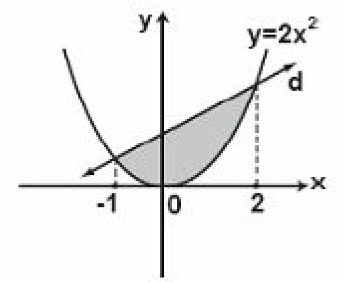
$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$

$= 2^2.(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$

$$= 4.\left(\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}\right) = \frac{2.(n^2+n).(2n+1)}{3} = \frac{2.(2n^3+3n^2+n)}{3} = \frac{4n^3+6n^2+2n}{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{4n^3+6n^2+2n}{3}}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{4n^3+6n^2+2n}{3n^3} = \frac{4}{3}$$

83.



Şekildeki y = 2x² parabolü ve d doğrusu tarafından sınırlanan boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12

Çözüm 83

d doğrusunun denklemini bulalım.

$y = 2x^2 \Rightarrow x = -1$ için $y = 2$ $(-1, 2)$

$\Rightarrow x = 2$ için $y = 8$ $(2, 8)$

İki noktası bilinen doğrunun denklemi = $\dfrac{y-2}{8-2} = \dfrac{x-(-1)}{2-(-1)} \Rightarrow y = 2x + 4$

$$\text{Alan} = \int_{-1}^{2} [(2x+4) - 2x^2]\,dx = \int_{-1}^{2} [-2x^2 + 2x + 4]\,dx$$

$$= \left(\frac{-2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{-2x^3}{3} + x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{-2.2^3}{3} + 2^2 + 4.2\right) - \left(\frac{-2.(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4.(-1)\right) = \left(\frac{-16}{3} + 4 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4\right)$$

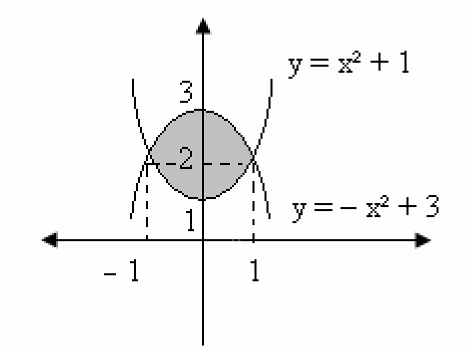
$$= \frac{-16}{3} + 12 - \frac{2}{3} + 3 = \frac{-18}{3} + 15 = -6 + 15 = 9$$

84. $y = x^2 + 1$ ve $y = -x^2 + 3$ eğrileriyle sınırlanan bölgenin y – ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi kaç birimküptür?

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) π C) $\dfrac{3\pi}{2}$ D) 2π

Çözüm 84

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 + 1 \\ y &= -x^2 + 3 \end{aligned}\right\} \; x = \pm 1 \;\Rightarrow\; y = 2$$



$x = 0$ için , $y = x^2 + 1 \Rightarrow y = 1$

$x = 0$ için , $y = -x^2 + 3 \Rightarrow y = 3$

$x = 1$ için , $y = x^2 + 1 \Rightarrow y = 2$

$x = -1$ için , $y = x^2 + 1 \Rightarrow y = 2$

$x = 1$ için , $y = -x^2 + 3 \Rightarrow y = 2$

$x = -1$ için , $y = -x^2 + 3 \Rightarrow y = 2$

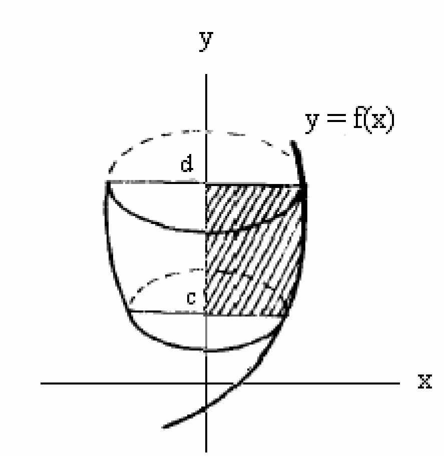
$$H = \pi.\int_1^2 (y-1)\,dy + \pi.\int_2^3 (3-y)\,dy$$

$$H = \pi.\left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_1^2 + \pi.\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^3$$

$$H = \pi.\left[\left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right] + \pi.\left[\left(3.3 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(3.2 - \frac{2^2}{2}\right)\right]$$

$$H = \pi.\frac{1}{2} + \pi.\left(\frac{9}{2} - 4\right) \;\Rightarrow\; H = \pi.\frac{1}{2} + \pi.\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; H = \pi \text{ birimküp}$$

Not : Dönel cisimlerin hacmi (y ekseni etrafında dönme)



y = f(x) eğrisi ile y = c , y = d , x = 0 doğrularının belirttiği şekildeki taralı bölgenin y ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşacak dönel cismin hacmi,

H = π. $\int_c^d x^2$ dy ya da H = π. $\int_c^d [f^{-1}(y)]^2$ dy olur.

Not : Soruda eğrilerin y – ekseni etrafında kaç derece döndürülmesi belirtilmemiştir.
Ama çözüm eğrilerin y – ekseni etrafında 360 derece döndürülmesi ile oluşacak dönel cismin hacmine göre yapılmıştır.

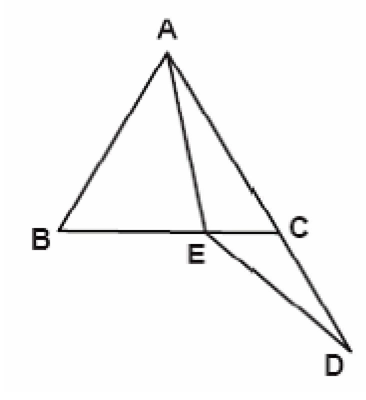
85.

Şekilde ABC üçgeni eşkenardır.

|BE| = |CD| ve

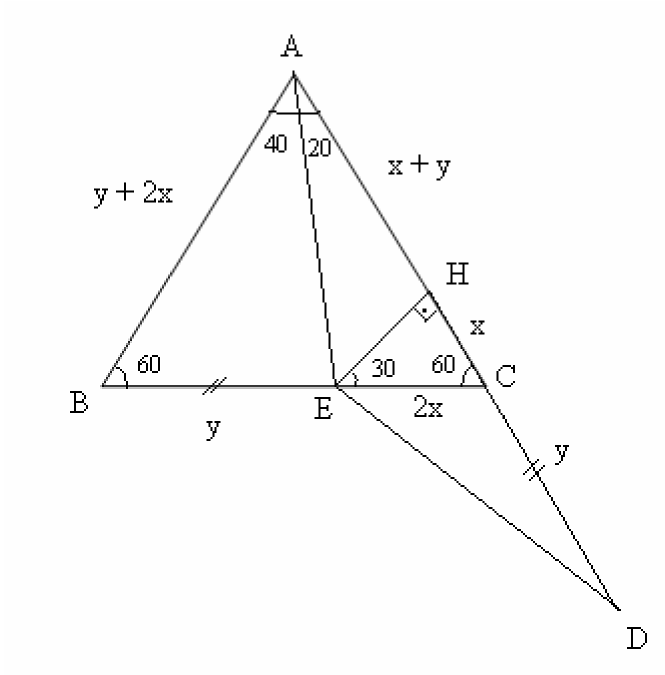
m(BAE) = 40° olduğuna göre,

m(ADE) kaç derecedir?



A) 10 B) 20 C) 25 D) 30

Çözüm 85



AED üçgeninde,

EH dikmesini çizelim.

EHC üçgeninde,

$|EC| = 2x$ olsun.

$|HC| = x$ olur.

$|BE| = |DC| = y$ olsun.

ABC eşkenar üçgeninde,

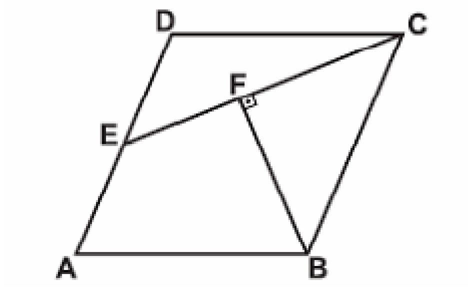
$|AB| = |BC| = |CA| = 2x + y$

AED üçgeninde, $|AH| = |HD| = x + y$

İkizkenar üçgende, yükseklik = kenarortay olduğuna göre, AED üçgeni ikizkenar üçgendir.

O halde, m(DAE) = m(EDA) = 20

86.



Şekildeki ABCD paralelkenarında,

$[BF] \perp [CE]$

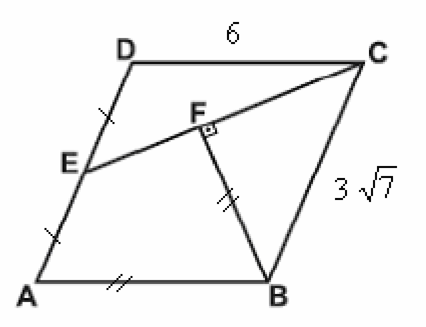
$|AB| = |BF|$ ve $|DE| = |AE|$ tir.

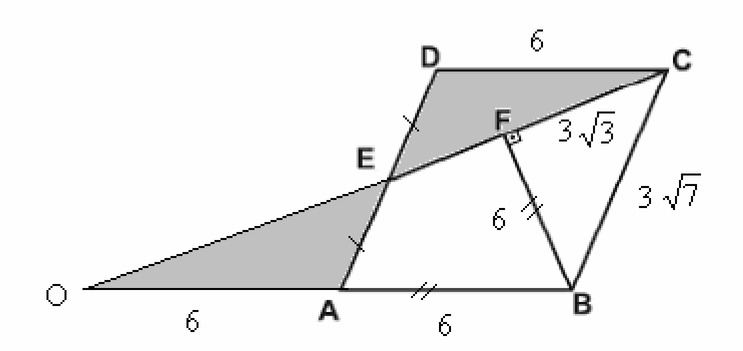
$|CD| = 6$ cm,

$|BC| = 3\sqrt{7}$ cm olduğuna göre, $|EF|$ kaç santimetredir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D) $2\sqrt{3}$

Çözüm 86





$OAE \cong CDE$

$\Rightarrow \quad |DC| = |OA| = 6$

OFB dik üçgeninde $12^2 = 6^2 + |OF|^2$ (pisagor) $\Rightarrow \quad |OF| = 6\sqrt{3}$

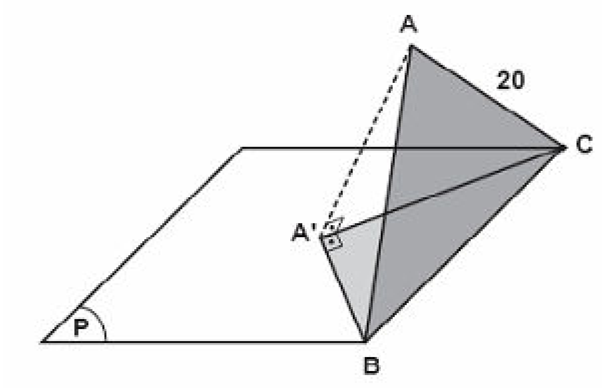
$OBC \cong OAE \quad \Rightarrow \quad \dfrac{12}{6} = \dfrac{9\sqrt{3}}{|OE|} \quad \Rightarrow \quad |OE| = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

$|OC| = |OE| + |EF| + |FC|$

$|OC| = |OF| + |FC|$

$\Rightarrow \quad 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} + |EF| + 3\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |EF| = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

87.



Şekilde ABC üçgeninin P düzlemi üzerindeki izdüşümü A'BC dik üçgenidir.

$|AB| = |AC| = 20$ cm ve $A(A'BC) = 72$ cm² olduğuna göre, $|AA'|$ kaç santimetredir?

A) 18 B) 16 C) 12 D) 8

Çözüm 87

$|AB| = |AC| = 20 \Rightarrow |A'C| = |A'B| = x$

$A(A'BC) = 72 \Rightarrow \dfrac{|A'B|.|A'C|}{2} = 72 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} = 72 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

$|A'C| = |A'B| = 12$

AA'C dik üçgeninde, $|AA'|^2 + |A'C|^2 = |AC|^2$ (pisagor)

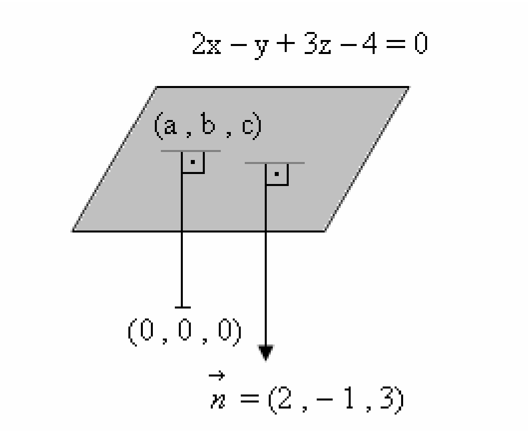
$|AA'|^2 + 12^2 = 20^2 \Rightarrow |AA'|^2 = 400 - 144 \Rightarrow |AA'|^2 = 256 \Rightarrow |AA'| = 16$

88. $2x - y + 3z - 4 = 0$ düzleminin orjine <u>en yakın</u> noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7})$ B) $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ C) $(-1, -3, 1)$ D) $(2, -3, -1)$

Çözüm 88

I. Yol



$2x - y + 3z - 4 = 0$ düzleminin normali : $\vec{n} = (2 , - 1 , 3)$

$(0 , 0 , 0)$ noktasından geçen ve düzlemi (a , b , c) noktasında kesen doğrunun uzunluğunun en kısa olması için, doğrunun düzleme dik olması gerekir.

O halde

Doğru, düzlemin normaline paralel olacağına göre,

$\vec{n} = (2 , - 1 , 3)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi :

$$\frac{a-0}{2} = \frac{b-0}{-1} = \frac{c-0}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{3} = k$$

Düzlem denklemini sağladığına göre, $a = 2k$, $b = - k$, $c = 3k$

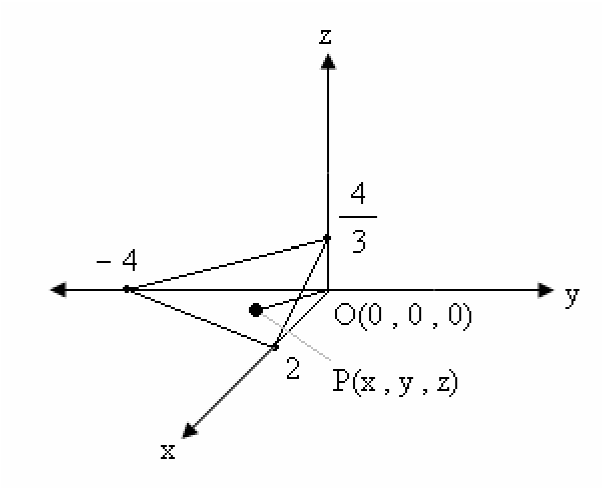
$$2.2k - (- k) + 3.3k - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 14k = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{7}$$

$$a = 2.\frac{2}{7} = \frac{4}{7} \quad , \quad b = \frac{-2}{7} \quad , \quad c = 3.\frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow \quad (a , b , c) = (\frac{4}{7} \; , -\frac{2}{7} \; , \frac{6}{7}) \text{ elde edilir.}$$

II. Yol

Düzlem üzerindeki bir nokta P(x , y , z) olsun.



$f(x , y , z) = x^2 + y^2 + z^2$

fonksiyonunun $g(x , y , z) = 2x – y + 3z – 4 = 0$ yan şartı altında minimumu bulunacaktır.

$h(x , y , z ; \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda.(2x – y + 3z – 4)$ olacağından

$h_x = 2x + 2\lambda = 0$

$h_y = 2y – \lambda = 0$

$h_z = 2z + 3\lambda = 0$

$h_\lambda = 2x – y + 3z – 4 = 0$

Sisteminin ilk üç denkleminde x , y , z nin λ cinsinden değerleri bulunur.

$x = -\lambda \ , \ y = \dfrac{\lambda}{2} \ , z = \dfrac{-3\lambda}{2}$

Son denklemde yerine yazılırsa

$2.(-\lambda) - \dfrac{\lambda}{2} + 3.(\dfrac{-3\lambda}{2}) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda.(-7) = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{-4}{7}$

Bu durumda $x = \dfrac{4}{7}$, $y = \dfrac{-2}{7}$, $z = \dfrac{6}{7}$ bulunur.

$\Rightarrow \quad (x , y , z) = (\dfrac{4}{7} \ , -\dfrac{2}{7} \ , \dfrac{6}{7})$

Not : Lagrange çarpanları yöntemi

Ekstrem değerleri aranan fonksiyon üç değişkenli f(x , y , z) fonksiyonu olsun.

x , y , z değişkenleri g(x , y , z) = 0 denklemi ile bağlı olsunlar.

f ve g fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerinin varolduklarını kabul edelim.

λ bulunması gereken bir sabit olmak üzere

$h(x , y , z ; \lambda) = f(x , y , z) + \lambda . g(x , y , z)$

fonksiyonu teşkil edilir. Bundan sonra x , y , z , λ değişkenlerine kısmi türevler alınarak

$$h_x = f_x + \lambda g_x = 0$$

$$h_y = f_y + \lambda g_y = 0$$

$$h_z = f_z + \lambda g_z = 0$$

$$h_\lambda = g = 0$$

sistemi bulunur. Bu sistemin çözümü olan (x , y , z) noktası bir ekstrem noktasıdır.

89. R^3 te köşeleri A(0 , 0 , 0) , B(1 , 2 , 1) ve C(– 2 , 2 , 1) olan üçgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

Çözüm 89

I. Yol

A(0 , 0 , 0) , B(1 , 2 , 1) ve C(– 2 , 2 , 1)

$\overrightarrow{AB} = (1 , 2 , 1)$

$\overrightarrow{AC} = (-2 , 2 , 1)$

Bu iki vektörün vektörel çarpımının uzunluğu, bu vektörlerin oluşturduğu paralel kenarın alanına eşit olduğuna göre,

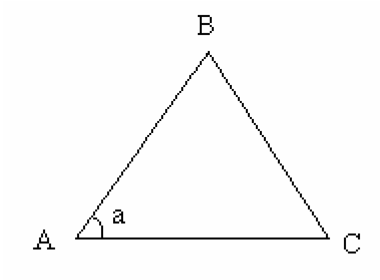
istenen üçgenin alanı bu paralel kenarın alanının yarısı olacağından,

ABC düzlemine dik bir vektör = $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ise,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = e_1.0 - e_2.3 + e_3.6 = (0 , -3 , 6)$$

$$\frac{1}{2}.\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}.\|(0 , -3 , 6)\| = \frac{1}{2}.\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 6^2} = \frac{1}{2}.\sqrt{45} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

II. Yol



A köşesindeki açı,

[AB] ile [AC] kenarları arasındaki açıdır.

Bu kenarlara ait yer vektörlerini yazalım:

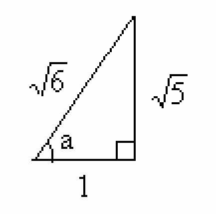
A(0 , 0 , 0) , B(1 , 2 , 1) ve C(– 2 , 2 , 1)

$\overrightarrow{AB} = (1 , 2 , 1) \Rightarrow || \overrightarrow{AB} || = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \Rightarrow || \overrightarrow{AB} || = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC} = (-2 , 2 , 1) \Rightarrow || \overrightarrow{AC} || = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} \Rightarrow || \overrightarrow{AC} || = 3$

$$\text{Cos(a)} = \frac{1.(-2) + 2.2 + 1.1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} \Rightarrow \text{Cos(a)} = \frac{-2 + 4 + 1}{\sqrt{6}.\sqrt{9}} \Rightarrow \text{Cos(a)} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\text{Cos(a)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$



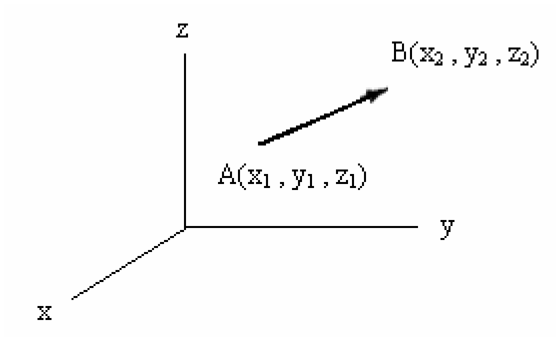
$\Rightarrow \text{Sin(a)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$$\text{Alan(ABC)} = \frac{1}{2}.3.\sqrt{6}.\text{Sin(a)} \Rightarrow \text{Alan(ABC)} = \frac{1}{2}.3.\sqrt{6}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow \text{Alan(ABC)} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Not :

Başlangıç noktası = A(x_1 , y_1 , z_1)

Bitim noktası = B(x_2 , y_2 , z_2)



$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1)$

biçiminde bir sıralı ile gösterilir.

Not : $\vec{u}$ = (a , b , c) vektörünün boyu (normu) $\Rightarrow$ $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Not : Vektörlerin skaler (iç) çarpımı

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1) \\ \\ \vec{v} = (x_2\ ,\ y_2\ ,\ z_2) \end{array}\right\} \quad \vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Not : İki vektör arasındaki açı

$$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|}$$

Not :

V iç çarpımlı bir vektör uzayı olsun. v $\in$ V nin uzunluğu $||\,v\,|| = \sqrt{< v, v >}$ ile tanımlıdır.

Not :

u = (a_1 , a_2 , a_3) , v = (b_1 , b_2 , b_3) ∈ R³ ise,

u ∧ v = ($a_2 . b_3 - a_3 . b_2$, $a_3 . b_1 - a_1 . b_3$, $a_1 . b_2 - a_2 . b_1$) ∈ R³ vektörüne,
u ile v nin vektörel çarpımı denir.

Formül olarak, determinant özellikleri göz önünde tutularak ve 1. satıra göre açılım yaparak;

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ şeklinde yazılabilir.

Vektörel çarpımın şu özellikleri vardır.
∀ u , v ∈ R³ , ∀ a ∈ R için;

i) u ∧ v = 0_V

ii) u ∧ v = – (v ∧ u)

iii) u ∧ (v + w) = (u ∧ v) + (u ∧ w)

iv) u ∧ v vektörü ,hem u hem de v vektörlerine diktir.

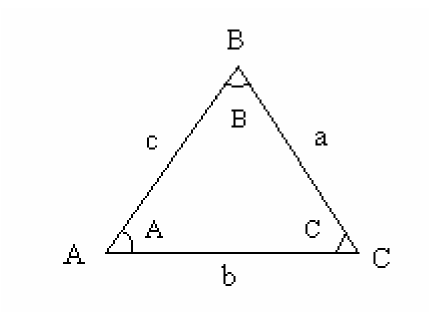
v) (a.u) ∧ v = a.(u ∧ v) = u ∧ (a.v)

Not :

$\|u \wedge v\| = \|u\| . \|v\| . |\sin\theta|$

⇒ $\|u \wedge v\|$ sayısı , u ile v vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşittir.

Not : Üçgenin alanı : İki kenarı ile bu iki kenarın belirttiği açısı verilen üçgenin alanı



Alan(ABC) = $\frac{1}{2}$.b.c.sin(A)

Alan(ABC) = $\frac{1}{2}$.a.c.sin(B)

Alan(ABC) = $\frac{1}{2}$.a.b.sin(C)

90.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -3x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sisteminin çözüm uzayının boyutu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Çözüm 90

Bu sistemin katsayılar matrisini satırca indirgenmiş eşelon forma getirelim.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} (\sim)\ R_4 \leftrightarrow R_4 + (-2).R_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\sim)\ R_3 \leftrightarrow R_3 + 2.R_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\sim)\ R_1 \leftrightarrow R_1 + (-2).R_2 \begin{bmatrix} -1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Şu halde r = 2 < n = 4 ve n – r = 4 – 2 = 2 parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$-x_1 - 5x_2 + x_4 = 0$$

$$-3x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \text{t dersek}, \quad x_3 = 3\text{t}$$

x_2 = t , x_4 = m dersek, $\Rightarrow$ x_1 = – 5t + m bulunur.

Çözüm kümesi = $\left\{ \begin{bmatrix} -5t+m \\ t \\ 3t \\ m \end{bmatrix} ; m, t \in R \right\}$

t = 0 ve m = 1 için çözüm : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve t = 1 ve m = 0 için çözüm : $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ olduğundan,

çözüm uzayının bir tabanı olarak $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ alınabilir.

Buna göre, çözüm uzayının boyutu = 2 olur.

Not :

A.X = 0 lineer denklem sistemine bir lineer homojen denklem sistemi denir.

X = 0 , lineer homojen denklem sisteminin her zaman bir çözümüdür.

Bu çözüme sistemin sıfır çözümü veya aşikar çözümü denir.

Not :

A , m x n bir matris olmak üzere, A.X = 0 lineer homojen denklem sistemini düşünelim.

A nın satırca indirgenmiş eşelon formunda sıfırdan farklı satırların sayısı,

yani A nın rangı r olsun.

i) r < n ise sistemin n – r parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

ii) r = n ise sistemin tek çözümü sıfır çözümdür.

Özel olarak,

Denklem sayısı bilinmeyen sayısından az, yani m < n ise r ≤ m < n olacağından,

sistemin n – r parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

Eğer, denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit, yani m = n ise sistemin tek çözümünün sıfır çözüm olması için gerek ve yeter koşul r = m = n olması.

Yani A nın I_n ye denk (A nın regüler - terslenebilir) olmasıdır.

91. T : $R^3 \rightarrow R^3$ bir lineer dönüşüm ve

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ T(e_1 + e_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ve } T(e_1 + e_2 - e_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Buna göre, T lineer dönüşümünü temsil eden matris aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Çözüm 91

T : R³ → R³ lineer (doğrusal) dönüşümünün matrisi $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ise

$$T(e_1)=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$T(e_1+e_2)=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} \text{ ve } e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow e_1+e_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2+a_{12}\\1+a_{22}\\1+a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$T(e_1+e_2-e_3)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \text{ ve } e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e_1+e_2-e_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & a_{13} \\ 1 & -2 & a_{23} \\ 1 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2+1-a_{13}\\1-2-a_{23}\\1+1-a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3-a_{13}\\-1-a_{23}\\2-a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Buna göre, T : $R^3 \to R^3$ lineer (doğrusal) dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Not : Doğrusal (Lineer) Dönüşümün Matrisi

f : $R^3 \to R^2$ doğrusal (lineer) dönüşümünde, R^3 vektör uzayının

$e_1 = (1 , 0 , 0)$

$e_2 = (0 , 1 , 0)$

$e_3 = (0 , 0 , 1)$

temel taban vektörlerinin f fonksiyonuna göre görüntüleri

$f(e_1) = f(1 , 0 , 0) = (a_{11} , a_{21})$

$f(e_2) = f(0 , 1 , 0) = (a_{12} , a_{22})$

$f(e_3) = f(0 , 0 , 1) = (a_{13} , a_{23})$

ise $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ matrisine, f doğusal (lineer) dönüşümünün $\{e_1 , e_2 , e_3\}$ temel tabanına göre matrisi denir.

f doğrusal (lineer) dönüşümünün matrisi $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ise,

$$f(x_1 , x_2 , x_3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

92. A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinin toplamı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 12 D) 14

Çözüm 92

$|x.I - A| = 0$ (A matrisinin karakteristik denklemi)

$$|x.I - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 2 & x-5 \end{vmatrix}$$ (A matrisinin karakteristik polinomu)

$= (x - 5).(x - 2) + 2$

$= x^2 - 7x + 10 + 2$

$= x^2 - 7x + 12$

$= (x - 4).(x - 3)$

Özdeğerler, karakteristik denklemin kökleri olduğuna göre,

$c_1 = 4$, $c_2 = 3$ $\Rightarrow$ $c_1 + c_2 = 4 + 3 = 7$ elde edilir.

93. Aşağıdaki matrislerden hangisinin tersi <u>yoktur?</u>

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Çözüm 93

$$\text{A)}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}-\\-\\-\\+\\+\\+\end{matrix} = 1+1-1=1$$

$$\text{B)}\begin{bmatrix}2&0&0\\2&1&0\\0&1&2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}2&0&0\\2&1&0\\0&1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&0&0\\2&1&0\\0&1&2\\2&0&0\\2&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}-\\-\\-\\+\\+\\+\end{matrix} = 4-0=4$$

$$\text{C)}\begin{bmatrix}2&0&2\\0&0&2\\2&2&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}2&0&2\\0&0&2\\2&2&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&0&2\\0&0&2\\2&2&0\\2&0&2\\0&0&2\end{vmatrix}\begin{matrix}-\\-\\-\\+\\+\\+\end{matrix} = 0-8=-8$$

$$\text{D)}\begin{bmatrix}2&3&4\\0&3&0\\3&4&6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}2&3&4\\0&3&0\\3&4&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&3&4\\0&3&0\\3&4&6\\2&3&4\\0&3&0\end{vmatrix}\begin{matrix}-\\-\\-\\+\\+\\+\end{matrix} = 36-36=0 \quad \Rightarrow \quad \text{matrisin tersi yoktur.}$$

Not :

A tersi alınabilen bir matris, yani A^{-1} ters matrisi varsa,

$A\,.\,A^{-1} = A^{-1}\,.\,A = I \quad \Rightarrow \quad |\,A\,|\,.\,|\,A^{-1}\,| = |\,A^{-1}\,|\,.\,|\,A\,| = 1$ olduğundan,

$|\,A\,| \neq 0$ ve $|\,A^{-1}\,| = \dfrac{1}{|A|} = |\,A\,|^{-1}$ dir.

Şu halde, bir matrisin çarpmaya göre tersinin olması için gerek ve yeter koşul determinantının sıfır olmamasıdır. ($|\,A\,| \neq 0$)

94. T : R³ → R² fonksiyonu,

$T(x_1 , x_2 , x_3) = (x_1 + x_3 , x_1 - 2x_2)$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olduğuna göre,

T 'nin çekirdeğinin R üzerindeki boyutu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

Çözüm 94

$(x_1 , x_2 , x_3) \in \text{Çek}\,T$ ise, $T(x_1 , x_2 , x_3) = (x_1 + x_3 , x_1 - 2x_2) = (0 , 0)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ Lineer homojen denklem sistemi sağlanmaktadır.}$$

Sistem çözülürse $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan,

$x_1 = 2t$ dersek, $\Rightarrow$ $x_3 = -2t$

$x_1 = 2t$ olduğundan, $x_2 = t$ olur.

Böylece 1 parametreye bağlı sonsuz çözüm bulunur.

$(x_1 , x_2 , x_3) = (2t , t , -2t)$

çözüm uzayının bir tabanı olarak {(2 , 1 , – 2)} alınabilir.
Buna göre, çözüm uzayının boyutu = 1 olur.

Not :

L : V → W lineer dönüşüm ise L nin çekirdeği

$\text{Çek}\,L = L^{-1}\{0_W\} = \{v \in V : L(v) = 0_W\}$ ile tanımlanır.

Not :

V, W iki vektör uzayı ve L : V $\rightarrow$ W bir lineer dönüşüm olsun.

Eğer L nin sıfır uzayı (çekirdeği) sonlu boyutlu ise bu uzayın boyutuna L nin sıfırlık derecesi denir ve sıfırlık L ile gösterilir.

L nin değer kümesi olan L(V) sonlu boyutlu ise bu uzayın boyutuna da L nin rangı denir ve rank L ile gösterilir.

Eğer L bire – bir değilse L ye singüler denir.

95. Z_{81} devirli grubunun kaç tane üreteci vardır?

A) 9 B) 27 C) 39 D) 54

Çözüm 95

I. Yol

81 den küçük ve 81 ile aralarında asal olan sayıların sayısı kadar üreteç olduğundan,

Euler Teoremine göre,

a pozitif bir tam sayı ve p asal bir sayı ise, $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$ olduğundan,

4 pozitif bir tam sayı ve 3 asal bir sayı olduğuna göre,

$\phi(3^4) = 3^4 - 3^{4-1} = 3^4 - 3^3 = 3^3.(3-1) = 3^3.2 = 27.2 = 54$ elde edilir.

II. Yol

$<1> = Z_{81}$ ve x tane sayı 81 ile aralarında asal olduklarından her biri Z_{81} için birer üreteçtir.

$81 = 3^4$ ile asal olmayan sayılar , $3^{4-1} = 27$ tane

Buna göre, x = 81 – 27 = 54 tane sayı 81 ile asal olur.

Not : Euler Teoremi

n pozitif bir tamsayı olsun.

n den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısına Euler ϕ – fonksiyonu denir ve $\phi(n)$ ile gösterilir. (ϕ : fi)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

$1 \leq n \leq 12$ aralığındaki n değerleri için Euler fi – fonksiyonu değerleri

- ✓ m pozitif bir tam sayı ve a tam sayısı (m , a) = 1 şartını sağlıyorsa, $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$
- ✓ p bir asal sayı ise, $\phi(p) = p - 1$ dir. Bunun terside doğrudur.
- ✓ a pozitif bir tam sayı ve p asal bir sayı ise, $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$ dir.
- ✓ m ve n aralarında asal pozitif tamsayılar olsun. $\phi(m.n) = \phi(m).\ \phi(n)$ dir.
- ✓ n pozitif tam sayısının asal kuvvet çarpanlarına ayrılmış şekli,

$n = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} . p_3^{a_3} \ldots . p_k^{a_k}$ olsun.

$\phi(n) = n.\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right).\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ olur.

96. Elemanları R'den R'ye tanımlı

$f_1(x) = x$,

$f_2(x) = \frac{1}{x}$,

$f_3(x) = -x$,

$f_4(x) = -\frac{1}{x}$

fonksiyonları olan $G = \{f_1 , f_2 , f_3 , f_4\}$ kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur.

Buna göre (G , o) grubunun mertebesi 2 olan kaç tane altgrubu vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6

Çözüm 96

G = { f_1 , f_2 , f_3 , f_4} kümesi bileşke işlemine göre bir grup olduğuna göre,

Grubun etkisiz elemanı “e” olsun.

e o f_1 = f_1 o e = f_1 olacağına göre, e o x = x o e $\Rightarrow$ x = e

f_1(x) = x grubun etkisiz (birim) elemanı olduğuna göre,

Mertebesi 2 olan (eleman sayısı = 2) alt gruplar : $\{f_1, f_2\}$, $\{f_1, f_3\}$, $\{f_1, f_4\}$ olur.

Not : Bir grubun eleman sayısına o grubun mertebesi denir.

Not :

Bir G grubunda $\{e\}$ ve G kümeleri her zaman bir alt gruptur.

Bu alt gruplara trivial (aşikar) altgruplar denir.

97. $y' + y = e^{-x}$ diferansiyel denkleminin hangi koşulu sağlayan çözümü y = e^{-x}(2 + x) eğrisidir?

A) y(0) = 2 B) y(1) = 1 C) y(2) = 0 D) y(– 1) = – 1

Çözüm 97

I. Yol

$y' + y = e^{-x}$ lineer diferansiyel denkleminde "sabitin değişimi yöntemi" kullanılırsa,

önce, e^{-x} = 0 alınır ve böylece elde edilen $y' + y = 0$ diferansiyel denklemi integre edilirse,

$y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} = \int -1 \Rightarrow$ lny = – x + ç

$\Rightarrow y = e^{-x+ç} \Rightarrow y = e^{-x}.e^{ç}$ ($e^{ç}$, keyfi sabit olduğundan $e^{ç}$ yerine Ç yazarsak)

$\Rightarrow$ y = Ç. e^{-x} bulunur.

Ç keyfi sabiti yerine Ç(x) fonksiyonu alınır ve böylece elde edilen y = $(Ç(x).e^{-x})$ fonksiyonu

$y' + y = e^{-x}$ diferansiyel denkleminde yerine konursa,

$(Ç(x).e^{-x})' + (Ç(x).e^{-x}) = e^{-x}$

$[Ç(x)]'.e^{-x} + [e^{-x}]'.Ç(x) + (Ç(x).e^{-x}) = e^{-x}$

$[Ç(x)]'.e^{-x} - e^{-x}.Ç(x) + (Ç(x).e^{-x}) = e^{-x}$

$[Ç'(x)].e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow Ç'(x) = 1$ elde edilir.

$Ç'(x) = 1$ integrali alınırsa, $\int Ç'(x) = \int 1\,dx \Rightarrow$ Ç(x) = x + c

Ç(x) fonksiyonu, y = Ç. e^{-x} de yerine yazılırsa, y = (x + c). e^{-x}

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü : y = (x + c). e^{-x} elde edilir.

$y' + y = e^{-x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümü y = e^{-x}(2 + x) eğrisi olduğundan,

c = 2 olduğu görülür.

x = 0 için, y(0) = e^{-0}.(2 + 0) $\Rightarrow$ y(0) = 2 elde edilir.

II. Yol

$y' + y = e^{-x}$ lineer diferansiyel denkleminde, u = u(x) ve v = v(x) olmak üzere,

y = u.v dönüşümü yapılırsa,

$y' + y = e^{-x} \Rightarrow (u.v)' + (u.v) = e^{-x} \Rightarrow (u'.v + v'.u) + (u.v) = e^{-x}$

$\Rightarrow v.(u' + u) + v'.u = e^{-x}$

u fonksiyonu, $(u' + u) = 0$ olacak şekilde belirlenirse,

$u' = -u \Rightarrow \frac{u'}{u} = -1 \Rightarrow \int \frac{u'}{u} = \int -1 \Rightarrow$ lnu = – x + ç $\Rightarrow$ u = $e^{-x+ç}$

$\Rightarrow$ u = $e^{-x}.e^{ç}$ ($e^{ç}$, keyfi sabit olduğundan $e^{ç}$ yerine Ç yazarsak)

$\Rightarrow$ u = Ç. e^{-x} (Ç keyfi sabit) bulunur.

u nun değeri, $v.(u' + u) + v'.u = e^{-x}$ yerine yazılırsa,

$v.[(Ç.e^{-x})' + (Ç.e^{-x})] + v'.(Ç.e^{-x}) = e^{-x}$

$v.[-(Ç.e^{-x}) + (Ç.e^{-x})] + v'.(Ç.e^{-x}) = e^{-x} \Rightarrow$ 0.v + $v'.(Ç.e^{-x}) = e^{-x} \Rightarrow v' = \frac{1}{Ç}$

İntegrali alınırsa, $\int$ v' = $\int \frac{1}{Ç} \Rightarrow$ v = $\frac{1}{Ç}$.x + C

O halde, lineer diferansiyel denklemin çözümü, y = u.v

$\Rightarrow$ y = $(Ç.e^{-x}).(\frac{1}{Ç}x + C) \Rightarrow$ y = $e^{-x}.(x + Ç.C)$ (Ç.C yerine c yazarsak)

$\Rightarrow$ y = $e^{-x}.(x + c)$ bulunur.

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü : y = (x + c). e^{-x} elde edilir.

$y' + y = e^{-x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümü y = e^{-x}(2 + x) eğrisi olduğundan,

c = 2 olduğu görülür.

x = 0 için, y(0) = e^{-0}.(2 + 0) $\Rightarrow$ y(0) = 2 elde edilir.

Not : Lineer Diferansiyel Denklemler

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ şekline getirilebilen bir denkleme lineer diferansiyel denklem denir.

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ diferansiyel denkleminde, u = u(x) , v = v(x) olmak üzere,

y = u.v dönüşümü yapılırsa, $[u^{/} + P(x).u].v + u.v^{/} = Q(x)$ bulunur.

u fonksiyonu $u^{/} + P(x).u = 0$ olacak şekilde belirlenirse $u = e^{-\int P(x)dx}$ elde eldir.

u nun değeri $[u^{/} + P(x).u].v + u.v^{/} = Q(x)$ de yerine konursa

$v = C + \int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx$ bulunur.

y = u.v = $e^{-\int P(x)dx}.\left[C + \int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx\right]$ dir.

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ lineer diferansiyel denkleminin genel çözümü “sabitin değişimi yöntemi” adı verilen aşağıdaki yöntemle de bulunabilir.

Önce $Q(x) = 0$ alınır ve böylece elde edilen

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^{/}}{y} = -P(x)$ diferansiyel denklemi integre edilirse

$y = Ce^{-\int P(x)dx}$ bulunur.

C sabiti yerine x in bir C(x) fonksiyonu alınır ve böylece elde edilen

$y = C(x).e^{-\int P(x)dx}$ fonksiyonu $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ denkleminde yerine konursa

$C^{/}(x).e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx + C_1$ elde edilir.

$C(x)$ in değeri $y = C(x).e^{-\int P(x)dx}$ da yerine konursa,

lineer diferansiyel denklemin genel çözümü : $y = e^{-\int P(x)dx}.\left[C_1 + \int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx\right]$ olur.

98. S_7 de ayrık iki devirin çarpımı şeklinde ifade edilen $\alpha = (\ 3\ 5\ 6\ 2\ ).(\ 1\ 4\ )$ permütasyonunun tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\alpha^{-1} = (\ 2\ 5\ 6\ ).(\ 1\ 4\ )$ B) $\alpha^{-1} = (\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7\ ).(\ 1\ 4\ )$

C) $\alpha^{-1} = (\ 2\ 6\ 5\ 3\ ).(\ 4\ 1\ )$ D) $\alpha^{-1} = (\ 3\ 2\ 6\ 5\ ).(\ 1\ 4\ )$

Çözüm 98

Devirsel gösterimi, $\alpha = (\ 3\ 5\ 6\ 2\ ).(\ 1\ 4\ )$ ise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 3 & 5 & & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & & & 1 & & \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Devirsel gösterimi,

$\alpha^{-1} = (\ 2\ 6\ 5\ 3\ ).(\ 1\ 4\ )$ veya $\alpha^{-1} = (\ 2\ 6\ 5\ 3\ ).(\ 4\ 1\ )$

veya $\alpha^{-1} = (\ 3\ 2\ 6\ 5\ ).(\ 1\ 4\ )$ veya $\alpha^{-1} = (\ 3\ 2\ 6\ 5\ ).(\ 4\ 1\ )$

veya $\alpha^{-1} = (\ 5\ 3\ 2\ 6\ ).(\ 1\ 4\ )$ veya $\alpha^{-1} = (\ 5\ 3\ 2\ 6\ ).(\ 4\ 1\ )$

veya $\alpha^{-1} = (\ 6\ 5\ 3\ 2\ ).(\ 1\ 4\ )$ veya $\alpha^{-1} = (\ 6\ 5\ 3\ 2\ ).(\ 1\ 4\ )$ elde edilir.

Buna göre C ve D seçeneklerinin ikisi de α permütasyonunun tersi olur.

Not :

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ..... & a_n \\ a_2 & a_1 & a_3 & ..... & a_n \end{pmatrix}$$ permütasyonu sadece a_1 ve a_2 elemanlarını değiştirip diğerlerini sabit bırakır.

Bu durumda $f = (\ a_1\ a_2\ )$ yazılır. Yani 1 – li devirler yazılmayabilir.

99. 3^7 den küçük ve 3^7 ile aralarında asal olan kaç tane doğal sayı vardır?

A) 243 B) 486 C) 728 D) 1458

Çözüm 99

I. Yol

Euler Teoremine göre,

a pozitif bir tam sayı ve p asal bir sayı ise, $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$ olduğundan,

7 pozitif bir tam sayı ve 3 asal bir sayı olduğuna göre,

$\phi(3^7) = 3^7 - 3^{7-1} = 3^7 - 3^6 = 3^6.(3 - 1) = 3^6.2 = 729.2 = 1458$ elde edilir.

II. Yol

$3^7 = 2187$

2187 den küçük, 3 ün katı olan 729 tane sayı vardır.

2187 – 729 = 1458 tane sayı 3 ün katı değildir yani 3^7 ile aralarında asaldır.

Not : Euler Teoremi

n pozitif bir tamsayı olsun.

n den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısına Euler ϕ – fonksiyonu denir ve $\phi(n)$ ile gösterilir. (ϕ : fi)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

$1 \leq n \leq 12$ aralığındaki n değerleri için Euler fi – fonksiyonu değerleri

- ✓ m pozitif bir tam sayı ve a tam sayısı (m , a) = 1 şartını sağlıyorsa, $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$
- ✓ p bir asal sayı ise, $\phi(p) = p - 1$ dir. Bunun terside doğrudur.
- ✓ a pozitif bir tam sayı ve p asal bir sayı ise, $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$ dir.
- ✓ m ve n aralarında asal pozitif tamsayılar olsun. $\phi(m.n) = \phi(m).\ \phi(n)$ dir.
- ✓ n pozitif tam sayısının asal kuvvet çarpanlarına ayrılmış şekli,

n = $p_1^{a_1} . p_2^{a_2} . p_3^{a_3} . . . . p_k^{a_k}$ olsun.

$\phi(n) = n.\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right).\left(1-\frac{1}{p_3}\right).\,.\,.\,.\,.\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ olur.

100. $\left.\begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod 3 \\ a \equiv 1 \pmod 5 \end{array}\right\}$ ve $\left.\begin{array}{l} b \equiv 1 \pmod 3 \\ b \equiv 2 \pmod 5 \end{array}\right\}$ denklem sistemlerinin çözümlerinin toplamı mod 15'e göre kaça kongrüenttir?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7

Çözüm 100

I. Yol

$a \equiv 2 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad a = 3.k + 2 \ (k \in Z) \quad \Rightarrow \quad a = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

$a \equiv 1 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad a = 5.k + 1 \ (k \in Z) \quad \Rightarrow \quad a = \{1, 6, 11, 16, \ldots\}$

$\Rightarrow \quad a = 11$

$b \equiv 1 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad b = 3.k + 1 \ (k \in Z) \quad \Rightarrow \quad b = \{1, 7, 10, 13, \ldots\}$

$b \equiv 2 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad b = 5.k + 2 \ (k \in Z) \quad \Rightarrow \quad b = \{2, 7, 12, 17, \ldots\}$

$\Rightarrow \quad b = 7$

$a + b = 11 + 7 = 18 \equiv 3 \pmod{15}$

II. Yol

$a \equiv 2 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad a = 3.k + 2 \ (k \in Z)$

$a \equiv 1 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad a = 5.k + 1 \ (k \in Z)$

$a = 3k + 2 = 5k + 1$

$a + 5 = 3k + 1 = 5k + 1 \quad \Rightarrow \quad 15k + 1 = a + 5 \quad \Rightarrow \quad a = 15k + 11 \quad \Rightarrow \quad a \equiv 11 \pmod{15}$

$b \equiv 1 \pmod 3 \quad \Rightarrow \quad b = 3.k + 1 \ (k \in Z)$

$b \equiv 2 \pmod 5 \quad \Rightarrow \quad b = 5.k + 2 \ (k \in Z)$

$b = 3k + 1 = 5k + 2$

$b + 10 = 3k + 2 = 5k + 2 \quad \Rightarrow \quad 15k + 2 = b + 10 \quad \Rightarrow \quad b = 15k + 7 \quad \Rightarrow \quad b \equiv 7 \pmod{15}$

$a + b = 11 + 7 = 18 \equiv 3 \pmod{15}$

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA