21 Ağustos 2006

Anadolu Liseleri Öğretmenliği İçin Seçme Sınavı

Matematik Soruları ve Çözümleri

61. $m \Leftrightarrow (m \wedge n)$ bileşik önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

A) $m' \vee n$ B) $m' \wedge n$ C) $m \wedge n'$ D) $m \vee n'$

Çözüm 61

$$m \Leftrightarrow (m \wedge n) \equiv [m \Rightarrow (m \wedge n)] \wedge [(m \wedge n) \Rightarrow m]$$

$$\equiv [m' \vee (m \wedge n)] \wedge [(m \wedge n)' \vee m]$$

$$\equiv [(m' \vee m) \wedge (m' \vee n)] \wedge [(m' \vee n') \vee m]$$

$$\equiv [1 \wedge (m' \vee n)] \wedge [(m' \vee m) \vee n')]$$

$$\equiv [(m' \vee n)] \wedge [(1 \vee n')]$$

$$\equiv (m' \vee n) \wedge 1$$

$$\equiv m' \vee n$$

Not :

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

De morgan kuralı : $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

Dağılma özelliği : $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Birleşme özelliği : $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$p \vee p' \equiv 1$

$p \vee 1 \equiv 1$

$p \wedge 1 \equiv p$

Not :

p	q	p Λ q	p V q	p ⇒ q	p ⇔ q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

62. $a , b \in R$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerden hangisi <u>doğru değildir?</u>
("sign" sayının işaretini göstermektedir.)

A) $\max \{a , -a\} = |a|$

B) $\min \{a , -a\} = -|a|$

C) $b.\text{sign}\, b = |b|$

D) $\min \{a , b\} = -\min \{-b , -a\}$

Çözüm 62

$$\left.\begin{array}{l} a > 0 \text{ ise } -a < 0 \text{ olduğuna göre, } |a| = a \\ \max\{a , -a\} = a = |a| \\ \min\{a , -a\} = -a = -|a| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A) } \max \{a , -a\} = |a|$$

$$\left.\begin{array}{l} a < 0 \text{ ise } -a > 0 \text{ olduğuna göre, } |a| = -a \\ \max\{a , -a\} = -a = |a| \\ \min\{a , -a\} = a = -|a| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{B) } \min \{a , -a\} = -|a|$$

$$\left.\begin{array}{l} b > 0 \text{ ise } b.\text{sgn}b = b = |b| \\ b < 0 \text{ ise } b.\text{sgn}b = -b = |b| \\ b = 0 \text{ ise } 0.\text{sgn}0 = 0 = |0| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{C) } b.\text{sign}\, b = |b|$$

$$\left.\begin{array}{l} a < b \text{ olsun. } \Rightarrow -a > -b \text{ olduğuna göre,} \\ \min\{a , b\} = a \\ -\min\{-b , -a\} = -(-b) = b \end{array}\right\} a \neq b \Rightarrow \text{D) } \min \{a , b\} \neq -\min \{-b , -a\}$$

63. [– 3 , 1] aralığında $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ C) $\left[\frac{-1}{2}, 0\right]$ D) $\{-2 , 1\}$

Çözüm 63

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \leq 0$

$x^4 + (3x^3 - x^3) - 3x^2 - 4x + 4 \leq 0$

$x^3.(x - 1) + 3x^2.(x - 1) - 4.(x - 1) \leq 0$

$(x - 1).(x^3 + 3x^2 - 4) \leq 0$

$(x - 1).[(x^3 + (4x^2 - x^2) + (4x - 4x) - 4)] \leq 0$

$(x - 1).[x.(x^2 + 4x + 4) - (x^2 + 4x + 4)] \leq 0$

$(x - 1).[x.(x + 2)^2 - (x + 2)^2] \leq 0$

$(x - 1).[(x + 2)^2.(x - 1)] \leq 0$

$[(x + 2)^2.(x - 1)^2] \leq 0$

$[(x + 2).(x - 1)]^2 \leq 0$

$[(x + 2).(x - 1)] = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \\ x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \end{array}\right\} \text{Çözüm kümesi} = \{-2 , 1\}$$

64. π ve $\sqrt{2}$ sayıları için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I – Her ikisi de cebirsel sayıdır.

II – π transandant ve $\sqrt{2}$ cebirsel sayıdır.

III – Her ikisi de irrasyonel sayı değildir.

IV – π cebirsel ve $\sqrt{2}$ transandant sayıdır.

A) Yalnız II B) I, II C) I , II , III D) Yalnız IV

Çözüm 64

$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu varsayalım.

Bu takdirde, p ve q aralarında asal pozitif iki tam sayı olmak üzere,

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ şeklinde yazılabilir.

Buradan

$p^2 = 2q^2$ ve dolayısıyla $p = 2k$ bulunur.

p 'nin değeri $p^2 = 2q^2$ eşitliğinde yerine konursa,

$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 2k^2 = q^2$

ve buradan da $q = 2m$ elde edilir yani p ve q sayısı 2 ile bölünebilir.

Halbuki p ve q 'yu aralarında asal kabul etmiştik.

O halde $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir.

$\pi = 3{,}1415 \quad \Rightarrow$ İrrasyoneldir.

$x^2 - 2 = 0$ polinomunun kökü : $x = \sqrt{2}$ olduğuna göre, $\sqrt{2}$ cebirsel sayıdır.

π , tam katsayılı hiçbir polinomun kökü olamaz, dolayısıyla transandant sayıdır.

Dolayısıyla sadece, “II – π transandant ve $\sqrt{2}$ cebirsel sayıdır.” doğrudur.

Not :

Tam sayılar

1 , 2 , 3 , 4 , ... sayıları pozitif tam sayılar (doğal sayılar) kümesini,
– 1 , – 2 , – 3 , – 4 , ... sayıları da negatif tam sayılar kümesini oluşturur.
Sıfır sayısı, pozitif tam sayılar ve negatif tam sayılardan meydana gelen kümeye tam sayılar kümesi denir.

Rasyonel sayılar

p ve q $(q \neq 0)$ tam sayılar olmak üzere $\frac{p}{q}$ şeklindeki bir sayıya rasyonel sayı veya kesir denir.

$\frac{p}{q}$ kesri, p 'yi q 'ya bölmek suretiyle ondalık sayı şeklinde yazılabilir.
Bu ondalık sayıda virgülden sonraki bir kısım hane aynı sırada olmak üzere sonsuz defa tekrarlanır.
Böyle bir ondalık sayıya periyodiktir denir.

İrrasyonel sayılar

Rasyonel olmayan bir sayıya irrasyonel sayı denir.
İrrasyonel sayıları periyodik ondalık sayılar şeklinde yazılamayan sayılar olarak da tanımlayabiliriz.

Reel sayılar

Rasyonel ve irrasyonel sayılardan meydana gelen kümeye reel (gerçel) sayılar kümesi ve bu kümenin elemanlarına da reel sayılar denir.

Cebrik ve Transandan sayılar

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ tam sayılar olmak üzere

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

cebrik denkleminin her köküne bir cebrik sayı, cebrik olmayan bir sayıya da transandan sayı denir.

65. $H = [-1\ ,\ 2] \cup \left\{\sqrt{3}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\}$ reel sayılar cisminin bir alt kümesi, Q da rasyonel sayıların kümesi olmak üzere, $H \cap Q = H^{/}$ kümesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $H^{/}$ sınırlı ve sonludur.

B) $H^{/}$ sayılamaz ve sonludur.

C) $H^{/}$ sayılamaz sonsuzdur.

D) $H^{/}$ sınırlı ve sayılabilir sonsuzdur.

Çözüm 65

$H^{/}$ kümesi $[-1\ ,\ 2]$ aralığındaki rasyonel sayıların kümesi olduğundan, sınırlı ve sonsuz elemanlı bir kümedir.
Diğer yandan Rasyonel sayılar sayılabilir bir küme olup her alt kümesi de sayılabilir olduğundan, $H^{/}$ sınırlı ve sayılabilir sonsuzdur.

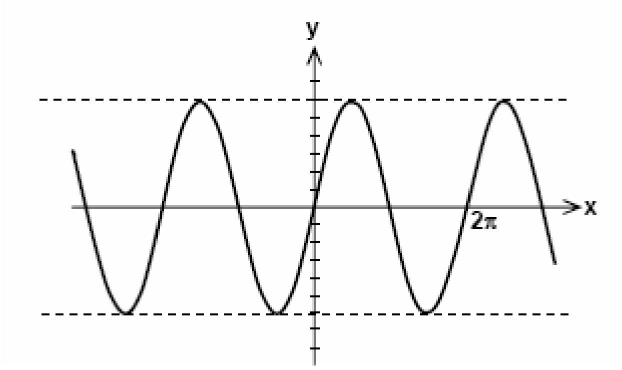
Not : Sayılabilir küme
Sonsuz elemanlı bir kümenin elemanları ile doğal sayılar kümesinin elemanları arasında bire bir eşleme kurulabiliyorsa böyle bir kümeye sayılabilir küme denir.

66. a ve b sabitler olmak üzere,

aşağıda grafiği verilen $y = a.\sin(bx)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Grafiğe göre, $a + b$ nin değeri kaçtır?

(Not : y eksenindeki her parça 1 birim uzunluktadır.)



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8

Çözüm 66

$$\left.\begin{array}{l} y = a.\sin(bx) \quad \Rightarrow \quad \text{periyot} = \dfrac{2\pi}{b} \\ \\ \text{Grafiğe göre, periyot} = 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

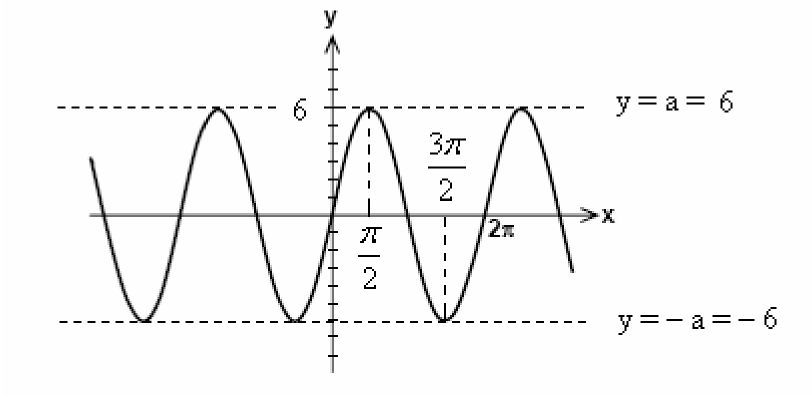
$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = a.\sin 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = a.\sin\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = a = 6$

$x = \pi \quad \Rightarrow \quad y = a.\sin\pi \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$x = \dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = a.\sin\dfrac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -a = -6$

$x = 2\pi \quad \Rightarrow \quad y = a.\sin 2\pi \quad \Rightarrow \quad y = 0$



Grafiğe göre, a + b = 6 + 1 = 7 elde edilir.

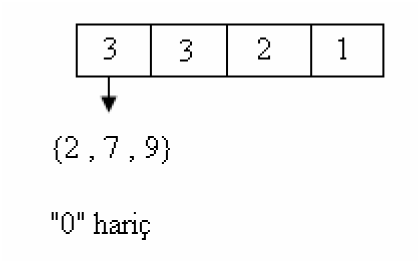
67. 0, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 9, 9 rakamları kullanılarak,
aynı rakamlar yan yana gelmek şartıyla, on basamaklı kaç farklı doğal sayı oluşturulabilir?

A) 18 B) 24 C) 200 D) 288

Çözüm 67

Aynı rakamlar yan yana geleceği için, sıralanacak eleman sayısı 4 dür.

"0" sayısı başa gelmeyeceği için, ilk basamağa gelecek rakam 3 elemandan birisi olacaktır.



Buna göre, yazılabilecek 10 basamaklı doğal sayıların sayısı = 3.3.2.1 = 18 tane olacaktır.

68. Bir davette 15 kişi bir araya gelmiş ve davetlilerden her biri herkesle el sıkışmıştır.
Toplam el sıkışma sayısı kaçtır?

A) 14! B) 7! C) 120 D) 105

Çözüm 68

I. Yol

1. kişinin tokalaşma sayısı = 14
2. kişinin tokalaşma sayısı = 13
3. kişinin tokalaşma sayısı = 12

. . . .

. . . .

14. kişinin tokalaşma sayısı = 1 olacaktır.

Toplam tokalaşma sayısı = 14 + 13 + 12 + ... + 1 = $\dfrac{14.(14+1)}{2} = \dfrac{14.15}{2}$ = 105

II. Yol

$$C(15\ ,\ 2) = \binom{15}{2} = \frac{15!}{(15-2)!.2!} = \frac{15.14}{2} = 105$$

69. Bir iş yerinde 4 asansör vardır.

Aynı anda 3 kişi, bu asansörleri kullanarak üst kata kaç farklı şekilde çıkabilir?

A) 36 B) 40 C) 64 D) 72

Çözüm 69

I. Yol

Üç kişi farklı asansörleri seçerse,

$P(4\ ,\ 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4.3.2 = 24$ farklı şekilde üst kata çıkabilir.

İki kişi bir asansörü, diğer bir kişi farklı asansörü seçerse,

$C(3\ ,\ 2).4.3 = 3.4.3 = 36$ farklı şekilde üst kata çıkabilir.

Üç kişi aynı asansöre binecekse, seçim 4 farklı şekilde yapılacağından

Toplam = 24 + 36 + 4 = 64 değişik biçimde üst kata çıkabilirler.

II. Yol

3 kişiden herhangi biri, 4 asansörden birini seçebileceğine göre, $4 \times 4 \times 4 = 64$ olur.

70. % 60'ı kız olan bir sınıfta erkeklerin % 80'i, kızların % 40'ı 160 cm den daha uzundur. Rastgele bir öğrenci seçilmiş ve bu öğrencinin boyunun 160 cm den daha uzun olduğu gözlemlenmiştir.

Bu öğrencinin erkek olma olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{6}{25}$ B) $\frac{8}{25}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{3}{8}$

Çözüm 70

I. Yol

$$\text{İstenen olasılık} = \frac{\frac{40}{100}.\frac{80}{100}}{\frac{40}{100}.\frac{80}{100}+\frac{60}{100}.\frac{40}{100}} = \frac{\frac{32}{100}}{\frac{32}{100}+\frac{24}{100}} = \frac{32}{56} = \frac{8.4}{8.7} = \frac{4}{7}$$

II. Yol

Sınıf mevcudu = 100 olsun.

Kızların sayısı = 60

Erkeklerin sayısı = 40

Boyu 160 cm den daha uzun erkeklerin sayısı = 40.% 80 = 32

Boyu 160 cm den daha uzun kızların sayısı = 60.% 40 = 24

Boyu 160 cm den daha uzun olan toplam öğrenci sayısı = 32 + 24 = 56

Seçilen öğrencinin 160 cm den uzun ve erkek olması olasılığı = $\frac{32}{56} = \frac{8.4}{8.7} = \frac{4}{7}$

71. Bir reyonda aynı firmaya ait 2 tane 0,5 litrelik, 2 tane 1 litrelik ve birer tane 2 ve 5 litrelik süt kutuları bulunmaktadır.

Bu kutuların reyondaki bir rafa, hacmi küçük olandan büyük olana doğru sıraya dizilme olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{240}$ B) $\frac{1}{180}$ C) $\frac{1}{135}$ D) $\frac{1}{90}$

Çözüm 71

Tekrarlı (yinelemeli) permütasyona göre,

Sözü edilen 6 tane kutunun sıralamalarının sayısı = $\begin{pmatrix} & & 6 & \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{6!}{2!.2!.1!.1!} = 180$ tanedir.

Küçükten büyüğe bir tek sıralama biçimi olacağına göre olasılığı = $\frac{1}{180}$ olacaktır.

72. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x^3 + 8}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{1}{48}$ B) $-\frac{1}{96}$ C) 0 D) ∞

Çözüm 72

I. Yol

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x^3 + 8} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

L' Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x \to -2} \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)'}{(x^3 + 8)'} = \lim_{x \to -2} \frac{\frac{-1}{x^2}}{3x^2} = \frac{\frac{-1}{(-2)^2}}{3.(-2)^2} = \frac{\frac{-1}{4}}{12} = \frac{-1}{48}$$

II. Yol

$$\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x^3+8}=\frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{2}{2x}+\frac{x}{2x}}{x^3+8}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{2+x}{2x}}{x^3+2^3}=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{2+x}{2x}}{(x+2).(x^2-2x+2^2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{2x}.\frac{1}{(x+2).(x^2-2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{2x.(x^2-2x+4)}=\frac{1}{2.(-2).[(-2)^2-2.(-2)+4]}$$

$$=\frac{1}{-4.12}$$

$$=\frac{-1}{48}$$

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1).\sin x}{x^3+x}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) – 1 B) 0 C) 1 D) ∞

Çözüm 73

I. Yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1).\sin x}{x^3+x}=\frac{(\cos 0-1).\sin 0}{0^3+0}=\frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

L' Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x\to 0}\frac{[(\cos x-1).\sin x]'}{[x^3+x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{[-\sin x.\sin x-\cos x.(\cos x-1)]}{3x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[-\sin^2 x-\cos^2 x+\cos x]}{3x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[-(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos x]}{3x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[-1+\cos x]}{3x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2+1}$$

$$=\frac{\cos 0-1}{3.0+1}$$

$$=\frac{0}{1}$$

$$=0$$

II. Yol

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1).\sin x}{x^3+x} = \frac{(\cos 0-1).\sin 0}{0^3+0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1).\sin x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1).\sin x}{x.(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)}{(x^2+1)}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= \frac{0}{1}.1$$

$$= 0.1$$

$$= 0$$

74. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$ için aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) Değeri yoktur. B) Değeri x dir. C) Değeri 0 dır. D) Değeri $\frac{x}{n}$ dir.

Çözüm 74

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğundan ε > 0 sayısına karşılık bir N doğal sayısı bulunabilir.

Öyle ki, n > N için $|\ x_n - x\ | < \frac{\varepsilon}{2}$ olur.

Diğer taraftan

$$|\ y_n - x\ | = |\ \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} - x\ |$$

$$= \frac{|(x_1 - x) + (x_2 - x) + (x_3 - x) + ... + (x_N - x) + (x_{N+1} - x) + ... + (x_n - x)|}{n}$$

$$\leq \frac{|(x_1 - x) + (x_2 - x) + (x_3 - x) + ... + (x_N - x)|}{n} + \frac{|(x_{N+1} - x) + (x_{N+2} - x) + ... + (x_n - x)|}{n}$$

$$< \frac{|(x_1 - x) + (x_2 - x) + (x_3 - x) + ... + (x_N - x)|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.\left(\frac{n - N}{n}\right) \text{ bulunur.}$$

$$|(x_1 - x) + (x_2 - x) + (x_3 - x) + ... + (x_N - x)|$$

ifadesi n ’ye bağlı olmadığından n ’yi uygun (yeterince büyük) seçmek suretiyle

$$\frac{|(x_1 - x) + (x_2 - x) + (x_3 - x) + ... + (x_N - x)|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ yapılabilir ve böylece}$$

$$|\ y_n - x\ | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\left(1 - \frac{N}{n}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ elde edilir.}$$

O halde $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = x$ dir.

Not :

Pozitif terimli bir (a_n) dizisi için;

i) $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dir.

ii) $\lim a_n = a$ ise;

dizinin aritmetik ortalamalar dizisi ve geometrik ortalamalar dizisinin de limiti a dır.

Yani;

$\lim a_n = a$ ise

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = \lim \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.....a_n} = a \text{ dır.}$$

75. Bir fotokopici öğrencilerden ilk 1000 sayfa için 20YTL, 1000 sayfadan sonraki her sayfa için ise bir önceki sayfanın fiyatının 0,01 i kadar daha az para almaktadır.

1000 sayfadan fazla fotokopi çektirildiğinde fotokopi için ödenecek toplam tutarı (T) YTL cinsinden ifade eden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $T = 20 + (0,02)^n \sum_{n=1}^{x+1000} (1 - \frac{1}{10^2})^n$

B) $T = 20 + 0,02 \sum_{n=1}^{x+1000} (1 - \frac{1}{10^2})^n$

C) $T = 20 + 0,02 \sum_{n=1}^{x-1000} (1 + \frac{1}{10^2})^n$

D) $T = 20 + 0,02 \sum_{n=1}^{x-1000} (1 - \frac{1}{10^2})^n$

Çözüm 75

İlk 1000 sayfa için ödenen para 20 YTL ise bir sayfanın fiyatı = $\dfrac{20}{1000}$ = 0,02 YTL

Buna göre, 1000. sayfanın fiyatı 0,02 YTL olduğuna göre,

1001. sayfanın fiyatı = 0,02 – 0,01.0,02 = 0,02.(1 – 0,01) = 0,02.$\left(1-\dfrac{1}{100}\right)$ = 0,02.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$

1002. sayfanın fiyatı = 0,02.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$ – 0,01.[0,02.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$]

= 0,02.[$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$ – 0,01.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$] = 0,02.[$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$ – $\dfrac{1}{100}$.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$]

= 0,02.[$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$ – $\dfrac{1}{10^2}$.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$] = 0,02.[$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$.(1 – $\dfrac{1}{10^2}$)] = 0,02.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)^2$

. . . .
. . . .
. . . .

İlk 1000 sayfanın fiyatı = 20

1001. sayfanın fiyatı = 0,02.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)$

1002. sayfanın fiyatı = 0,02.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)^2$

. . . . .
. . . . .

x inci sayfanın fiyatı = 0,02.$\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)^{x-1000}$

$$T = 20 + 0{,}02.\left(\left(1-\frac{1}{10^2}\right) + \left(1-\frac{1}{10^2}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(1-\frac{1}{10^2}\right)^{x-1000}\right)$$

$$T = 20 + 0{,}02 \sum_{n=1}^{x-1000} \left(1-\frac{1}{10^2}\right)^n$$

76. $\int_{-4}^{4} \left| 2x^2 + 3|x| + 5 \right| dx$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{250}{3}$ B) $\frac{338}{3}$ C) $\frac{520}{3}$ D) $\frac{676}{3}$

Çözüm 76

I. Yol

$\left| 2x^2 + 3|x| + 5 \right|$ için

$x < 0$ ise $| 2x^2 - 3x + 5 |$

Her x için $2x^2 - 3x + 5 > 0$ olduğundan, $| 2x^2 - 3x + 5 | = 2x^2 - 3x + 5$ şeklindedir.

$x > 0$ ise $| 2x^2 + 3x + 5 |$

Her x için $2x^2 + 3x + 5 > 0$ olduğundan, $| 2x^2 + 3x + 5 | = 2x^2 + 3x + 5$ şeklindedir.

Buna göre,

$$\int_{-4}^{4} \left| 2x^2 + 3|x| + 5 \right| dx = \int_{-4}^{0} (2x^2 - 3x + 5)\, dx + \int_{0}^{4} (2x^2 + 3x + 5)\, dx$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x \right) \Bigg|_{-4}^{0} + \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x \right) \Bigg|_{0}^{4}$$

$$= \left[(0) - \left(\frac{-128}{3} - \frac{48}{2} - 20 \right) \right] + \left[\left(\frac{128}{3} + \frac{48}{2} + 20 \right) - (0) \right]$$

$$= \left(\frac{128}{3} + 24 + 20 \right) + \left(\frac{128}{3} + 24 + 20 \right)$$

$$= \frac{256}{3} + 88$$

$$= \frac{256 + 264}{3}$$

$$= \frac{520}{3} \text{ elde edilir.}$$

II. Yol

$$\int_{-4}^{4} \left| 2x^2 + 3\left|x\right| + 5 \right| dx \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = 2x^2 + 3\left|x\right| + 5 \text{ ise}$$

$f(-x) = f(x)$ olduğuna göre, $f(x)$ çift fonksiyondur ve

$\left| f(x) \right| > 0$ ise grafiği y eksenine göre simetrik olduğuna göre,

$$\int_{-4}^{4} \left| 2x^2 + 3\left|x\right| + 5 \right| dx = 2.\left[\int_{0}^{4} (2x^2 + 3x + 5)\ dx \right]$$

$$= 2.\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x \right) \Bigg|_{0}^{4}$$

$$= 2.\left[\left(\frac{128}{3} + \frac{48}{2} + 20 \right) - (0) \right]$$

$$= 2.\left(\frac{128}{3} + 24 + 20 \right)$$

$$= 2.\left(\frac{128 + 132}{3} \right)$$

$$= 2.\frac{260}{3}$$

$$= \frac{520}{3}$$

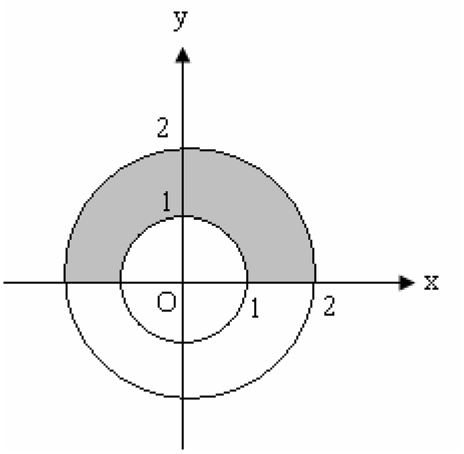
77. XY düzleminde $x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 = 4$ çemberleri ile sınırlı bölgenin üst yarı düzlemdeki parçası B ile gösterilirse

$\iint\limits_B y\sqrt{x^2 + y^2}\; dx\, dy$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{15}{4}$ C) $\frac{15}{2}$ D) $\frac{30}{5}$

Çözüm 77

I. Yol



$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 1$

$x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2$

$$\iint\limits_B y\sqrt{x^2 + y^2}\; dx\, dy = 2.[\underbrace{\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\sqrt{x^2 + y^2}\; dy\, dx}_{(1)} - \underbrace{\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2 + y^2}\; dy\, dx}_{(2)}]$$

$$(1) \quad \to \quad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy \right) dx$$

$$\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy$$

$\sqrt{x^2+y^2} = t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} dy = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy = dt \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} dt \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{t}{y} dt$$

y = 0 için , $t = \sqrt{x^2} \quad \Rightarrow \quad t = x$

y = $\sqrt{4-x^2}$ için , $t = \sqrt{x^2 + (\sqrt{4-x^2})^2} \quad \Rightarrow \quad t = 2$t

$$\int_x^2 y\sqrt{x^2+y^2}\, dy = \int_x^2 y.t.\frac{t}{y} dt = \int_x^2 t^2\, dt = \frac{t^3}{3} \Bigg|_x^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{x^3}{3} = \frac{8-x^3}{3}$$

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{8-x^3}{3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}.\left(8x - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}.\left[\left(8.2 - \frac{2^4}{4} \right) - 0 \right] = \frac{12}{3} = 4$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\; dy\, dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\; dy \right) dx$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy$$

$\sqrt{x^2+y^2} = t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} dy = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy = dt \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} dt \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{t}{y} dt$$

y = 0 için , $t = \sqrt{x^2} \quad \Rightarrow \quad t = x$

y = $\sqrt{1-x^2}$ için , t = $\sqrt{x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2} \quad \Rightarrow \quad t = 1$

$$\int_x^1 y\sqrt{x^2+y^2}\; dy = \int_x^1 y.t.\frac{t}{y}\; dt = \int_x^1 t^2\; dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_x^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{x^3}{3} = \frac{1-x^3}{3}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\; dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1-x^3}{3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}.\left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.\left[\left(1 - \frac{1^4}{4} \right) - 0 \right] = \frac{1}{3}.\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Buna göre

$$\iint_B y\sqrt{x^2+y^2}\; dx\, dy = 2.[\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\; dy\, dx - \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\; dy\, dx]$$

$$= 2.[4 - \frac{1}{4}]$$

$$= 2.\frac{15}{4}$$

$$= \frac{15}{2}$$

II. Yol

İntegrasyon bölgesi, XY düzleminde $x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 = 4$ çemberleri ile sınırlı bölgenin üst yarı düzlemdeki parçası olduğuna göre,
Bu bölge içinde alınan bir noktanın orjine uzaklığı 1 ve 2 birim arasında değişir.
Çünkü içteki çemberin denklemi r = 1 , dıştaki çemberin denklemi r = 2 dir.

$$\left.\begin{aligned} x &= r.\cos\theta \\ y &= r.\sin\theta \end{aligned}\right\}$$ dönüşümü yardımıyla kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\mathrm{J}|\,dr\,d\theta$$ olur.

Çünkü bu dönüşüm için

$$\mathrm{J} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta.r.\cos\theta - \sin\theta.(-r.\sin\theta)$$

$$= r.\cos^2\theta + r.\sin^2\theta$$

$$= r.(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= r.1$$

$$= r$$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\mathrm{J}|\,dr\,d\theta = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Şu halde, $1 \le r \le 2$ ve $0 \le \theta \le \pi$ olacağından,

$$\iint_B y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi\int_1^2 r\sin\theta\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi\int_1^2 r^3\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left(\left. \frac{r^4\sin\theta}{4} \right|_1^2 \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin\theta}{4} (2^4 - 1^4) \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{15\sin\theta}{4} \right) d\theta$$

$$= \left(\frac{-15\cos\theta}{4} \Bigg|_0^{\pi} \right)$$

$$= \left(\frac{-15\cos\pi}{4} \right) - \left(\frac{-15\cos 0}{4} \right)$$

$$= \left(\frac{-15.(-1)}{4} \right) - \left(\frac{-15.1}{4} \right)$$

$$= \frac{15}{4} + \frac{15}{4}$$

$$= \frac{15}{2}$$

Not : S = $\iint_A f(x,y)\ dA$ integralini hesaplamak için,

Önce x i sabit tutup y ye göre, $\int f(x,y)\ dy$ belirli integrali hesaplanır.

Bu integralin sonucu x e bağlı olduğundan bu sonuç x in fonksiyonudur.

Bu fonksiyona $g(x)$ diyelim.

$$g(x) = \int f(x,y)\ dy$$

Sonra $g(x)$ fonksiyonunun integrali hesaplanarak sonuç bulunur.

$$S = \iint_A f(x,y)\ dA = \int g(x)\ dx = \int \left[\int f(x,y)\ dy \right] dx$$

Not : İki katlı integralin hesaplanmasında integralleme sırası değişebilir.

78. Kompleks düzlemde $|z - 4| < |z|$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) x > 2 yarı düzlemi

B) y > – 2 yarı düzlemi

C) x < – 2 yarı düzlemi

D) y < – 2 yarı düzlemi

Çözüm 78

$|z - 4| < z$

$z = x + y.i$ olsun. $\Rightarrow$ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z - 4| = |x + y.i - 4| = |x - 4 + y.i|$ $\Rightarrow$ $|z - 4| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

$|z - 4| < |z|$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} < \sqrt{x^2 + y^2}$

$(x - 4)^2 + y^2 < x^2 + y^2$

$(x - 4)^2 < x^2$ $\Rightarrow$ $x^2 - 8x + 16 < x^2$ $\Rightarrow$ $16 < 8x$ $\Rightarrow$ $2 < x$

Buna göre, $|z - 4| < z$ eşitsizliğini sağlayan noktaların kümesi : x > 2 yarı düzlemi olur.

79. $y^{/} - 2y + 3 = 0$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$ koşulunu sağlayan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \dfrac{e^{2x}}{3}$ B) $y = \dfrac{e^{x}}{3}$ C) $y = \dfrac{3 + e^{2x}}{2}$ D) $y = \dfrac{3 - e^{2x}}{2}$

Çözüm 79

I. Yol

$y^{/} - 2y + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 2\text{y} - 3$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{2y - 3} = dx$ (her iki tarafın integrali alınırsa,)

$\displaystyle\int \frac{dy}{2y - 3} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}.\int \frac{2.dy}{2y - 3} = \int dx$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}.\ln|2y - 3| + \text{c} = x$

$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ için, $y = 1$ olduğuna göre,

$\dfrac{1}{2}\ln|2.1 - 3| + \text{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\ln|-1| + \text{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{c} = 0$

$\dfrac{1}{2}.\ln|2y - 3| + 0 = x \quad \Rightarrow \quad \ln|2y - 3| = 2x$

$2y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3}{2}$

	1	$\frac{3}{2}$	
2y − 3	− − − − −	0	+ + + + +

$y = 1$ için,

$\ln|2y - 3| = -\ln(2y - 3) = 2x$

$-(2y - 3) = e^{2x}$

$2y = -e^{2x} + 3 \quad \Rightarrow \quad \text{y} = \dfrac{3 - e^{2x}}{2}$ elde edilir.

II. Yol

$y^{/} - 2y = 0$ lineer diferansiyel denkleminde “sabitin değişimi yöntemi” kullanılırsa,

$y^{/} - 2y = 0$ diferansiyel denklemi integre edilirse,

$$y^{/} - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y^{/} = 2y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y'}{y} = \int 2$$

$$\Rightarrow \quad \ln y = 2x + ç$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{2x+ç}$$

$\Rightarrow \quad y = e^{ç}.e^{2x}$ ($e^{ç}$, keyfi sabit olduğundan $e^{ç}$ yerine c yazarsak)

$\Rightarrow \quad y = c.e^{2x}$ bulunur.

c keyfi sabiti yerine $c(x)$ fonksiyonu alınır ve böylece elde edilen $y = c(x).e^{2x}$ fonksiyonu

$y^{/} - 2y = -3$ diferansiyel denkleminde yerine konursa,

$$(c(x).e^{2x})^{/} - 2.(c(x).e^{2x}) = -3$$

$$(c(x))^{/}.e^{2z} + (e^{2z})^{/}.c(x) - 2.(c(x).e^{2z}) = -3$$

$$c^{/}(x).e^{2z} + 2.e^{2z}.c(x) - 2.(c(x).e^{2z}) = -3$$

$$c^{/}(x).e^{2z} = -3$$

$$c^{/}(x) = \frac{-3}{e^{2z}}$$

$c^{/}(x) = -3.e^{-2z}$ elde edilir.

$c^{/}(x) = -3.e^{-2z}$ her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int c^{/}(x) = \int -3.e^{-2x}$$

Değişken değiştirerek integral alınırsa,

$$-2x = u \quad \Rightarrow \quad (-2x)' = u'$$

$$\Rightarrow \quad -2\,dx = du \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{-du}{2}$$

$$\int -3.e^{-2x}\ dx = \int -3e^{u}\ \frac{-du}{2} = \frac{3}{2}\int e^{u} du = \frac{3e^{u}}{2} + \mathrm{C}$$

$c(x) = \dfrac{3.e^{-2x}}{2} + \mathrm{C}$ olur.

Yerine yazdığımızda

$$y = c(x).e^{2x} = \left(\frac{3.e^{-2x}}{2} + C\right).e^{2x}$$

$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ için, $y = 1$ olduğuna göre,

$1 = \left(\dfrac{3.e^{-2.0}}{2} + C\right).e^{2.0} \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{-1}{2}$ elde edilir.

$y = \left(\dfrac{3.e^{-2x}}{2} + \dfrac{-1}{2}\right).e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{e^{2x}}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3 - e^{2x}}{2}$ bulunur.

80. Aşağıdaki serilerden hangisi yakınsaktır?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

Çözüm 80

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ $\Rightarrow$ D'Alembert Oran Testinin Limit Şeklini uygularsak,

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2).(2n+1).(2n)!}{((n+1).n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2).(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2).(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4 > 1$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ serisi ıraksaktır.

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ $\Rightarrow$ $p = \frac{1}{2}$ olduğu için, ıraksaktır.

C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

I. Yol

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad$ p = 1 olduğu için, ıraksaktır.

II. Yol

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \; . \; . \; . \; . \; . \; + \frac{1}{n}$$

Cauchy Temel Yakınsaklık Kriterinde m = n alınırsa,

$$x_{n+m} = x_{n+n} = x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \; . \; . \; . \; . \; . \; + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + \frac{1}{2n} \quad \text{olduğundan}$$

$$|\, x_{n+m} - x_n \,| = |\, x_{2n} - x_n \,| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + \frac{1}{2n} > n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Buna göre ε = $\frac{1}{2}$ seçilirse, $m = n$ olması halinde $|\, x_{n+m} - x_n \,| <$ ε eşitsizliği gerçekleşmez.

O halde, Cauchy temel yakınsaklık kriterine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ $\Rightarrow$ Mukayese Testine göre,

$\frac{\sin n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak (!) olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ serisi de yakınsaktır.

I. Yol

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ p = 2 olduğu için, yakınsaktır.

II. Yol

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi,

$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \; . \; . \; . \; . \; . \; + \frac{1}{n^2}$ dir.

$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k.k} < \frac{1}{k.(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ olduğu göz önüne alınırsa

$s_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \; . \; . \; . \; . \; . \; + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ bulunur.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi, pozitif terimli bir seri ve $\{ s_n \}$ kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlı olduğundan,

yakınsaktır.

Not : D'Alembert Oran Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. N doğal sayı olmak üzere N > n için

I) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq$ k < 1 ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

II) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq$ 1 ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ mevcut ise, D'Alembert Oran Testi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Not : D'Alembert Oran Testinin Limit Şekli

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ = L olsun. Bu takdirde

I) L < 1 ise , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

II) L > 1 ise , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

III) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranı 1 sayısına 1 den büyük değerle yaklaşırsa seri ıraksak olup, bu oranın 1 sayısına 1 den küçük değerle yaklaşması halinde serinin tabiatı hakkında bir şey söylenemez.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ = 1 olması halinde, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin tabiatının belirlenmesinde Raabe Testinden faydalanılır.

Not : Raabe Testi

Pozitif terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi verilmiş olsun. $R_n = n.\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ diyelim. Bu takdirde

I) $\lim_{n\to\infty} R_n$ > 1 ise, seri yakınsaktır.

II) $\lim_{n\to\infty} R_n$ < 1 ise, seri ıraksaktır.

Not :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \ (p > 0) \text{ serisi } \begin{cases} p > 1 \text{ için yakınsak} \\ \\ 0 < p \leq 1 \text{ için ıraksak} \end{cases}$$

İspat :

p > 0 için $\{\frac{1}{n^p}\}$ dizisi monoton azalan olduğundan Cauchy Sıklaştırma Testine göre,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ serisi $\sum_{m=0}^{\infty}2^m\frac{1}{(2^m)^p} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^m}$ serisi ile aynı tabiattadır.

$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^m}$ serisi ortak çarpanı $q = \frac{1}{2^{p-1}}$ olan bir geometrik seridir.

p > 1 için q < 1 olacağından geometrik seri ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ serisi yakınsaktır.

0 < p < 1 ise q > 1 olur. O halde, geometrik seri ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ serisi de ıraksaktır.

p = 1 için verilen seri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik serisinden ibaret olup, ıraksaktır.

Not : Cauchy Sıklaştırma Testi

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ pozitif terimli bir seri ne $a_{n+1} \leq a_n$ ise,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi ile $\sum_{m=0}^{\infty}2^m a_{2^m}$ serisi aynı tabiattadır.

Not : Cauchy Temel Yakınsaklık Kriteri

Bir $\{ x_n \}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,0 keyfi olarak seçilen ε > 0 sayısına karşılık bir n doğal sayısının bulunabilmesidir.

m = 0 , 1 , 2 , . . . olmak üzere

$$| x_{n+m} - x_n | < \varepsilon$$

eşitsizliği gerçeklensin.

Not : Mukayese Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli iki seri olsun. N bir doğal sayı olmak üzere n > N

I) $a_n \leq b_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

II) $a_n \geq b_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

Not : Mukayese Testinin Limit Şekli

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitif terimli iki seri olsun. Bu takdirde

I) $\lim_{n \leftarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ = M ≠ 0 ise, her iki serinin tabiatı aynıdır.

II) $\lim_{n \leftarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ = 0 ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

III) $\lim_{n \leftarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ = ∞ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

81. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, I_2 birim matrisine <u>en az</u> kaç tane elemanter satır işlemi uygulanarak elde edilmiştir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

Çözüm 81

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini alalım.

Birinci satırı 4 ile çarpıp, ikinci satırla toplayalım. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Satırları yer değiştirelim. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

İkinci satır 2 ile çarpılırsa, $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi 3 işlemde elde edilir.

Not :

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin satırları (veya sütunları) üzerinde yapılan aşağıdaki üç tip işleme elemanter satır (veya sütun) işlemleri denir.

I) A matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) kendi aralarında yer değiştirmek.

II) A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.

III) A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıp başka bir satırına (veya sütununa) eklemek.

82. Aşağıdakilerden hangisi bir elemanter matristir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Çözüm 82

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ elemanter matristir. 1. satır ile 2. satır yer değiştirmiştir.

Not :

Elemanter işlemlerin birim matrise uygulanması ile elde edilen matrise elemanter matris denir.

Başka bir ifadeyle

I bir birim matris ve ε keyfi bir elemanter satır (veya sütun) işlemi olmak üzere, $\varepsilon(I_n)$ formundaki bir n × n matrise bir elemanter matris denir.

83. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ olmak üzere A.X = 0 homojen sisteminin çözüm uzayının boyutu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Çözüm 83

Katsayılar matrisini satırca indirgenmiş eşelon forma getirelim.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ → Birinci satırı (– 2) ile çarpıp, ikinci satıra ekleyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{rank}A = 1$$

1 < 2 ise sistemin 2 – 1 = 1 parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

$$A.X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 1.x_1 + 4.x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -4x_2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$x_2 = 1$ için $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ olduğundan, çözüm uzayının bir tabanı olarak $\{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ alınabilir.

Buna göre, çözüm uzayının boyutu = 1 olur.

Not :

A.X = 0 lineer denklem sistemine bir lineer homojen denklem sistemi denir.

X = 0 , lineer homojen denklem sisteminin her zaman bir çözümüdür.

Bu çözüme sistemin sıfır çözümü veya aşikar çözümü denir.

Not :

A , m x n bir matris olmak üzere, A.X = 0 lineer homojen denklem sistemini düşünelim.

A nın satırca indirgenmiş eşelon formunda sıfırdan farklı satırların sayısı,

yani A nın rangı r olsun.

i) r < n ise sistemin n – r parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

ii) r = n ise sistemin tek çözümü sıfır çözümdür.

Özel olarak,

Denklem sayısı bilinmeyen sayısından az, yani m < n ise r ≤ m < n olacağından,

sistemin n – r parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

Eğer, denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit, yani m = n ise sistemin tek çözümünün sıfır çözüm olması için gerek ve yeter koşul r = m = n olması.

Yani A nın I_n ye denk (A nın regüler - terslenebilir) olmasıdır.

84. $\{u , v\}$ ve $\{w , z\}$; R^2 nin R üzerindeki iki farklı bazı (tabanı) olsun.
Buna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>her zaman</u> doğrudur?

A) $\{u + w , v + z\}$, R^2 nin bir bazıdır.

B) $\{(0 , 0) , v\}$, R^2 nin bir bazıdır.

C) $\{u - z , v - w\}$, R^2 nin bir bazıdır.

D) $\{2u , v\}$, R^2 nin bir bazıdır.

Çözüm 84

$\{u + w , v + z\}$, $\{(0 , 0) , v\}$ ve $\{u - z , v - w\}$, R^2 nin bir bazı olması için lineer bağımsız ve germe özelliklerini sağlaması gerekir.
Öyle vektör bileşenleri seçilir ki, $(0 , 0) \in \{u + w , v + z\}$
$(0 , 0) \in \{(0 , 0) , (x , y)\}$
Öyle vektör bileşenleri seçilir ki, $(0 , 0) \in \{u - z , v - w\}$
$\{(0 , 0)\}$ lineer bağımlı olduğuna göre, verilen küme R^2 nin bir bazı değildir.
$\{u , v\}$ R^2 nin bir bazı olduğuna göre, $\{2u , v\}$, R^2 nin bir bazıdır.

Örnek :

$u = (1 , 1)$ ve $v = (-1 , 0)$

I) $(1 , 1) , (-1 , 0)$ vektörlerinin lineer bağımsızlığını araştıralım.
$a.(1 , 1) + b.(-1 , 0) = (0 , 0) \quad \Rightarrow \quad (a - b , a) = (0 , 0) \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$ bulunur.
$\{u , v\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

II) $(1 , 1) , (-1 , 0)$ vektörlerinin R^2 yi gerdiğini araştıralım.
Bunun için $(x , y) \in R^2$ olmak üzere,
$(x , y) = a.(1 , 1) + b.(-1 , 0)$ eşitliğindeki a , b sayılarını bulmalıyız.
$(x , y) = (a - b , a) \quad \Rightarrow \quad a = y$ ve $b = y - x$ bulunur.
böylece
$(x , y) = y.(1 , 1) + (y - x).(-1 , 0)$ olup $(x , y) \in L \{ (1 , 1) , (-1 , 0) \}$ dır.
O halde $L(\{u , v\}) = R^2$ dir.

Böylece $\{ (1 , 1) , (-1 , 0) \}$ kümesi de R^2 için bir tabandır.

$\{2u , v\}$ kümesini inceleyelim. $\Rightarrow$ $2u = (2 , 2)$ ve $v = (-1 , 0)$

I) (2 , 2) , (– 1 , 0) vektörlerinin lineer bağımsızlığını araştıralım.

$a.(2 , 2) + b.(-1 , 0) = (0 , 0)$ $\Rightarrow$ $(2a - b , 2a) = (0 , 0)$ $\Rightarrow$ $a = b = 0$ bulunur.

$\{2u , v\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

II) (2 , 2) , (– 1 , 0) vektörlerinin R^2 yi gerdiğini araştıralım.

Bunun için $(x , y) \in R^2$ olmak üzere,

$(x , y) = a.(2 , 2) + b.(-1 , 0)$ eşitliğindeki a , b sayılarını bulmalıyız.

$(x , y) = (2a - b , 2a)$ $\Rightarrow$ $a = \frac{y}{2}$ ve $b = y - x$ bulunur.

Böylece

$(x , y) = \frac{y}{2}.(2 , 2) + (y - x).(-1 , 0)$ olup $(x , y) \in L\{ (2 , 2) , (-1 , 0) \}$ dır.

O halde $L(\{2u , v\}) = R^2$ dir.

Böylece $\{ (2 , 2) , (-1 , 0) \}$ kümesi de R^2 için bir tabandır.

Not :

V bir vektör uzayı S = $\{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \} \subset$ V olsun.

Eğer S kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa S ye V nin bir tabanı veya bazı denir.

I – S lineer bağımsız bir kümedir.

II – V = L(S) = < S > yani S, V yi geren bir kümedir.

Not :

$v_1 , v_2 , \ldots , v_n \in$ V olsun.

$c_1 , c_2 , \ldots , c_n \in$ F olmak üzere bir $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$ şeklindeki bir toplama

$v_1 , v_2 , \ldots , v_n$ nin bir lineer toplamı denir.

$\emptyset \neq$ S $\subset$ V ise S den alınan her sonlu sayıdaki eleman lineer toplamları kümesi de < S > ile gösterilir. < S > bir alt uzaydır ve bu alt uzaya S nin ürettiği alt uzay denir.

S = $\emptyset$ ise < S > = $\{ 0_V \}$ alınır.

Not :

V vektör uzayı için V = < S > olacak şekilde bir S alt kümesi varsa,

S ye V nin bir üreteç sistemi denir.

Not :

V bir vektör uzayı S = $\{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \} \subset$ V olsun.

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

olmasını gerektiriyorsa S ye V nin bir lineer bağımsız alt kümesi denir.

Örnek :

v $\in$ V sıfır olmayan bir vektör ise v lineer bağımsızdır.

0_V lineer bağımlıdır. Çünkü, $1 . 0_V = 0_V$ dir.

85. Bir F cismi üzerindeki bir V vektör uzayının boyutu $boy_F V$ olmak üzere, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
(Burada C kompleks sayılar cismini göstermektedir.)

A) $boy_R C = 2$ dir.

B) $boy_C C = 2$ dir.

C) $boy_R R = 1$ dir.

D) $boy_R R^2 = 2$ dir.

Çözüm 85

A) $boy_R C = 2 \quad \Rightarrow$ {1 , i} kümesi taban (baz) olup C yi üretir.

B) $boy_C C = 2 \quad \Rightarrow$ {1} kümesi taban (baz) olup C yi üretir. $\Rightarrow$ $boy_C C = 1$ olmalıdır.

C) $boy_R R = 1 \quad \Rightarrow$ {1} kümesi taban (baz) olup R yi üretir.

D) $boy_R R^2 = 2 \quad \Rightarrow$ {(1 , 0) , (0 , 1)} kümesi taban (baz) olup R^2 yi üretir.

Not :
Sonlu boyutlu bir V vektör uzayının herhangi bir tabanındaki vektörlerin sayısına V nin boyutu denir ve $boyV$ ile gösterilir.
Örnek :
R^2 deki $e_1 = (1 , 0)$, $e_2 = (0 , 1)$ standart vektörlerin E = { e_1 , e_2 } kümesi R^2 nin standart tabanıdır. Buna göre $boyR^2 = 2$ dir.
V = { 0 } vektör uzayı 0 boyutlu olarak tanımlanır.

Not :
R reel sayılar cismi üzerindeki bir vektör uzayına reel vektör uzayı,
C kompleks sayılar cismi üzerindeki bir vektör uzayına da kompleks vektör uzayı denir, ve birim elemanı 1 dir.

86. V bir vektör uzayı; U ve W, V nin iki alt uzayı olsun.
Aşağıdakilerden hangisi <u>her zaman</u> doğrudur?

A) $U \cup W$, V nin bir alt uzayıdır.

B) $U \setminus W$, W nun bir alt uzayıdır.

C) $U \setminus \{0\}$, V nin bir alt uzayıdır.

D) $U \cup \{0\}$, V nin bir alt uzayıdır.

Çözüm 86

$\{0_V\}$ sıfır vektörünü, V vektör uzayının aşikar alt uzayı olduğundan,

V vektörü sıfır vektörünü içermek zorundadır. $\Rightarrow$ "D) $U \cup \{0\}$, V nin bir alt uzayıdır."

Not :
V bir vektör uzayı ve W , V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.
W kümesi, V kümesinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ye V nin bir alt uzayı denir.
Bu tanımdan aşağıdaki sonuçları elde etmek oldukça kolaydır :
i) Her vektör uzayı kendisinin bir alt uzayıdır.
ii) $\{0\}$ kümesinin oluşturduğu sıfır vektör uzayı o vektör uzayının bir alt uzayıdır.
Buna göre sıfır vektör uzayından farklı her vektör uzayının en az iki alt uzayı vardır.
Not :
Her vektör uzayında, sıfır uzay ve uzayın kendisi birer alt uzaydır.
$\Rightarrow$ $\{0_V\}$ ve V, V vektör uzayının aşikar alt uzaylarıdırlar.

Not :
V bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.
W nin V nin bir alt uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul
i) $x , y \in W$ iken $x + y \in W$ (W , toplama işlemine göre kapalı)
ii) $x \in W$, $c \in R$ iken $c.x \in W$ (W , skalerle çarpma işlemine göre kapalı)
olmasıdır.

87. V, bir F cismi üzerinde boyutu 4 olan bir vektör uzayı ve W, V nin bir alt uzayı olsun. Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Eğer W nun F üzerindeki boyutu 4 ise W = V dir.

B) W nun boyutu 0 olamaz.

C) $0 \notin$ W olabilir.

D) W, V nin bir alt grubu olmayabilir.

Çözüm 87

A) $boy_F V = 4 = boy_F W \quad \Rightarrow \quad$ W = V

B) W = {0} $\quad \Rightarrow \quad boyW = 0$ (sıfır uzayın boyutu sıfırdır.)

C) W, V nin bir alt uzayı olduğuna göre, $0 \in$ W olabilir.

D) $\varnothing$ = W $\subset$ V $\quad \Rightarrow \quad$ W, V nin alt grubu olabilir.

Not :
Her vektör uzayının en az iki alt kümesi vardır, kendisi ve sıfır vektörden oluşan tek elemanlı alt küme, sıfır uzay. Bu alt uzaylara aşikar uzay denir.
Bunlardan başka alt uzayları varsa, onlara da has alt uzaylar denir.

Not :
$\{0_V\}$, sıfır uzayının boyutunu sıfır alabiliriz.

Gerçekten, 0_V vektörü lineer bağımlı olduğundan, bir tabanını bulamayız.

Sıfır uzaydan farklı bir vektör uzayının da boyutu ≥ 1 dir. Çünkü, sıfırdan farklı her vektör lineer bağımsızdır, şu halde tabanı hiç olmazsa bir vektör bulundurur.

88. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerden hangisi R^2 nin bir alt uzayıdır?

A) y = x + 3 B) x + y = 3 C) y = 0 D) x = 3

Çözüm 88

A) $y = x + 3 \quad \Rightarrow \quad W = \{ (x , y) \mid y = x + 3 , x \in R \}$

Alt uzay tanımına göre, W alt uzay ise R^2 deki işlemlere göre bir vektör uzayıdır.

Dolayısıyla R^2 nin sıfır vektörünü içermek zorundadır.

Fakat,

$0 = (0 , 0) \notin W$ olduğundan (x = 0 için y = 3)

$W = \{ (x , y) \mid y = x + 3 , x \in R \}$ kümesi alt uzay değildir.

B) $x + y = 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{ (x , y) \mid x + y = 3 , x \in R \}$

Alt uzay tanımına göre, S alt uzay ise R^2 deki işlemlere göre bir vektör uzayıdır.

Dolayısıyla R^2 nin sıfır vektörünü içermek zorundadır.

Fakat,

$0 = (0 , 0) \notin S$ olduğundan (x = 0 için y = 3)

$S = \{ (x , y) \mid x + y = 3 , x \in R \}$ kümesi alt uzay değildir.

C) $y = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \{ (x , y) \mid y = 0 , x \in R \}$

i) $(x_1 , y_1) \in T \quad \Rightarrow \quad x_1 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$(x_2 , y_2) \in T \quad \Rightarrow \quad x_2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x_1 + x_2 , 0) \in T \quad \Rightarrow \quad (x_1 , 0) + (x_2 , 0) \in T$ olduğundan

$\Rightarrow$ T kümesi , toplama işlemine göre kapalıdır.

ii) $(x_1 , y_1) \in T \quad , \quad c \in R$

$c . (x_1 , 0) = (c . x_1 , 0) \in T$ olduğundan

$\Rightarrow$ T kümesi , skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır.

O halde, $y = 0 \quad \Rightarrow \quad R^2$ nin bir alt uzayıdır.

D) $x = 3 \quad \Rightarrow \quad U = \{ (x , y) \mid x = 3 \}$

Alt uzay tanımına göre, U alt uzay ise R^2 deki işlemlere göre bir vektör uzayıdır.

Dolayısıyla R^2 nin sıfır vektörünü içermek zorundadır.

Fakat,

$0 = (0 , 0) \notin U$ olduğundan ($x = 3$ için)

$U = \{ (x , y) \mid x = 3 \}$ kümesi alt uzay değildir.

Not :

V bir vektör uzayı ve W , V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

W kümesi, V kümesinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ye V nin bir alt uzayı denir.

Bu tanımdan aşağıdaki sonuçları elde etmek oldukça kolaydır :

i) Her vektör uzayı kendisinin bir alt uzayıdır.

ii) $\{0\}$ kümesinin oluşturduğu sıfır vektör uzayı o vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Buna göre sıfır vektör uzayından farklı her vektör uzayının en az iki alt uzayı vardır.

Not :

V bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

W nin V nin bir alt uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul

i) $x , y \in W$ iken $x + y \in W$ (W , toplama işlemine göre kapalı)

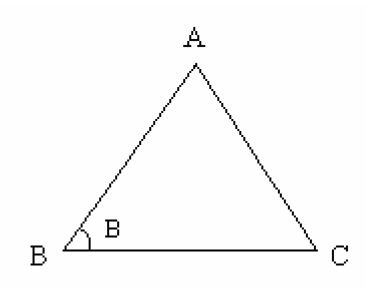
ii) $x \in W$, $c \in R$ iken $c.x \in W$ (W , skalerle çarpma işlemine göre kapalı)

olmasıdır.

89. Köşeleri A(– 1 , – 2 , 4) , B(– 4 , – 2 , 0) , C(3 , – 2 , 1) olan üçgenin B köşesindeki iç açısının ölçüsü nedir?

A) 0° B) 45° C) 50° D) 60°

Çözüm 89



B köşesindeki açı, [AB] ile [BC] kenarları arasındaki açıdır.

Bu kenarlara ait yer vektörlerini yazalım:

$\overrightarrow{BA} = ((-1) - (-4) , (-2) - (-2) , 4 - 0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BA} = (3 , 0 , 4)$

$\overrightarrow{BC} = (3 - (-4) , (-2) - (-2) , 1 - 0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = (7 , 0 , 1)$

$$\cos B = \frac{3.7 + 0.0 + 4.1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}.\sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$\cos B = \frac{21 + 4}{\sqrt{25}.\sqrt{50}}$$

$$\cos B = \frac{25}{5.5\sqrt{2}}$$

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

cosB = cos45

m(B) = 45° elde edilir.

Not : İki vektör arasındaki açı

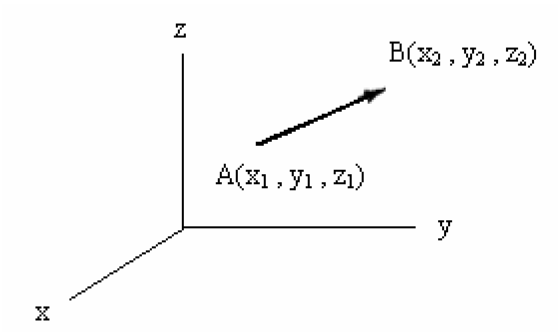
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|}$$

Not : $\vec{u}$ = (a , b , c) vektörünün boyu (normu) $\Rightarrow$ $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Not : Vektörlerin skaler (iç) çarpımı

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (x_1 , y_1 , z_1) \\ \\ \vec{v} = (x_2 , y_2 , z_2) \end{array}\right\} \quad \vec{u}\,.\,\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Not :



Başlangıç noktası = A(x_1 , y_1 , z_1)

Bitim noktası = B(x_2 , y_2 , z_2)

$\overrightarrow{AB}$ = ($x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$) biçiminde bir sıralı ile gösterilir.

90. R^3 uzayında $\vec{u_1} = (3, -1, 5-\mu)$, $\vec{u_2} = (4, 1, -1)$, $\vec{u_3} = (2, -3, 0)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için μ nun değeri ne olmalıdır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{11}{2}$ D) $\frac{15}{2}$

Çözüm 90

c_1 , c_2 , c_3 bilinmeyen sabitler olmak üzere,

$c_1.(3, -1, 5-\mu) + c_2.(4, 1, -1) + c_3.(2, -3, 0) = (0, 0, 0)$

$(3.c_1 + 4.c_2 + 2.c_3\ , (-1).c_1 + 1.c_2 + (-3).c_3\ , (5-\mu).c_1 + (-1).c_2 + 0.c_3) = (0, 0, 0)$

$(3c_1 + 4c_2 + 2c_3\ , -c_1 + c_2 - 3c_3\ , (5-\mu).c_1 - c_2 + 0) = (0, 0, 0)$

$3c_1 + 4c_2 + 2c_3 = 0$

$-c_1 + c_2 - 3c_3 = 0$

$(5 - \mu).c_1 - c_2 + 0 = 0$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir.
Sistemin sıfır çözümden başka çözümlerinin olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır, buna göre sistemin katsayılar matrisinin determinantını bulalım:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5-\mu & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Saruss kuralına göre, $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5-\mu & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = 0$$

$[3.1.0 + (-1).(-1).2 + (5-\mu).4.(-3)] - [(-1).4.0 + 3.(-1).(-3) + (5-\mu).1.2] = 0$

$[0 + 2 - 12.(5-\mu)] - [0 + 9 + 2.(5-\mu)] = 0$

$(12\mu - 58) - (19 - 2\mu) = 0$

$14\mu - 77 = 0$

$\mu = \dfrac{77}{14}$

$\mu = \dfrac{11}{2}$

91. R^3 uzayında $\vec{u} = (0 , 4 , 0)$ ve $\vec{v} = (4 , 0 , -3)$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı kaç br^2 dir?

A) 20 B) $\sqrt{132}$ C) $\sqrt{34}$ D) 5

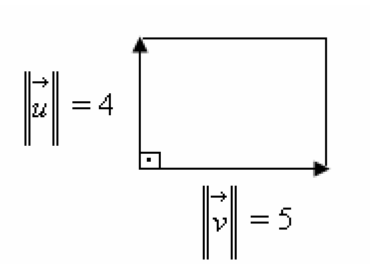
Çözüm 91

$\vec{u} = (0 , 4 , 0) \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{u}\right\| = 4$

$\vec{v} = (4 , 0 , -3) \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{v}\right\| = 5$

Vektörlerin skaler (iç) çarpımı, $\vec{u}.\vec{v} = 0.4 + 4.0 + 0.(-3) \quad \Rightarrow \quad \vec{u}.\vec{v} = 0$

İki vektör arasındaki açı, $\cos\theta = \dfrac{0.4 + 4.0 + 0.(-3)}{4.5} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$



Alan = 4.5 = 20

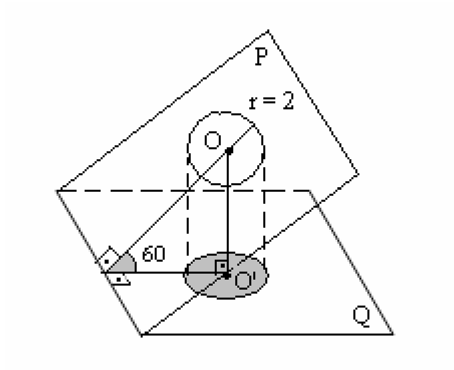
92. Verilen P ve Q düzlemleri arasındaki ölçek açının ölçüsü 60° dir.

P düzlemi içinde bulunan 4 cm çapındaki bir dairenin, Q düzlemi üzerindeki iz düşümünün alanı kaç cm² dir?

($\pi = 3$ alınız.)

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 6 D) $6\sqrt{3}$

Çözüm 92



$2r = 4 \Rightarrow r = 2$

Dairenin dik izdüşümünün alanı = (Dairenin alanı).(cos60)

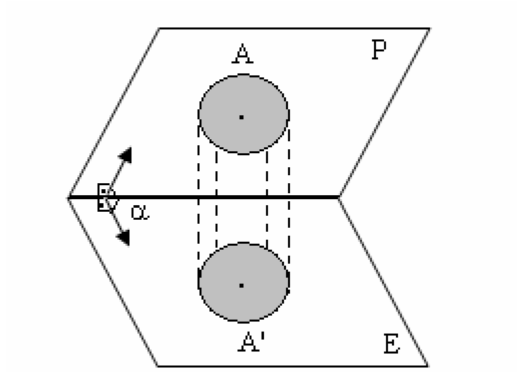
$$= \pi.2^2.\frac{1}{2} = 3.4.\frac{1}{2} = 6$$

Not : Düzlemsel bölgenin dik izdüşümü

Belirttikleri iki düzlemli açının ölçek açısının ölçüsü α olan iki düzlemden (P) içindeki A kapalı bölgesinin, E üzerindeki dik izdüşümü A' kapalı bölgesi olsun.

Bu iki bölgenin alanları s(A) ve s (A') olduğuna göre,

s(A') = s(A).cosα dır.



93. Denklemi $x^2 + 4y^2 = 16$ olan elipsin üzerindeki P($2\sqrt{3}$, y) noktasından çizilen teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
($y > 0$ alınız.)

A) $\sqrt{3}x + 2y - 8 = 0$ B) $2\sqrt{3}x + y + 16 = 0$

C) $x + \sqrt{3}y + 4 = 0$ D) $x + 5y - 2\sqrt{3} = 0$

Çözüm 93

I. Yol

P($2\sqrt{3}$, y) noktası $x^2 + 4y^2 = 16$ elipsinin üzerinde olduğuna göre,

$(2\sqrt{3})^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow 12 + 4y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1 \quad (y > 0)$

Denklemi , $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ olan elipse,

üzerindeki bir P(x_0 , y_0) noktasından çizilen teğetin denklemi :

$\dfrac{x_0.x}{a^2} + \dfrac{y_0.y}{b^2} = 1$ şeklinde olduğuna göre,

P(x_0 , y_0) = P($2\sqrt{3}$, 1)

$x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 16 \ , \ b^2 = 4$

istenen teğet denklemi : $\dfrac{2\sqrt{3}.x}{16} + \dfrac{1.y}{4} = 1$

$$2\sqrt{3}x + 4y + 16 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x + 2y - 8 = 0$$

II. Yol

P($2\sqrt{3}$, y) noktası $x^2+4y^2=16$ elipsinin üzerinde olduğuna göre,

$(2\sqrt{3})^2+4y^2=16 \quad \Rightarrow \quad 12+4y^2=16 \quad \Rightarrow \quad y^2=1 \quad \Rightarrow \quad y=1 \quad (y>0)$

P(x_0 , y_0) = P($2\sqrt{3}$, 1)

P(x_0 , y_0) noktasındaki teğetin eğimi,

elips denkleminin türevinin P(x_0 , y_0) noktasındaki değeri olduğuna göre,

$x^2+4y^2=16$ türevini alalım.

$$2x+8y.y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$$

P($2\sqrt{3}$, 1) noktasındaki eğimi : $\dfrac{-x}{4y} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

Bir noktası ve eğimi bilinen doğru denkleminden,

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{y-1}{x-2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad 2y-2 = 6-\sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x+2y-8=0$$

Not :

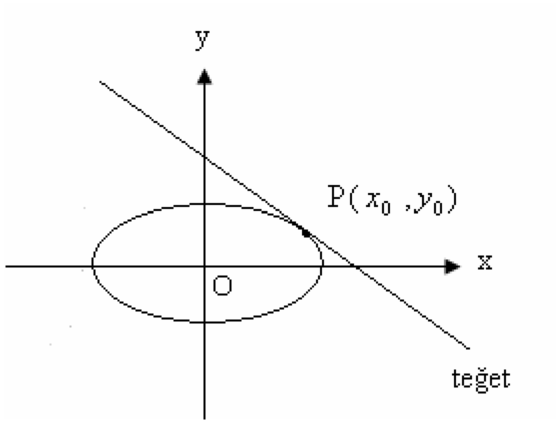
Elipse üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin denklemi türev yardımıyla da bulunabilir.

P(x_0 , y_0) noktasındaki teğetin eğimi, türevin P(x_0 , y_0) daki değeridir.

Not : Elipse üzerindeki bir noktadan çizilen teğet denklemi

Denklemi , $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ olan elipse,

üzerindeki bir P(x_0 , y_0) noktasından çizilen teğetin denklemi : $\frac{x_0 . x}{a^2} + \frac{y_0 . y}{b^2} = 1$



94. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I – Devirli her grup değişmelidir.

II – Devirli her grup sonludur.

III – Toplamsal devirli bir grubun bir üreteci a ise başka bir üreteci de – a dır.

IV – Devirli her grup Z ye izomorftur.

A) I ve III B) II ve III C) IV D) III

Çözüm 94

I – Devirli her grup değişmelidir.

G devirli grup olsun.

Her g_1 , g_2 $\in$ G $\Rightarrow$ G = < g_1 > ve G = < g_2 >

g_1 o g_2 = a^n o a^m = a^{n+m} = a^m o a^n = g_2 o g_1 (abelyen = değişmeli)

II – Devirli her grup sonludur.

Her sonlu grup devirlidir.

Bu ifade yanlıştır.

Mesela

$\Rightarrow$ V_4 klein 4 – lü grubu sonludur ancak devirli değildir.

Birim eleman tek elemanlı alt grup, diğerleri iki elemanlı alt grup üretirler.

$\Rightarrow$ S_3 grubu sonludur ancak devirli değildir. Çünkü değişmeli bile değildir.

III – Toplamsal devirli bir grubun bir üreteci a ise başka bir üreteci de (– a) dır.

G grubunun bir üreteci a ise a^{-1} de G grubunu üretir.

G toplamsal bir grup olduğuna göre, (– a) toplamsal devirli grubun bir üretecidir.

IV – Devirli her grup Z ye izomorftur.

Örneğin S_2 permütasyonlar grubu mertebesi 2 olan sonlu ve devirli bir grup olup Z ye izomorf değildir.

veya Z_m devirli gruptur. Ancak Z ye İzomorf değildir.

Buna göre, I ve III ifadeleri doğrudur.

Not :

G = < a > ve $|a| = \infty$ olsun. G grubu sadece a ve a^{-1} tarafından üretilir.

Bir b $\in$ G elemanı G nin üretici elemanı olsun.

G = < a > = {. . . . . , a^{-2} , a^{-1} , e , a , a^{2} , ... } olup bir m $\in$ Z için b = a^{m} olmalıdır.

Ayrıca, b bir üretici eleman olduğundan,

her n $\in$ Z için $a^{n} = b^{x}$ olacak şekilde bir x $\in$ Z vardır.

Şimdi, $a^{n} = a^{mx} \Rightarrow$ n = mx olup n = mx denkleminin her n $\in$ Z için çözümün olması

m = ± 1 olmasıyla mümkündür.

O halde b = a veya b = a^{-1} dir.

Not :

G bir grup, a $\in$ G olsun.

< a > = { a^{n} : n $\in$ Z} kümesine a tarafından üretilen (doğurulan) grup denir.

(Toplamsal notasyonda < a > = { na : n $\in$ Z})

a elemanına < a > grubunun üretici elemanı denir.

Eğer G = < a > olacak şekilde bir a $\in$ G elemanı varsa G ye devirli grup denir.

Not . Homomorfizma

$(G , \cdot)$ ve $(H , *)$ iki grup olsun.

$f : G \to H$ bir fonksiyon olsun.

Eğer *f* fonksiyonu "grup işlemini koruyorsa" ; yani her $a , b \in G$ için

$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$

ise *f* ye *G* den *H* ye bir grup homomorfizması veya kısaca *homomorfizma* denir.

Not : İzomorfizma

$f : G \to H$ grup homomorfizması birebir ise *f* ye bir *izomorfizma* denir.

Eğer G den H ye örten bir izomorfizma (yani birebir ve örten bir homomorfizma) varsa

G ile *H* gruplarına izomorfiktirler veya eş yapılıdırlar denir ve $G \cong H$ yazılır.

95. Z_{12} nin mertebesi 6 olan kaç tane elemanı vardır?

A) 0   B) 1   C) 2   D) 3

Çözüm 95

I. Yol

(Z_{12} , +) toplamsal grup olduğundan,

$a.n = 0 \Rightarrow n = 6$ verildiğinden, $a.6 = 0 \Rightarrow a = 2$ (mertebesi = 6)

$\Rightarrow a = 10$ (mertebesi = 6)

II. Yol

Z_{12} nin tüm alt gruplarının sayısı 6 dır. (12 nin pozitif bölenleri : 12 , 6 , 4 , 3 , 2 , 1)

Z_{12} devirli olduğundan tüm alt grupları devirlidir.

1 – { 0 } aşikar alt grup

2 – $< 1 > = Z_{12}$ ve 5 , 7 , 11 sayıları 12 ile aralarında asal olduklarından her biri Z_{12} için birer üreteçtir.

3 – $< 2 > = < 10 > = \{0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10\}$

4 – $< 3 > = < 9 > = \{0 , 3 , 6 , 9\}$

5 – $< 4 > = < 8 > = \{0 , 4 , 8\}$

6 – $< 6 > = \{0 , 6\}$

"$< 2 > = < 10 > = \{0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10\}$" $\Rightarrow$ eleman sayısı (mertebesi) = 6

Not :

Bir G grubunun elemanlarının sayısına G nin mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir.

G bir grup, $a \in G$ olsun. $a^n = e$ olacak şekilde bir en küçük pozitif n doğal sayısı varsa bu sayıya a nın derecesi denir ve $|a|$ ile gösterilir.

Böyle bir n sayısı yoksa $|a| = \infty$ yazılır.

Başka bir ifadeyle,

Z_m de, birim eleman e olmak üzere, bir x elemanı için, $x^n = e$ ise n sayısına, x in mertebesi denir.

Not :

G bir grup, $a \in G$ olsun. $< a > = \{ a^n : n \in Z\}$ kümesine a tarafından üretilen (doğurulan) grup denir.

(Toplamsal notasyonda $< a > = \{ na : n \in Z\}$)

a elemanına $< a >$ grubunun üretici elemanı denir.

Eğer $G = < a >$ olacak şekilde bir $a \in G$ elemanı varsa G ye devirli grup denir.

96. $Z \times Z_2$ en az kaç eleman tarafından üretilir?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6

Çözüm 96

$Z \times Z_2 = \{(a , b) \mid a \in Z , b \in Z_2\}$

$Z_2 = \{0 , 1\}$ elemanlarından meydana gelir.

$Z \times Z_2 = \{(1 , 0) , (0 , 1)\}$ alt kümesi tarafından üretilir.

97. (8 , 4 , 10) un $Z_{12} \times Z_{60} \times Z_{24}$ içindeki mertebesi kaçtır?

A) 12 B) 40 C) 60 D) 320

Çözüm 97

I. Yol

Z_{12} de 8 in mertebesi = 3

(a.n = 0 $\Rightarrow$ a = 8 verildiğinden, 8.n = 0 $\Rightarrow$ n = 3)

Z_{60} da 4 ün mertebesi = 15

(a.n = 0 $\Rightarrow$ a = 4 verildiğinden, 4.n = 0 $\Rightarrow$ n = 15)

Z_{24} de 10 un mertebesi = 12

(a.n = 0 $\Rightarrow$ a = 10 verildiğinden, 10.n = 0 $\Rightarrow$ n = 12)

(8 , 4 , 10) elemanının mertebesi, elemanlarının mertebelerinin okek'i olduğuna göre,

Okek (3 ,15 ,12) = 60

II. Yol

n.(8 , 4 , 10) = (0 , 0 , 0)

$$\left.\begin{array}{l} 8n \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow n_1 = 3 \\ 4n \equiv 0 \pmod{60} \Rightarrow n_2 = 15 \\ 10n \equiv 0 \pmod{24} \Rightarrow n_3 = 12 \end{array}\right\} \text{Okek } (3\ ,15\ ,12) = 60$$

98. $P(x) = -2x^3 + 3ax^2 + (1-b)x + 6$ polinomu $Q(x) = x^2 - x - 1$ polinomuna bölünüyor ve kalan $2x + 3$ polinomu oluyor.
Buna göre, a + b reel sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{29}{3}$ B) $\frac{17}{3}$ C) $-\frac{19}{3}$ D) $-\frac{29}{3}$

Çözüm 98

$P(x) = -2x^3 + 3ax^2 + (1-b)x + 6$

$Q(x) = x^2 - x - 1$

Kalan = $2x + 3$

$P(x) = H(x).Q(x) +$ kalan

$Q(x) = 0$ ise

$P(x) =$ kalan

$Q(x) = x^2 - x - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 = x + 1$

$\Rightarrow \quad x.x^2 = x.(x + 1)$

$\Rightarrow \quad x^3 = x^2 + x$

$\Rightarrow \quad x^3 = (x + 1) + x$

$\Rightarrow \quad x^3 = 2x + 1$

$P(x)$ polinomunda x^3 yerine $2x + 1$ yazılırsa,

$P(x) = -2x^3 + 3ax^2 + (1-b)x + 6$

$-2.(2x + 1) + 3a.(x + 1) + (1-b)x + 6 =$ Kalan $= 2x + 3$ olacağına göre,

$2x + 3 = -4x - 2 + 3ax + 3a + x - bx + 6$

$2x + 3 = x.(3a - 3 - b) + 4 + 3a$

$3 = 4 + 3a$

$a = \frac{-1}{3}$

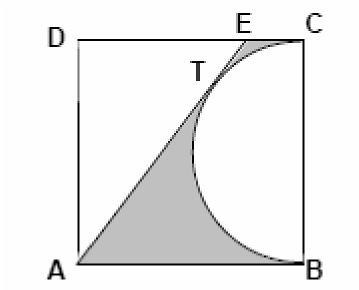
$3a - 3 - b = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 3.(\frac{-1}{3}) - 3 - b \quad \Rightarrow \quad b = -6$

Buna göre, $a + b = \frac{-1}{3} + (-6) = \frac{-1}{3} - 6 = \frac{-19}{3}$ elde edilir.

Not : Bir polinomun $(x^n + a)$ ile bölümündeki kalanın bulunması

P(x) polinomunda x^n yerine $(-a)$ yazılarak, bu polinomun $(x^n + a)$ ile bölümündeki kalan bulunur.

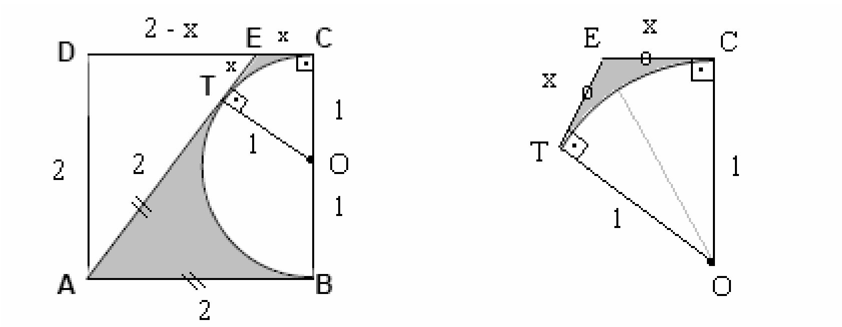
99.



Şekildeki ABCD dörtgeni bir kare ve [AE] , [BC] çaplı çember yayına T noktasında teğettir.
Karenin bir kenarının uzunluğu 2 cm olduğuna göre,
taralı bölgelerin alanları toplamı kaç cm² dir? ($\pi = 3$ alınız.)

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2

Çözüm 99



[AE] , [BC] çaplı çember yayına T noktasında teğet olduğuna göre, $OT \perp AE$

$|OC| = |OT| = 1$

A noktasından çembere çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan,

$|AT| = |AB| = 2$

ADE dik üçgeninde pisagor teoremine göre,

$(2 + x)^2 = 2^2 + (2 - x)^2$

$4 + 4x + x^2 = 4 + 4 - 4x + x^2$

$8x = 4$

$x = \frac{1}{2}$

Taralı bölgelerin alanı = (alan ABCD) – [(Yarım dairenin alanı) + (alan ADE)]

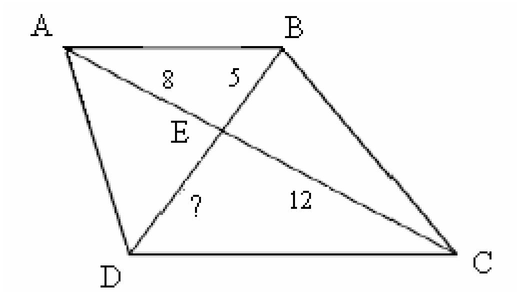
Taralı bölgelerin alanı = $2.2 - [\pi.1^2.\dfrac{180}{360} + \dfrac{2.(2-\frac{1}{2})}{2}]$

$= 4 - \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}$

$= 4 - 3$

$= 1$

100.



Şekilde, $|AE| = 8$ br, $|CE| = 12$ br ve $|BE| = 5$ br dir.
$|DE|$ aşağıdakilerden hangisine eşit olduğunda $A\overset{\Delta}{B}E$, $C\overset{\Delta}{D}E$ ne benzer olur?

A) 3,3 br B) 7,5 br C) 8 br D) 15 br

Çözüm 100

$A\overset{\Delta}{B}E \cong C\overset{\Delta}{D}E$ olması için, AB // DC olmalıdır.

$$A\overset{\Delta}{B}E \cong C\overset{\Delta}{D}E \quad \Rightarrow \quad \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|BE|}{|DE|} = \frac{|AE|}{|CE|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{|DE|} = \frac{8}{12} \quad \Rightarrow \quad |DE| = \frac{15}{2} = 7,5$$

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA