ESKİŞEHİR FATİH FEN LİSESİ

GEOMETRİ

OLİMPİYAT

NOTLARI

<u>Çemberler–1</u>

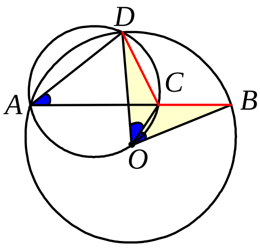
<u>Derleyen</u>

Osman EKİZ
EFFL
Matematik Öğretmeni

Yazım hataları mevcut olup. Tashihi yapılmamıştır.

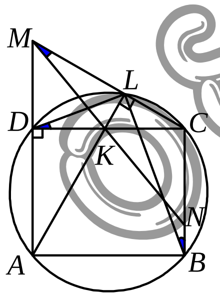
ÇEMBER GİRİŞ

Problem. *O* merkezli çemberin *AB* kirişi üzerinde bir *C* noktası verilsin. *AOC* çemberi *O* merkezli çemberi *D*'de kestiğine göre *DC* = *BC* olduğunu gösteriniz.



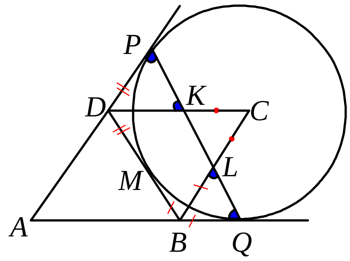
Çözüm: 2.*m*(*DAB*) = *m*(*DOB*) ve *m*(*DAC*) = *m*(*DOC*) olduğundan *m*(*BOC*) = *m*(*DOC*) olur. *DO* = *BO* olduğu için *DOC* ve *BOC* üçgenleri eş olup *DC* = *BC*'dir.

Problem 4. *ABCD* karesinin çevrel çemberinin kısa olan *CD* yayı üzeride bir *L* noktası alınsın. *AL* ile *CD*, *K*'da, *AD* ile *CL*, *M*'de, *MK* ile *BC*, *N*'de kesişsin. *B*, *N*, *L*, *M* noktalarının çembersel olduğunu gösteriniz.



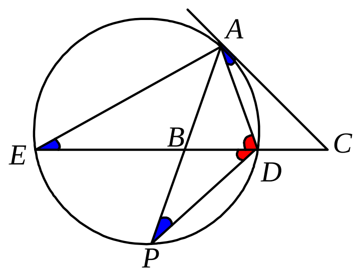
Çözüm: *AL* ⊥ *MC* ve *AM* ⊥ *CD* olup *M*, *D*, *K*, *L* noktaları çemberseldir. Bu durumda *m*(*KML*) = *m*(*KDL*) = *m*(*LBN*) olduğundan *B*, *N*, *L*, *M* noktaları çemberseldir.

Problem 5. *ABCD* paralelkenar olup *ABD* üçgeninin *BD*'ye teğet olan dış teğet çemberi *AD* ve *AB*'ye *P* ve *Q*'da teğettir. *PQ*, *CD* ve *CB*'yi sırasıyla *K* ve *L*'de kestiğine göre *K* ve *L* noktalarının *CDB* üçgeninin iç teğet çemberi üzerinde olduğunu gösteriniz.



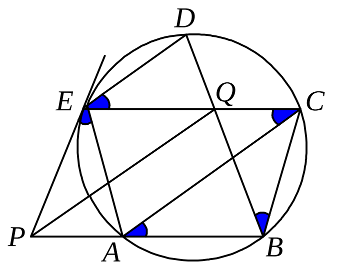
Çözüm: Dış teğet çember *BD*'ye *M*'de teğet olsun. *m*(*APQ*) = *m*(*AQP*), *m*(*APQ*) = *m*(*BLQ*), *m*(*AQP*) = *m*(*BQL*) = *m*(*DKP*) olduğundan *MD* = *PD* = *DK*, *MB* = *QB* = *LB* ve *CK* = *CL* eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda *K*, *L*, *M* noktaları *CDB* üçgeninin iç teğet çemberinin üçgenin kenarlarına teğet olduğu noktalardır.

Problem 8. ABC üçgeninde *m*(*B*) > m(*C*)'dir. *BC* kenarı üzerinde 2.*m*(*DAC*) = *m*(*B*) – *m*(*C*) olacak şekilde bir *D* noktası alınsın. *D*'den geçen *AC*'ye *A*'da teğet olan çember *AB*'yi *P*'de kestiğine göre *BP* : *AC*=*BD* : *DC* olduğunu gösteriniz.



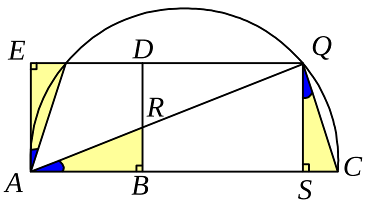
Çözüm: *BC*, çemberi *E*'de kessin. (*DAC*) = *m*(*DPA*) = *m*(*DEA*) =[*m*(*B*) – *m*(*C*)] : 2 ve *m*(*PDB*) = *m*(*ADE*) =[*m*(*B*) + *m*(*C*)] : 2 olur. Bu durumda Δ*ACD* ~ Δ*ECA* olup $\frac{DC}{AC} = \frac{AD}{AE}$ dir. Ayrıca Δ*ADE* ~ Δ*BDP* olup $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{BP}$ olur. Son iki eşitlikten $\frac{DC}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{BP}$ olup *BP* : *AC*=*BD* : *DC*'dir.

Problem. Bir çember üzerinde verilen sırada *A*, *B*, *C*, *D*, *E* noktaları alınsın. *AB* // *EC* ve *AC* // *ED* olsun. Çemberin *E*'deki teğeti ile *AB*'nin kesim noktası *P* ve *BD* ve *EC*, *Q* noktasında kesişsin. *AC* = *PQ* olduğunu gösteriniz.



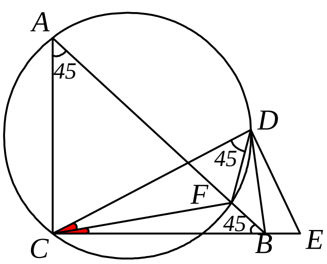
Çözüm: AB // EC ve ED // AC olduğundan $m(DEC)$ = $m(ACE)$ = $m(BAC)$ = $m(CBQ)$ yazabiliriz. EC // AB olduğundan $ABCE$ ikizkenar yamuk olup $AE = BC$ ve $m(BCQ)$ = $m(PAE)$, $m(BAC)$ = $m(ABE)$ = $m(PEA)$'dır. Bu durumda $\Delta QCB \sim \Delta PAE$ yani $QC = PA$'dır. QC // PA olduğu için $PACQ$ paralelkenar olup $PQ = AC$'dir.

Problem. AC çaplı yarım çemberin AC çapı üzerinde merkezden farklı bir B noktası alınsın. $ABDE$ karesi çizilsin. ED çemberi sırasıyla P ve Q'da, AQ ise BD'yi R'de kessin. P noktası E ile D arasındadır. Bu durumda $DP = DR$ olduğunu gösteriniz.



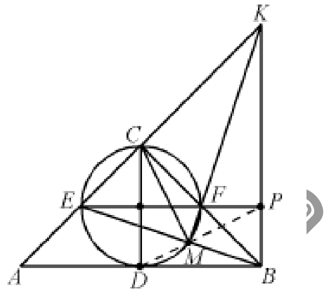
Çözüm: Çemberin merkezine O dersek ED'nin çemberi kesmesi için B noktası A ile O arasında olmalıdır. Q'dan AC'ye inilen dikme ayağı S olsun. $QS = EA$ ve $QC = AP$ olduğundan $EP = SC$'dir. $m(RAB) = m(SQC)$ ve $QS = AB$ olduğundan QSC ve ABR üçgenleri eş olup $SC = RB$'dir. $EP = RB$ olduğundan $DP = DR$ olur.

Problem. Bir d doğrusu üzerinde sırasıyla C, B, E noktaları verilsin. d doğrusunun aynı tarafında olmak üzere A ve D noktaları alalım. $m(ACE) = m(CDE) = 90^0$ ve $CA = CB = CD$ olmak üzere AB, ADC çemberini F'de kessin. F noktasının CDE üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi olduğunu gösteriniz.



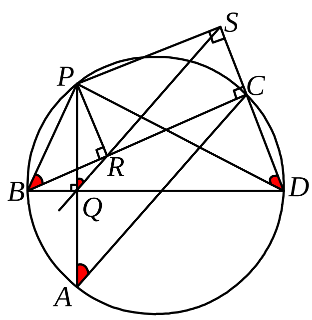
Çözüm: $45^0 = m(BAC) = m(FAC) = m(CDF)$ olup $m(FDE)$ = 45^0 olur. $CD = CB$ ve $m(CDF) = m(CBF) = 45^0$ olduğundan CF, DCB açısını ortalar. CDE üçgeninde DF ve CF açıortay olduğundan F noktası iç teğet çemberin merkezidir.

Problem. ABC dik üçgeninde CD yükseklik olup $m(ACB) = 90^0$'dir. CD çaplı çember AC ve BC'yi sırasıyla E ve F'de kessin. BE çemberi M'de kessin. $MF \cap AC = K$ ve $EF \cap BK = P$ olmak üzere D, M, P noktaları doğrusal ise $m(ABC)$ = ?



Çözüm: $m(EMF) = 90^0$ dır. Bu durumda EBK üçgeninde KM ve BC yükseklik olup $EP \perp BK$'dır. Dolayısı ile B, M, F, P noktaları çembersel olup = $m(ECD) = m(EMD) = m(PMB)$ = $m(PFB) = m(EFC)$ olur. Bu durumda $CD \perp EF$ olacaktır. CD ve EF çap olduğundan ECF ikizkenar dik üçgen olur. EF // AB olduğundan ACB üçgeni de ikizkenar dik üçgendir. Bu durumda $m(BAC) = m(ABC) = 45^o$'dır.

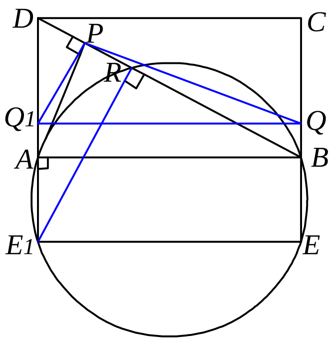
Problem. Bir çember üzerinde verilen sırada A, B, C, D noktaları alınsın. BD çemberin çapı olmak üzere A'nın BD'ye göre simetriği P ve BD ile AP'nin kesim noktası Q olsun. Q'dan geçen AC'ye paralel doğru BC ve DC'yi sırasıyla R ve S'de kestiğine göre $PRCS$'nin dikdörtgen olduğunu gösteriniz.



Çözüm: BD çap olduğundan P noktası çemberin üzerindedir. $m(PBC) = m(PAC) = m(PQS)$ olduğundan B, Q, P, R çembersel olup $m(BRP) = m(PQB) = 90^o$ olur. $m(PQS)$ = $m(PAC) = m(PDC) = m(PDS)$ olduğundan P, D, Q, S noktaları çemberseldir. Bu durumda $m(PQD) = 90^o = m(PSD)$

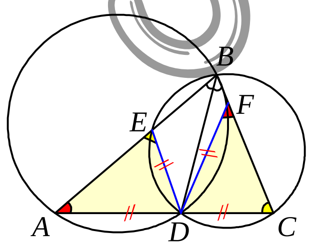
olur. *BD* çap olduğundan $m(BCD) = m(BCS) = 90^o$ olur. Dolayısı ile *PRCS* dikdörtgendir.

Problem. *ABCD* dikdörtgeninin *CB* kenarının uzantısı üzerinde bir *E* noktası alınsın. *ABE* üçgeninin çevrel çemberi ile *BD*, *R*'de kesişsin. *DR* ve *EC*'nin orta noktaları sırasıyla *P* ve *Q* ise $AP \perp PQ$ olduğunu gösteriniz.



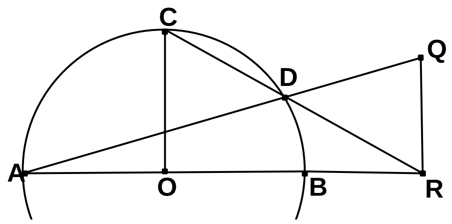
Çözüm: $ABQQ_1$ dikdörtgeninin oluşturalım. *DA*' nın uzantısı çemberi E_1 noktasında kessin. Q_1 noktası DE_1'in orta noktası olur. Bu durumda Q_1P // E_1R olup $E_1R \perp BD$ olduğundan. $Q_1P \perp BD$'dir. Bu durumda $ABQQ_1$ dikdörtgeninin çevrel çemberi P noktasından geçer. Dolayısı ile $m(APQ) = m(AQ_1Q) = 90^o$ olup $AP \perp PQ$ olur.

Problem. *ABC* üçgeninde *BD* açıortayı çizilsin. *ABD* üçgeninin çevrel çemberi *BC*'yi *F*'de *BDC* üçgeninin çevrel çemberi *AB*'yi *E*'de kessin. *AE* = *CF* olduğunu gösteriniz.



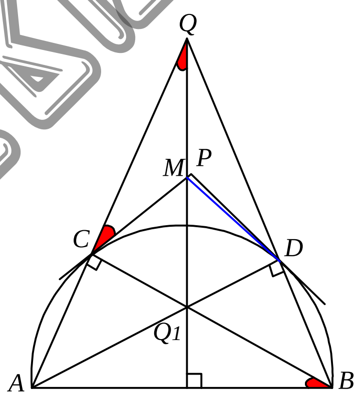
Çözüm: *BDC* çemberinde *BD* açıortay olduğundan *DE* = *DC* ve $m(ABC) = m(ADE)$ 'dir. *ABD* çemberinde *BD* açıortay olduğundan *DA* = *DF* ve $m(ABC) = m(CDF)$ 'dir. Bu durumda $\Delta ADE \cong \Delta FDC$ olup *AE* = *CF* olur.

Problem. *AB* çaplı *O* merkezli çemberin merkezinde *AB* ye dik doğru çemberi *C*'de kessin. Kısa olan *CB* yayı üzerinde bir *D* noktası alınsın. *CD* ile *AB*, *R* de, *AB*'ye *R*'de dik doğru ile *AD*, *Q* da kesişsin. *BR* = *QR* olduğunu gösteriniz.



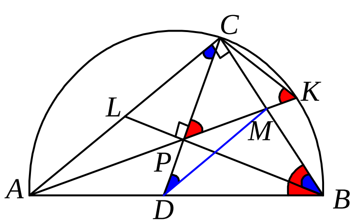
Çözüm: $m(ADB) = 90^0$ ve $m(BRQ) = 90^0$olduğundan *B*, *R*, *Q*, *D* noktaları çembersel olup m(QBR) = m(QDR)'dir. m(QDR) = m(CDA) = m(CBA) = 45^0 olduğundan m(QBR) = 45^0olup *BRQ* dik üçgeni ikizkenardır. Bu durumda *BR* = *QR*'dir.

Problem. *AB* çaplı çembere dışında alınan *P* noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları *C* ve *D*'dir. *AC* ile *BD*'nin kesim noktası ile *P'*den geçen doğrunun *AB*'ye dik olduğunu gösteriniz.



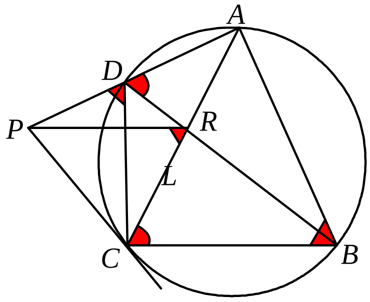
Çözüm: $AC \cap BD = Q$ ve $BC \cap AD = Q_1$ olsun. *AB* çap olduğundan $Q_1A \perp QB$ ve $QC \perp BQ_1$ olur. Bu durumda *A* noktası BQQ_1 üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktası olup $BA \perp QQ_1$ olmalıdır. $QQ_1 \cap PC = M$ olsun. Bu durumda *PC* çembere teğet olduğundan $m(MCQ) = m(ABC) = m(MQC)$ olup *MC* = *MQ* olur. QCQ_1 dik üçgen olduğundan $MC = MQ = MQ_1$'dir. Dolayısı ile *PC*, $[QQ_1]$'i ortalar. Benzer şekilde *PD*'nin de $[QQ_1]$'i ortaladığı gösterilebilir. Bu durumda *P* = *M* olur. $BA \perp QQ_1$ ve *P* noktası QQ_1 üzerinde olduğundan $PQ \perp BA$'dır.

Problem. AB çaplı yarım çember üzerinde bir C noktası ve [AB] üzerinde D noktası alınsın. [CD] üzerinde alınan bir P noktası için $AC \cap BP = L$ ve AP çemberi K'da kessin. AL = CL ve $m(CPB) = 90^o$ ise CP = CL olduğunu gösteriniz.



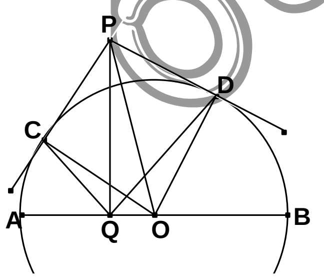
Çözüm: AK ∩ BC = M olsun. AL = CL olduğundan AC // DM dir. (Bkz. Pp-x). Ayrıca CD ⊥ BL ve m(ACB) = 90^o olduğu da göz önüne alınırsa m(LBC) = m(LCP) = m(PDM) olur. Bu ise P, D, B, M noktalarının çembersel olduğunu gösterir. Buradan m(ACK) = m(ABK) = m(CPK) olup CP = CL olur.

Problem. Bir çember üzerinde verilen sırada A, B, C, D noktaları alınsın. Çemberin C'deki teğeti ile AD'nin kesim noktası P olmak üzere BD ∩ AC = R olsun. AB = AC ise PR // CB olduğunu gösteriniz.



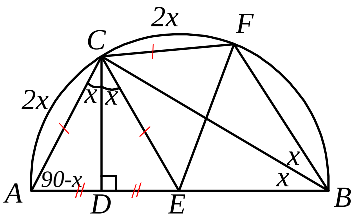
Çözüm: m(*ACB*) = m(*ADB*) ve m(*ABC*) = m(*ACP*) olduğundan m(ADP) = m(*PCR*) olur. Bu ise *PCDR*'nin kiriş dörtgeni olduğunu gösterip m(*PDC*) = m(*PRC*) olacaktır. m(*PDC*) = m(ABC) = m(ACB) olduğundan PR // CB dir.

Problem. *AB* çaplı yarım çembere dışındaki *P* noktasından *PC* ve *PD* teğetleri çizisin. P'den AB'ye inilen dikme ayağı Q ise *m*(*PQC*) = *m*(*PQD*) = 90^o olduğunu gösteriniz.



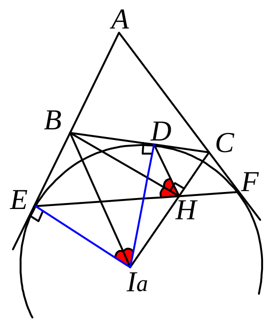
Çözüm: Çemberin merkezi O noktası olsun. *m*(*PDO*) = *m*(*PQO*) = 90^o olduğundan *PQOD* kiriş dörtgeni olup *m*(*PQD*) = *m*(*PQO*)'dur. *m*(*PCO*) = *m*(*PQO*) = 90^o olduğundan *PCQO* kiriş dörtgeni olup *m*(*PQC*) = *m*(*PQC*)'dir. *m*(*POC*) = *m*(*POD*) olduğundan *m*(*PQC*) = *m*(*PQD*) dir.

Problem. *AB* çaplı yarım çember üzerinde bir *C* noktası verilsin. *C*'den *AB*'ye inilen dikme ayağı *D* olsun. [*AB*] üzerinde *AD* = *ED* olacak şekilde bir *E* noktası alınsın. Çember üzerinde seçilen bir *F* noktası için $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CF}$ ise *BE* = *BF* olduğunu gösteriniz.



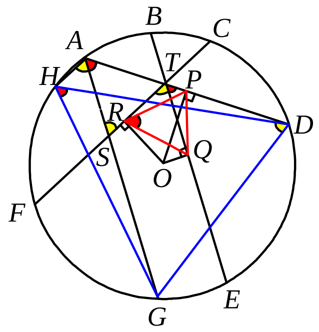
Çözüm: *AC* = *CE* ve *AC* = *CF* olmalıdır. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CF} = 2x$ alırsak $\overset{\frown}{BF} = 180^0 - 4x$ ve *m*(*ACD*) = *m*(*ECD*) = *x* olur. Bu durumda *m*(*ECB*) = *m*(*ECF*) = 90^o olur. *EC* = *FC* olduğu göz önüne alınırsa *BECF* deltoit olup *BF* = *BE*'dir.

Problem. *ABC* üçgeninde *BC*'ye teğet olan dış teğet çemberin merkezi I_a ve bu çember *AB*, *BC*, *CA* kenarlarına sırasıyla *E*, *D*, *F* noktalarında teğettir. *B*'den I_aC'ye inilen dikme ayağı *H* ise *E*, *H*, *F* noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.



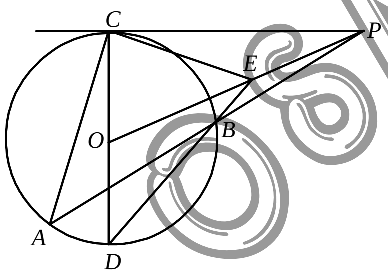
Çözüm: $I_aE \perp AE$ ve $BH \perp I_aH$ olduğundan *E*, *B*, *H*, I_a çemberseldir. $I_aD \perp BC$ ve $BE \perp I_aE$ olduğundan *D*, *B*, *E*, I_a çemberseldir. Ayrıca *BE* = *BD*'dir. Bu durumda *m*(*BHD*) = $m(BI_aD) = m(EI_aB)$ = *m*(*BHE*) 'dir. *DHC* ve *FHC* üçgenleri eş olduğundan *m*(*DHC*) = *m*(*FHC*)'dir. *m*(*BHD*) + = *m*(*DHC*) = 90^o olup *m*(*EHF*) = 2.*m*(*BHD*) + 2. *m*(*DHC*) = 180^0 olduğundan *E*, *H*, *F* doğrusaldır.

Problem. O merkezli bir çember üzerinde verilen sırada alınan A, B, C, D, E, F noktaları için AD, BE ve CF kirişleri T noktasında kesişsin. AD, BE ve CF'nin orta noktaları sırasıyla P, Q, R olsun. Çember üzerinde alınan G ve H noktaları için AH // FC ve AG // BE ise Δ*PQR* ~ Δ*DGH* olduğunu gösteriniz.



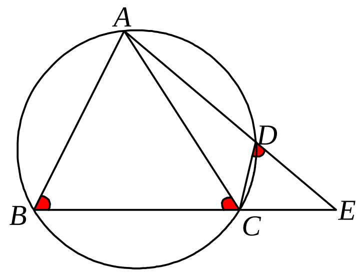
Çözüm: $AG \cap CF = S$ olsun. P, Q, R kirişlerin orta noktaları olduğundan OP ⊥ AD, OQ ⊥ BE ve OR ⊥ CF olduğundan O, Q, P, T, R noktaları çemberseldir. Bu durumda $m(GHD) = m(GAD) = m(ETD) = m(GHD) = m(QTP) = m(QRP)$'dir. Benzer şekilde $m(HDG) = m(HAG) = m(AST) = m(STQ) = m(RPQ)$ olur. Bu durumda $\Delta PQR \sim \Delta DGH$ olur.

Problem. O merkezli çemberin dışında alınan bir P noktasından geçen doğru çemberi sırasıyla B ve A'da kessin. Çember üzerinde alınan bir C ve D noktaları için PC çembere teğet ve CD çap olsun. *CD* ile AB çemberin içinde kesişmek üzere *BD* ile O*P*'nin kesim noktası E ise AC ⊥ EC olduğunu gösteriniz.



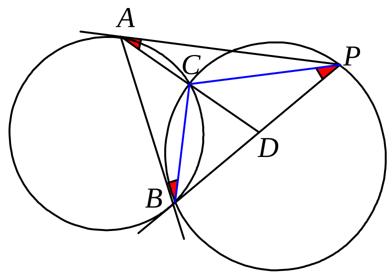
ÇEMBER ve BENZER ÜÇGENLER

Problem. Bir çember üzerinde alınan *A*, *B*, *C* noktaları için $AB = AC$'dir. Kısa olan *AC* yayı üzerinde alınan bir D noktası için AD ile BC'nin kesim noktası *E* olduğuna göre $AC^2 = AD.AE$ olduğunu gösteriniz.



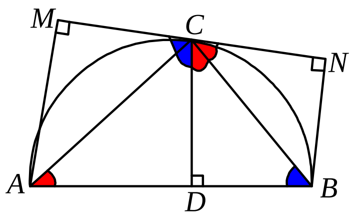
Çözüm: $m(ACB) = m(ABC) = m(CDE)$ olur. Bu durumda $m(ADC) = m(ACE)$ olur. Bu ise $\Delta CAD \sim \Delta EAC$ olduğunu gösterir. Dolayısı ile $AC^2 = AD.AE$'dir.

Problem 4. C_1 çemberine dışındaki bir *P* noktasından çembere çizilen teğetlerin değme noktaları *A* ve *B*'dir. *P*'den geçen *AB*'ye B'de teğet olan çember ile C_1 çemberinin kesim noktası C olsun. *AC*'nin *PB*'yi ortaladığını gösteriniz.



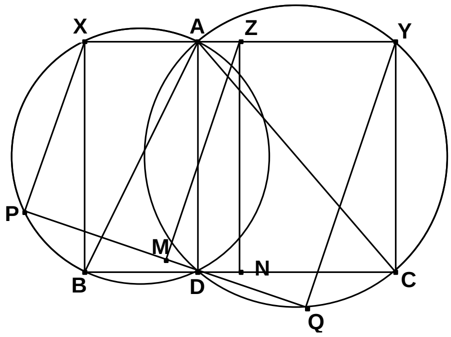
Çözüm: *AC* ile *PB*'nin kesim noktası *D* olsun. $m(CPB) = m(ABC) = m(CAP)$ olduğundan $\Delta PDC \sim \Delta ADP$ olup $PD^2 = DC.DA$ olur. $m(BAD) = m(DBC)$ olduğundan $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ olup $BD^2 = DC.DA$ olur. Bu durumda $PD = BD$'dir.

Problem. *AB* çaplı bir çembere üzerinde alınan bir *C* noktasında teğet olan bir *d* doğrusu verilsin. *A* ve *B*'den *d*'ye inilen dikme ayakları sırasıyla *M* ve *N* olup *C*'nin *AB* üzerindeki dik izdüşümü *D* ise $AM.BN = CD^2$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm: $m(CPB) = m(CBD) = m(ACD)$ olduğundan $AM = AD$'dir. $m(DCB) = m(CAD) = m(BCN)$ olduğundan $BN = BD$'dir. Bu durumda $AM.BN = AD.BD = CD^2$ olur.

Problem 6. *ABC* üçgeninde *AD* yükseklik olup *ABD* ve *ACD* çemberleri üzerinde sırasıyla alınan *P* ve *Q* noktaları için *P*, *D*, *Q* doğrusal olsun. *PQ* ve *BC*'nin orta noktaları sırasıyla *M* ve *N* ise m(AMN) = 90^0 olduğunu gösteriniz.



Çözüm: *ADBX* ve *ADCY* dikdörtgenlerini inşa edelim. *XY*'nin orta noktası *Z* olsun. Bu durumda $XP \perp PQ$ ve $YQ \perp QP$ olup $XP \parallel YQ$ olur. *XY* ve *PQ*'nun orta noktaları *Z* ve *M* olduğundan $XP \parallel YQ \parallel ZM$ ve $ZM \perp PQ$ olur. Bu durumda *AZND* dikdörtgenin çevrel çemberi *M* noktasından geçer. Bu durumda m(AMN) = m(ADN) = 90^0'dır.

Problem. *ABCDEF* kirişler altıgeninde *AB* = *CD* = *EF* olup *AD*, *BE*, *CF* noktadaştır. *AD* ile *CE*'nin kesim noktası *P* ise

$$\frac{CP}{PE} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: *AD*, *BE*, *CF*'nin ortak noktası *Q* olsun. $\Delta ACP \sim \Delta EDP$ olduğundan $\frac{AC}{CP} = \frac{ED}{DP}$'dir. $CD = EF$ olduğundan $DE \parallel CF$ olup $\frac{PQ}{PD} = \frac{PC}{PE}$ ve $\frac{QD}{PD} = \frac{CE}{PE}$ dir. $AC = BD$ olup $m(AEC) = m(QED)$ olduğundan $\Delta ACE \sim \Delta QDE$ olup $\frac{AC}{CE} = \frac{QD}{DE}$ dir. Bu durumda

$$\frac{CP}{PE} = \frac{CP}{CE}.\frac{CE}{PE} = \frac{CP}{CE}.\frac{QD}{PD} = \frac{CP}{PD}.\frac{QD}{CE}$$

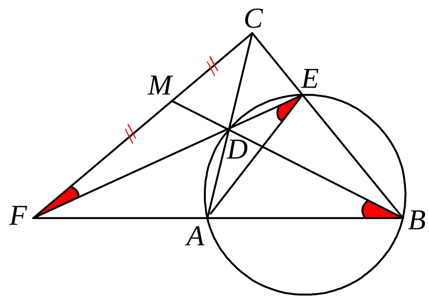
$$= \frac{AC}{ED}.\frac{QD}{CE} = \frac{AC}{CE}.\frac{QD}{ED} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2$$ olur.

Problem 8. Eş merkezli iki çemberin ortak merkezleri *O*'dur. Dıştaki çember üzerinde alınan bir A noktasından iç teki çembere AD ve AE teğetleri çizilsin. *AD* ve *ED* dıştaki çemberi sırasıyla *C* ve *B*'de kestiğine göre $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{BE}{BD}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: *BD* ile *AE* dıştaki çemberi sırasıyla K ve L'de kessin. Bu durumda AE = *AD* = *CD*, *BE* = *DK*, *DE* // *CL* ve m(ABC) = 180^0 – m(ALC) = 180^0 – m(AEB) = m(AEK) = m(ADB)'dir. Bu durumda ΔABC) ~ ΔADB olup $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD}$'dir. $AD^2 = AD.CD = BD.DK = BD.BE$ olduğundan

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AD}{BD}\right)^2 = \frac{BE.BD}{BD^2} = \frac{BE}{BD}$$ olur.

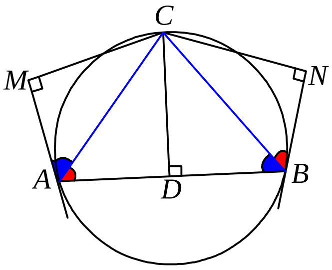
Problem. *ABC* üçgeninin *A* ve *B* köşelerinden geçen bir çember *AC* ve *BC* kenarlarını sırasıyla *D* ve *E*'de kessin. [*BA* ile [*ED*, *F*'de, [*BD* ile [*CF*, *M*'de kesişsin. *MF* = *MC* olması için gerek ve yeter şartın $MB.MD = MC^2$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm: *MC* = *MF* ise *BFC* üçgeninde *D* noktasına nazaran seva bağıntısından $\frac{BA}{AF} = \frac{BE}{EC}$ eşitliği elde edilir. Bu ise *EA* // *CF* olduğunu gösterir. Dolayısı ile $m(DBA) = m(DEA) = m(DFM)$ olur. Bu eşitlik *MFD* ve *MBF* üçgenlerinin benzer olduğunu gösterir. Bu durumda $\frac{MD}{MF}=\frac{MF}{MB}$ olup $MB.MD = MF^2 = MC^2$ olur.

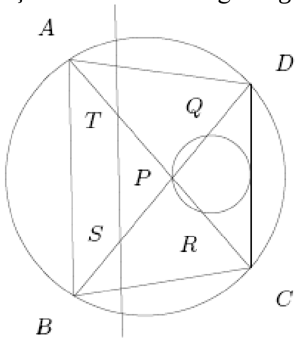
Eğer $MB.MD = MC^2$ ise *MCD* ve *MBC* üçgenleri benzer olup *m*(*MBC*) = *m*(*MCD*)'dir. Ayrıca *m*(*MBC*) = *m*(*DAE*) olduğundan *CF* // *EA*'dır. Bu durumda *m*(*DBA*) = *m*(*DEA*) = *m*(*DFM*) olur. Bu ise *MFD* ve *MBF* üçgenlerinin benzer olduğunu gösterir. Dolayısı ile $MB.MD = MC^2$ olup *MF* = *MC* dir.

Problem. Bir çember üzerinde *A, B, C* noktaları verilsin. *C* noktasının çemberin *A* ve *B*'deki teğetleri üzerindeki diz izdüşümleri sırasıyla M ve N olsun. C'nin AB üzerindeki dik izdüşümü *D* ise $CM.CN = CD^2$ olduğunu gösteriniz.



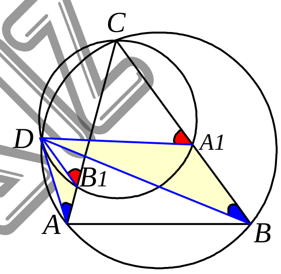
Çözüm: *m*(*CBA*) = *m*(*CAM*) olduğundan Δ*CBD* ~ Δ*CAM* olup $\frac{CM}{CD}=\frac{CA}{CB}$ olur. Ayrıca *m*(*CAB*) = *m*(*CBN*) olduğundan Δ*CAD* ~ Δ*CBN* olup $\frac{CA}{CB}=\frac{CD}{CN}$ olur. $\frac{CD}{CN}=\frac{CM}{CD}$ olduğundan $CM.CN = CD^2$'dir.

Problem. Bir çember üzerinde verilen sırada *A, B, C, D* noktaları verilsin. $AC \cap BD = P$ olmak üzere *P*'den geçen *CD*'ye orta noktasında teğet olan çember *BD* ve *AC*'yi sırasıyla *Q* ve *R*'de kessin. [*BD*] üzerinde *BS* = *DQ* olacak şekilde bir *S* noktası verilsin. *S*'den geçen *AB*'ye paralel doğru ile *AC*, *T*'de kesişsin. *AT* = *RC* olduğunu gösteriniz.



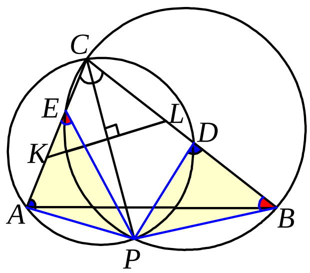
Çözüm: *PQR* çemberi *DC*'ye orta noktasında teğet olduğundan *CR.CP* = *DQ.DP*'dir. Bu durumda $RC = \frac{DP.DQ}{PC}$ olur. Ayrıca *APB* ve *DPC* üçgenleri benzer olduğundan $\frac{AP}{BP}=\frac{DP}{CP}$'dir. *TS* // *AB* ve olduğundan $\frac{AP}{BP}=\frac{AT}{BS}=\frac{AT}{DQ}$ olur. Buradan $AT=\frac{AP.DQ}{BP}$ olup $\frac{AP}{BP}=\frac{DP}{CP}$ olduğundan *AT* = *RC*'dir.

Problem 12. *ABC* bir üçgen olmak üzere *C*'den geçen bir çember *AC* ve *BC* kenarlarını sırasıyla B_1 ve A_1 noktalarında kessin. Bu çember ile *ABC* üçgeninin çevrel çemberi *C*'den farklı olarak *D* noktasında kesiştiğine göre $DB_1.DB = DA_1.DA$ olduğunu gösteriniz.



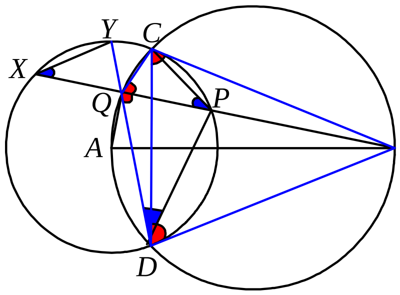
Çözüm: $m(DA_1C) = m(DB_1C)$ ve *m*(*DAC*) = *m*(*DBC*) olduğundan $\Delta DAB_1 \sim \Delta DBA_1$ olup $DB_1.DB = DA_1.DA$'dir.

Problem. *ABC* üçgeninin *BC* ve *AC* kenarları üzerinde sırasıyla alınan *D* ve *E* noktaları için *BD* = *AE* olsun. *ACD* ve *BEC* üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezlerini birleştiren doğru *AC* ve *BC*'yi sırasıyla *K* ve *L*'de kestiğine göre *KC* = *LC* olduğunu gösteriniz.



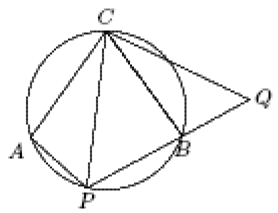
Çözüm: *ACD* ve *BEC* çemberleri *C* ve *P*'de kesişsin. *m*(*EAP*) = *m*(*CAP*) = *m*(*PDB*) olup benzer şekilde *m*(*PBD*) = *m*(*PEA*) olur. *AE* = *BD* olduğu göz önüne alınırsa *AEP* ve *DBP* üçgenleri eş olur. Yani *AP* = *DP*'dir. Bu ise *CP*'nin *ACB* açısının açıortayı olduğunu gösterir. Ayrıca merkezleri birleştiren doğru ortak kiriş olan CP dik olacağından $KL \perp CP$ dir. Bu durumda *KCD* ikizkenar üçgen olup *CK* = *CL* olur.

Problem. AB çaplı C_1 çemberi verilsin. A merkezli C_2 çemberi, C_1 çemberini C ve D'de kessin. B'den geçen bir doğru C_2 ve C_1 çemberlerini sırasıyla P ve Q'da kessin. $CQ.DQ = PQ^2$ olduğunu gösteriniz.



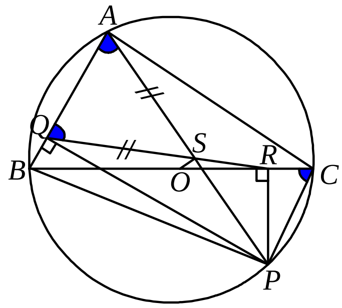
Çözüm: BP ve DQ, C_2 çemberini sırasıyla X ve Y'de kessin. $AB \perp CD$ olup $BC = BD$ olur. Dolayısı ile $m(CQB) = m(BDC) = m(BCD) = m(BQD)$'dir. AB çap olduğundan $m(AQB) = 90^o$ olup A noktası C_2 çemberinin merkezi olduğundan $PX \perp AQ$ ve buradan $QX = QP$ olur. Ayrıca $m(CQB) = m(BQD)$ eşitliği AQ'nun CQY açısını ortaladığını gösterir. Bu durumda XY ve PC, AQ'ya göre simetriktir. Dolayısı ile $m(YXP) = m(CPX)$ olur. Bu durumda $m(YXP) = m(YDP)$ olur. Dolayısı ile $\triangle QCP \sim \triangle QPD$ olup $CQ : PQ = PQ : DQ$ olur. Buradan $CQ.DQ = PQ^2$'dir.

Problem. ABC üçgeninde $CA = CB$ olup çevrel çemberinin C'yi kapsamayan AB yayı üzerinde bir P noktası verilsin. C'den PB'ye inilen dikme ayağı D ise $PA + PB = 2.PD$ olduğunu gösteriniz.



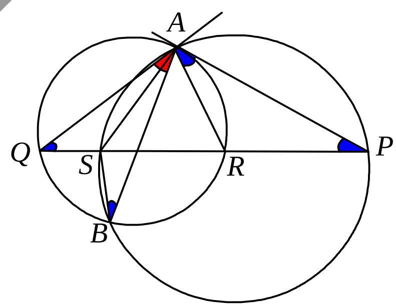
Çözüm: PB'nin uzantısı üzerinde $PA = BQ$ olacak şekilde bir Q noktası alalım. m(CAP) = m(CBQ), $CB = CA$ ve $QB = PA$ olduğundan CAP ve CBQ üçgenleri eştir. Dolayısı ile $CP = CQ$ olduğundan $PQ = DP + DQ$ ve $PD = DQ$ olduğundan $PQ = 2.PD$ yani $PA + PB = 2.PD$'dir.

Problem. ABC dik üçgeninde $m(A) = 90^0$ olup O merkezli çevrel çemberinin A'yı içermeyen BC yayı üzerinde bir P noktaı verilsin. P'den AB ve BC kenarlarına inilen dikme ayakları sırası ile Q ve R olmak üzere $QR \cap AP = S$ olsun. $OS \perp AP$ olduğunu gösteriniz.



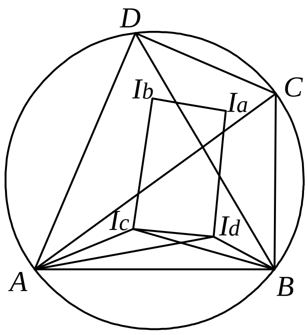
Çözüm: BPC dik üçgeninde $m(BCP) = m(BPR)$'dir. $m(BRP) = m(BQP) = 90^0$ olduğundan BQRP kiriş dörtgeni olup $m(AQR) = m(BPR)$ olur. $m(BCP) = m(BAP)$ olduğundan AS = QS olur. AQP dik üçgen olduğundan AS = PS olmalıdır. O merkez olduğundan $OS \perp AP$'dir.

Problem. C_1 ve C_2 çemberlerinin kesim noktası A ve B dir. C_1 çemberinin A'daki teğeti C_2 çemberini P'de kessin. P'den geçen bir doğru C_1 çemberini sırasıyla R ve Q'da C_2 çemberini S'de kessin. QAB açsının dış açıortayı AP ve iç açıortayı AS ise RS = RP olduğunu gösteriniz.



Çözüm: AS ve AP açıortay olduğundan m(SAP) $=90^0$ olur. AP açıortay olduğundan C_1 çemberinde AQ ve ARB yayları eş olup AQ = AB olmalıdır. AS'nin açıortay olması AQS ve ABS üçgenlerinin eş olduğunu gösterir. Bu durumda m(ABS) = m(AQS) dir. m(ABS) = m(APS) ve m(AQS) = m(RAP) olduğu da göz önüne alınırsa SAP dik üçgeninde RA = RP olup RS = RP olacaktır.

Problem 20. $ABCD$ kirişler dörtgeninde BCD, ACD, ABD ve ABC üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin merkezleri sırasıyla I_A, I_B, I_C ve I_D'dir. $I_AI_BI_CI_D$'nin dikdörtgen olduğunu gösteriniz.



Çözüm: $\angle AI_C B = 90 + \dfrac{\angle ACB}{2}$ ve

$\angle AI_D B = 90 + \dfrac{\angle ADB}{2}$ olup $\angle ADB = \angle ACB$ olduğundan $\angle AI_C B = \angle AI_D B$ olur. Bu durumda A, I_C, I_D, B noktaları çemberseldir. Benzer şekilde B, I_D, I_A, C noktalarının da çembersel olduğu gösterilebilir. Bu durumda

$$\angle AI_D I_C = \angle ABI_C = \frac{\angle ABD}{2}$$ ve

$$\angle CI_D I_A = \angle CBI_A = \frac{\angle CBD}{2}$$ olduğundan

$$\angle AI_D I_C + \angle CI_D I_A = \frac{\angle ABD}{2} + \frac{\angle CBD}{2} = \frac{\angle ABC}{2}$$

olur.

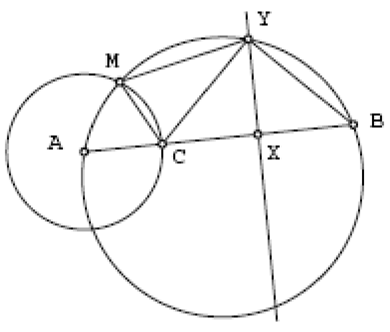
$$\angle AI_D B + \angle CI_D B = 90^0 + \frac{\angle ADB}{2} + 90^0 + \frac{\angle CAB}{2} = 180^0 + \frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle CAB}{2}$$

olur. Dolayısı ile

$\angle AI_D I_C + \angle CI_D I_A + \angle AI_D B + \angle CI_D B = 270^0$ olacağından $\angle I_C I_D I_A = 90^0$ olur. Benzer şekilde $I_A I_B I_C I_D$ dörtgeninin diğer açılarının da 90^0 olduğu gösterilebilir.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

Alıştırma. *AB* çaplı bir çember verilsin. *A* merkezli başka bir çember ilk çemberi *M*'de *AB*'yi *C*'de kessin. *BC*'nin orta dikmesi ilk çemberi *Y*'de kestiğine göre *MY* = *BY* olduğunu gösteriniz.



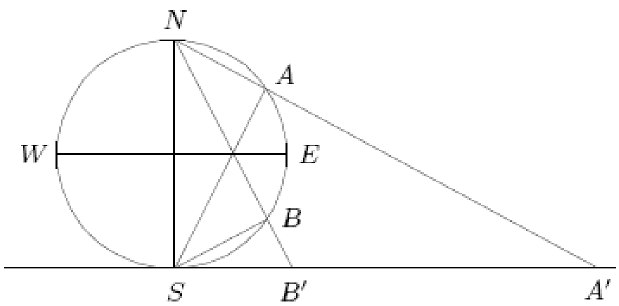
Alıştırma. *ABCD* paralelkenarında AC > BD'dir. *BDC* üçgenin çevrel çemberi *AC*'yi *P*'de kestiğine göre *BD*'nin *ABP* ve *ADP* çemberlerine teğet olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. *AB* çaplı çemberi bir *d* doğru *P* ve *Q* noktalarında kessin. *A* ve *B*'den *d* doğrusuna inilen dikme ayakları A_1 ve B_1 ise $A_1Q = B_1P$ olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. *ABC* dik üçgeninde $AC \perp BC$ ve $AC < BC$ olsun. *AC* çaplı çember *AB*'yi *E*'de kessin. Çemberin *E*'deki teğeti ile *BC*'nin kesim noktası *D* ise *EDB* üçgeninin ikizkenar olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. Bir çember üzerinde verilen sırada *A*, *B*, *C*, *D* noktaları verilsin. $AD \cap BC = P$ ve $AB \cap CD = Q$ olmak üzere *APB* ve *BQC* açılarının açıortaylarının dik kesiştiğini gösteriniz.

Alıştırma. *C* çemberinin *EW* ve *NS* çapları birbirine diktir. Çembere *S* noktasında teğet olan bir *d* doğrusu verilsin. Çember üzerinde *EW* çapına göre simetrik *A* ve *B* noktaları alınsın. *NA* ve *NB*, *d* doğrusu ile sırasıyla *A*' ve *B*' noktalarında kesiştiğine göre $SA'.SB' = SN^2$ olduğunu gösteriniz.



Alıştırma. C_1 ve C_2 çemberleri *E* noktasında teğettirler. C_1 çemberinin üzerindeki bir *A* noktasından çembere çizilen teğet C_2 çemberini sırasıyla *B* ve *C*'de kessin. *AE*, C_2 çemberini *D*'de kestiğine göre $CD^2 = DE.DA$ olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. *ABC* eşkenar üçgeninin çevrel çemberinin kısa olan *BC* yayı üzerinde bir P noktası verilsin. BP $\cap$ AC = K ve *CP* $\cap$ *AB* = L ise $BC^2 = BL.CK$ olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. Bir çembere dışındaki *P* noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları *A* ve *B* olsun. Çember üzerinde bir *C* noktası verilsin. Çemberin *C*'deki teğeti ile *AB*'nin kesim noktası *D* olsun. *P*'den geçen *CD*'ye paralel doğru ile *CB* ve *CA*, M ve *N*'de kesiştiğine göre *PM* = *PN* olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. *ABCD* konveks dörtgeninin köşegenleri birbirine dik ve kesim noktası *P*'dir. *P*'nin dörtgenin kenarlarına göre simetriği olan noktaların çembersel olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. *AB* çaplı *O* merkezli bir yarım çember ve üzerinde *C* ve *D* noktaları verilsin. *AC* ile *BD*, *E*'de ve *AD* ile *BC*, *F*'de kesişsin. m(COD) = 90^0 ise *EF* = *AB* olduğunu gösteriniz

Alıştırma. Bir çember üzerinde verilen sırada *A*, *B*, *C*, *D* noktaları alınsın. *AB*'nin orta noktası *E* olmak üzere m(ADE) = m(BCE) ise *AD* = *BC* olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. ABC dik üçgeninde *CH* yükseklik, *CM* açıortay olup m(C) = 90^0'dır. *AHC* ve *BHC* üçgenlerinde HP ve HQ açıortay ise *C*, *P*, *H*, *M*, *Q* noktalarının çembersel olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. *ABC* üçgeninde diklik merkezi *H* olsun. *BHCD* paralel kenar ise m(BAD) = m(CAH) olduğunu gösteriniz.

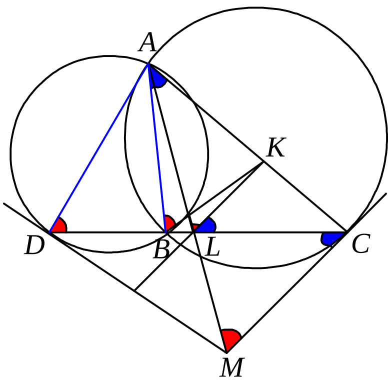
Alıştırma. Dar açılı *ABC* üçgeninin *A*'ya ait yüksekliği çevrel çemberini *D*'de kessin. Çevrel çember üzerinde alınan bir *P* noktasından *AB*'ye *PQ* dikmesi inilsin. *Q* noktası çemberin dışında ve 2.m(QPB) = m(PBC) ise *D*, *P*,*Q* nun doğrusal olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. O merkezli çemberin çaptan farklı bir AB kirişi verilsin. Kısa olan AB yayı üzerinde alınan C noktasında çembere teğet olan doğru d olsun. AB'ye A ve B noktalarında dik olan doğrular d doğrusunu sırasıyla E ve F'de kessin. OC, AB'yi D'de kestiğine göre CE.CF = AD.BD ve CD^2 = AE. BF olduğunu gösteriniz.

Alıştırma. AB çaplı yarım çember üzerinde bir P noktası alınsın. P den geçen bir doğru çembere A ve B noktalarında teğet olan doğruları sırasıyla D ve C'de kessin. DC'ye P'de dik olan doğru AB'yi R'de kessin. AD.BC = RA.RB olduğunu gösteriniz.

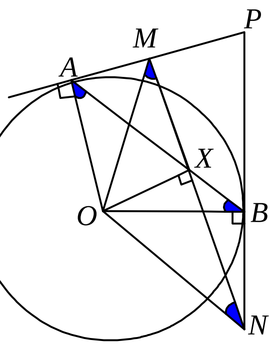
ÇEMBERİN TEĞETLERİ

Problem. C_1 ve C_2 çemberleri A ve B noktalarında kesişsin. B'den geçen bir doğru C_1 ve C_2 çemberlerini sırasıyla C ve D'de kessin. C ve D'de çemberlere teğet olan doğruların kesim noktası M olmak üzere AM ile CD'nin kesim noktasından geçen ve CM'ye paralel doğru AC ile K'da kesişsin. BK'nın C_2 çemberine teğet olduğunu gösteriniz.



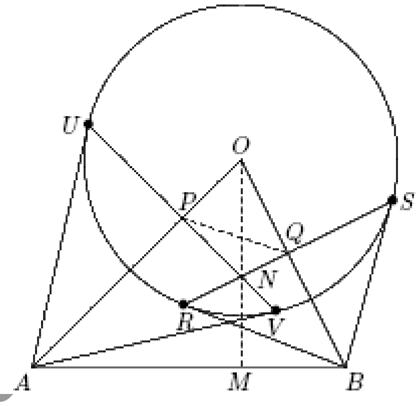
Çözüm: $CD \cap AM$ = L olsun. $m(BAC)= m(BCM)$ ve $m(BAD) = m(BDM)$ ve $m(CMD) = \pi - m(BCM) - m(BDM)$ olduğundan A, C, M, D noktaları çemberseldir. LK // MC olduğundan $m(KLB) = m(KLC) = m(LCM) = m(LAK) = m(LAK)$ olduğundan A, K, B, L noktaları çemberseldir. Bu durumda $m(KBA) = m(KLA) = m(CML) = m(CMA) = m(CDA) = m(BDA)$ olur. $m(KBA) = m(BDA)$ eşitliği BK'nın C_2 çemberine teğet olduğunu gösterir.

Problem. O merkezli çembere dışındaki bir P noktasından PA ve PB teğetleri çizilsin. [AB] üzerinde bir X noktası alınsın. X'den geçen bir doğru PA ve PB'yi sırasıyla M ve N'de kessin. $OX \perp$ MN ise $MX = NX$ olduğunu gösteriniz.



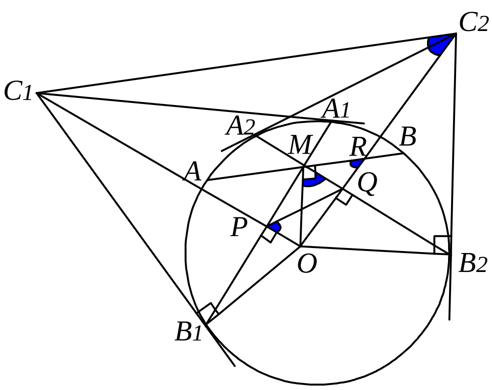
Çözüm: M noktası P ile A arasında olsun. = $m(OXN) = m(OBN) = 90^o$ olduğundan $OXBN$ kiriş dörtgeni olup $m(OAX) = m(OBX) = m(ONX)$'dir. $m(OAM) + m(OXM) = \pi$ olduğundan m(OAX) = $m(OMX)$'dir. Bu durumda $m(OMX) = m(ONX)$ olup $OX \perp MN$ olduğundan $MX = NX$'tir.

Problem. O merkezli C çemberinin UV ve SR kirişlerinin kesim noktası N olsun. AB çemberi kesmeyen bir doğru parçası olmak üzere AV, AU, BR, BS çembere U, V, R, S'de teğet olsun. $ON \perp AB$ olduğunu gösteriniz.



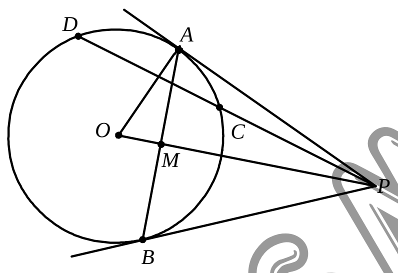
Çözüm: ON $\cap$ AB = M, OA $\cap$ UV = P, OB $\cap$ RS = Q olsun. Bu durumda m(OPN) = 90^0 ve m(OQN) = 90^0olduğundan O, P, N, Q çemberseldir. OUA ve OSB dik üçgenlerinden OP.OA = OU^2 = OS^2 = OQ.OB olduğundan A, P, Q, B çemberseldir. Bu durumda m(AOM) = m(OQP) = m(ONP) olur. Bu ise A, M, N, P noktalarının çembersel olduğunu gösterir. Dolayısı ile m(AMN) = m(OPN) = 90^0'dir.

Problem. Bir çemberin çaptan farklı AB kirişinin orta noktası M olsun. Çemberin M'den geçen A_1B_1 ve A_2B_2 kirişleri verilsin. Çemberin A_1 ve B_1'deki teğetleri C_1'de, A_2 ve B_2'deki teğetleri C_2'de kesiştiğine göre C_1C_2 // AB olduğunu gösteriniz.



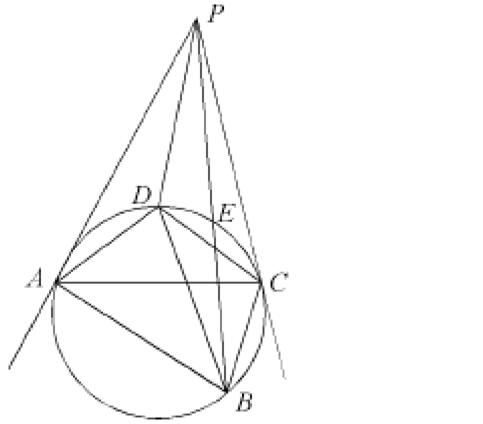
Çözüm: Çemberin merkezi O olmak üzere $OC_1 \cap A_1B_1 = P$, $OC_2 \cap A_2B_2 = Q$ ve $OC_2 \cap AB = R$ olsun. OA_1C_1 dik üçgeninde $OA_1^2 = OP.OC_1$ ve OA_2C_2 dik üçgeninde $OA_2^2 = OQ.OC_2$ olduğundan $OP.OC_1 = OQ.OC_2$ olur. Bu eşitlikten $\triangle OPQ \sim \triangle OC_2C_1$ olup m(OPQ) = $m(OC_2C_1)$'dir. $OPMQ$ dörtgeninde karşılıklı açılar toplamı 180^o olduğundan O, P, M, Q çembersel olup m(OPQ) = $m(OMQ)$ olur. AB'nin orta noktası M olduğundan AB $\perp$ OM olup OR $\perp$ MQ olduğu da göz önüne alınırsa $\angle OC_2C_1 = \angle OPQ = \angle OMQ = \angle ORM$ olup C_1C_2 // AB dir.

Problem. O merkezli çembere dışındaki bir P noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları A *ve* B'dir. P'den geçen bir doğru çemberi sırasıyla C ve D noktalarında kessin. AB ile OP'nin kesim noktası M ise D, O, M, C noktalarının çembersel olduğunu gösteriniz.



Çözüm: $OA \perp PA$ ve $OP \perp AB$'dir. P noktasına göre dış kuvvetten; $PA^2 = PC.PD$'dir. APO ve MPA üçgenleri benzer olduğundan $PA^2 = PM.PO$ olup $PC.PD = PM.PO$ ise $\frac{PC}{PO} = \frac{PM}{PD}$ (1) dir. MCP ve DOP üçgenlerinde MPC ortak açı ve (1)'den PCM ve POD üçgenleri benzer olur. Buradan $m(MCP) = m(DOP)$ olup bu ise D, O, M, C noktalarının çembersel olduğunu gösterir.

Problem. $ABCD$ kirişler dörtgeni olup çevrel çemberin A ve C'deki teğetlerinin kesim noktası P'dir. $PA^2 = PD.PB$ ve P, D, B noktaları doğrusal olmamak üzere BD'nin AC'yi ortaladığını gösteriniz.



Çözüm: PB ile çember E'de kesişsin. $PA^2 = PE.PB$ olduğundan $PD = PE$'dir. Bu durumda $\angle APD = \angle EPC = \angle BPC$ 'dir.Ayrıca AD = CE olacağından $\angle DAP = \angle ECP = \angle EBC$ olup ΔADP ~ ΔBCP olur. Dolayısı ile $\frac{AD}{BC} = \frac{AP}{BP}$ 'dir. Ayrıca m(APB) = m(DPC) ve $\widehat{ADE} = \widehat{CED}$ olup $\angle ABE = \angle ABP = \angle DCP$ olacağından $\triangle APB \sim \triangle DPC$ olup $\frac{AB}{DC} = \frac{BP}{CP}$ 'dir. Bu eşitliklerden $\frac{AD.AB}{BC.DC} = \frac{AP.BP}{BP.CP} = 1$ olur.

$$\frac{A(ABD)}{A(CBD)} = \frac{\frac{1}{2}AB.AD.\sin DAB}{\frac{1}{2}BC.DC.\sin DCB} = \frac{AB.AD}{BC.DC} = 1$$ olduğundan BD, AC'yi ortalar.

Alıştırma. AB çaplı çembere üzerinde alınan E noktasında teğet olan bir d doğrusu verilsin. Çembere A ve B'de teğet olan doğrular d doğrusunu sırasıyla D ve C'de kessin. BD $\cap$ AC = F ise $EF \perp AB$ olduğunu gösteriniz.

BİR NOKTANIN BİR ÇEMBERE NAZARAN KUVVETİ

Düzlemde O merkezli bir çemberi ile bir P noktası verilsin. Çemberin yarıçapı r olmak üzere $OP^2 - r^2$ sayısına P noktasının O merkezli çembere nazaran kuvveti denir.

P noktası çemberin dış bölgesinde ise kuvveti pozitif, iç bölgesinde ise negatif, üzerinde ise sıfırdır.

Teorem. P'den geçen bir doğru çemberi A ve B noktalarında kessin. $PA.PB$ değeri P'den geçen doğrunun seçiminden bağımsızdır.

Kanıt: AB'nin orta noktası T olsun. $OT \perp AB$'dir.

$OP^2-\left(PA+\frac{AB}{2}\right)^2=OT^2=r^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2$ olduğundan

$OP^2 - r^2 = PA.PB$ olur. $OP^2 - r^2$ değeri P noktasının seçimine bağlı olup P'den geçen doğrunun seçiminden bağımsızdır.

Sonuç. P noktasından iki doğru çemberi A ve B ile C ve D'de kessin. PA.PB = PC.PD'dir.

Sonuç. P'den geçen bir doğru çembere T'de teğet başka bir doğru ise A ve B'de kessin. $PT^2 = PA.PB$'dir.

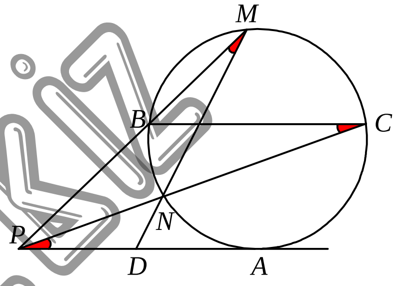
Problem. İki çember A ve B noktalarında kesişsin. Bu çemberlerin ortak dış teğetinin değme noktalrı P ve Q ise AB'nin PQ'yu ortaladığını gösteriniz.

Çözüm: AB, PQ'yu R'de kessin. $PR^2 = RA.RB = QR^2$ olduğundan $PR = QR$'dir.

Problem: ABC eşkenar üçgeninin AB ve AC kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E olsun. [DE, üçgenin çevrel çemberini P'de kestiğine göre $DE^2 = DP.PE$ olduğunu gösteriniz.

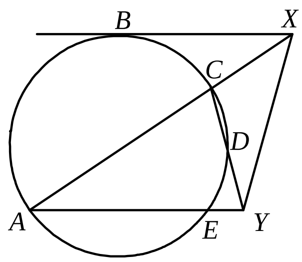
Çözüm: [ED, ABC üçgeninin çevrel çemberini F'de kessin. Bu durumda $PE = FD$, $DE = EA = EC$ ve $PD = EF$'dir. E noktasına göre iç kuvvetten $DE^2 = EA.EC = PE.\ EF = PE.DP$ olur.

Problem. Bir çembere dışındaki bir P noktasından çizilen teğetin değme noktası A olsun. Çember üzerinde alınan B ve C noktaları için BC // PA olmak üzere PB ve PC çemberi sırasıyla M ve N'de kestiğine göre MN'nin PA'yı ortaladığını gösteriniz.



Çözüm: MN ile PA'nın kesim noktası D olsun. $m(DPC) = m(PCB) = m(PMN)$ olduğundan $\Delta PDN \sim \Delta MDP$ olup $PD^2 = DM.DN$ olur. Ayrıca $AD^2 = DM.DN$ olup $AD = PD$'dir.

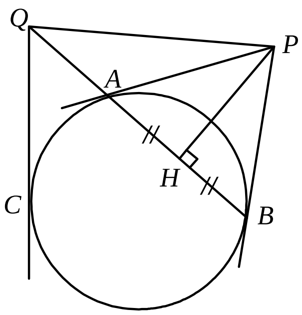
Problem. A, B, C, D, E noktaları bir çember üzerinde saat yönünde dizilsin. CD ve AE'nin kesim noktası Y, çemberin B'deki teğeti ile AC'nin kesim noktası X olsun. $XY = XB$ olması için gerek ve yeter şartın XY // DE olduğunu gösteriniz.



Çözüm: $XY = XB$ olsun. $XY^2 = XB^2 = XC.XA$ olup $XY : XC = XA : XY$ olur. Bu durumda XCY ve XYA üçgenleri benzer olup $m(EDY) = m(XAY) = m(XYC)$ olur. Dolayısı ile DE // XY'dir.

Kalan kısmın çözümüne yukarıdaki işlem basamakları tersten yapılarak ulaşılabilir.

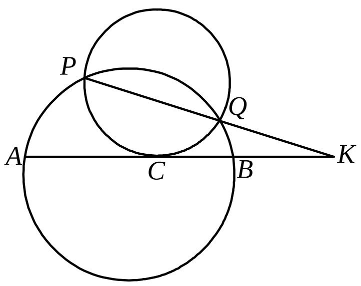
Problem. Bir S çemberine dışındaki bir P noktasından PA ve PB teğetleri çizilsin. S çemberi üzerindeki bir C noktasından çembere çizilen teğet ile BA, Q'da kesişsin. $PQ^2 = PB^2 + QC^2$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm: P'den AB'ye inilen dikme ayağına H dersek $AH = BH$ olur. Q noktasına göre kuvvet alırsak $CQ^2 = QA.QB$'dir. PQH ve PBH dik üçgenlerinde pisagordan

$PQ^2 - (QA + AH)^2 = PB^2 - BH^2$ olup $PQ^2 = PB^2 + QA^2 + QA.2.AH = PB^2 + QA(QA + 2.AH) = PB^2 + QA.QC = PB^2 + PQ^2$'dir.

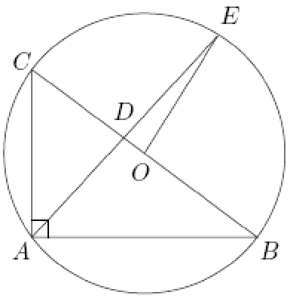
Problem. Bir S_1 çemberinin AB kirişi üzerinde keyfi bir C noktası verilsin. AB'ye C'de teğet olan S_2 çemberi S_1 çemberini P ve Q'da kessin. $PQ \cap AB = K$ ise K noktasının S_2 çemberinin seçiminden bağımsız olduğunu gösteriniz.



Çözüm: $KC^2 = KQ.KP = KB.KA$ olur. Bu durumda $KC^2 = (KB + BC)^2 = KB.(KB + AB)$ olup $KB = \dfrac{BC^2}{AB - 2BC}$ olur.

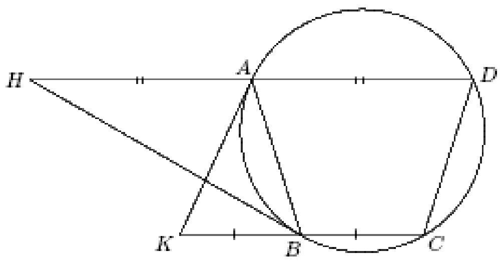
Bu durumda K noktasının yeri S_2 çemberinin seçiminden bağımsızdır.

Problem. ABC üçgeninde m(BAC) = 90^0 olup BC kenarı üzerinde alınan bir D noktası için m(BDA) = 2.m(BAD) ise $\frac{1}{AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}\right)$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm: ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O ve AD, çemberi E'de kessin. . $m(BOE) = 2.m(BCE) = 2.m(BAE) = m(BDA)$ olduğundan $ED = EO$ olur. Ayrıca $BC = 2.EO$'dur. D noktasına göre kuvvetten $AD.DE = BD.DC$ olup $\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{DE}$ ve $\frac{AD}{CD}=\frac{BD}{DE}$ olup taraf tarafa toplarsak $\frac{AD}{CD}+\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DE}+\frac{CD}{DE}=\frac{BC}{DE}=\frac{BC}{EO}=2$ olur. $\frac{AD}{CD}+\frac{AD}{BD}=2$ ise $\frac{1}{AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}\right)$ dir.

Problem. Bir çember üzerinde verilen sırada A, B, C, D noktaları verilsin. Çemberin A'daki teğeti ile BC'nin kesim noktası K ve çemberin B'deki teğeti ile AD'nin kesim noktası H olsun. BK = BC ve AH = AD ise ABCD nin ikizkenar yamuk olduğunu gösteriniz.



Çözüm: $HB^2 = HA.HD = 2.HA^2$ ve $KA^2 = KB.KC = 2.KB^2$ olur. Bu durumda $\left(\frac{HB}{HA}\right)^2 = 2 = \left(\frac{KA}{KB}\right)^2$ olup $\frac{HB}{HA} = \frac{KA}{KB}$ olur. ABK ve BAH üçgenlerinde sinüs teoreminden $\frac{KA}{KB} = \frac{\sin ABK}{\sin KAB}$ ve $\frac{HB}{HA} = \frac{\sin HAB}{\sin HBA}$ olup m(HBA) = m(KAB) olduğundan sinABK = sinHABolur. Bu durumda m(*ABK*) = m(*HAB*) veya m(ABK) + m(HAB) = π olur. Bu durumda AB // CD veya AD // BC olur. Bu ise ABCD'nin ikizkenar yamuk olduğunu gösterir.

Problem. ABC üçgeninde diklik merkezi H ve BC'nin orta noktası D'dir. AD, ABC'nin çevrel çemberini A_1 de kessin. A_1'in D'ye göre simetriği A_2 ise $AD \perp HA_2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: AH, BC'yi E'de çevrel çemberi F'de kessin. $AA_2.AD=AH.AE$ olduğunu göstermeliyiz..Problemxx'den EH = EF'dir.

$AA_2.AM=(AD-DA_2).AD=(AD-DA_2).AD=AD^2-AD.DA_2=$
$AD^2-AD.DA_1$
$=AD^2-DB.DC=AE^2+DE^2-DB^2=AE^2+(DE-$
$DB)(DE+DC)=AE^2-EB.EC=$
$= AE^2-AE.EF=AE(AE-EF)=AE(AE-EH)=AE.AH$

Problem. *ABCD* kirişler dörtgeninin çevrel çemberinin merkezi O ve yarıçapı R'dir. $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = Q$ ve $AC \cap BD = S$ olsun. *P*, Q, *S* noktalarının *O* noktasına uzaklıkları sırasıyla *p*, *q*, s ise *PQS* üçgeninin kenar uzunluklarını bulunuz. Ayrıca *O* noktasının *PQS* üçgeninin diklik merkezi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: *CDQ* ve *CBP* çemberlerinin kesim noktası *M* olsun. m(CMP) = π - m(PBC) ve m(CMQ) = m(CDQ) = m(CBA) = m(PBC) olduğundan *P*, *M*, *Q* noktaları doğrusaldır. Bu durumda *PM* + *QM* = *PQ*'dur. P noktasının CDQ çemberine göre kuvvetinden $PM.PQ = PD.PC = p^2 - R^2$ olur. Q noktasının CBP çemberine göre kuvvetinden $QM.PQ = QC.QB = QD.QA = q^2 - R^2$'dir.

$PQ^2 = PM.PQ + QM.PQ = p^2 + q^2 - 2R^2$ olur.

ACP ve *ABS* çemberlerinin kesim noktası *N* olsun. m(ANP) = m(ACP) = m(ACD) = m(ABD) = m(ANS) olduğundan *P*, *S*, *N* noktaları doğrusal olup PN – SN = PS'dir. Bu durumda P noktasının ABS çemberine nazaran kuvvetinden $PS.PN = PA.PB = p^2 - R^2$ ve *S* noktasının *ACP* çemberine nazaran kuvvetinden $PS.SN = SA.SC = R^2 - s^2$ olup $PS^2 = PN.PS - SN.PS = p^2 + s^2 - 2R^2$ olur. Benzer şekilde $QS^2 = q^2 + s^2 - 2R^2$ olur.

$PQ^2 - PS^2 = q^2 - s^2 = OQ^2 - OS^2$ olduğundan $OP \perp QS$'dir. Benzer şekilde $OQ \perp PS$ ve $OS \perp PQ$ olur. Bu durumda *O* noktası *PQS* üçgeninin diklik merkezidir.

Alıştırma. Bir çembere dışındaki *P* noktasından *PA* ve *PB* teğetleri çizilsin. *P*'den geçen bir doğru çemberi sırasıyla *D* ve *E*'de kessin. *A*'dan geçen *DE*'ye paralel doğru çemberi *C*'de kessin. *BC* ile *DE* nin kesim noktası *G* ise *DG* = *GE* olduğunu gösteriniz

Problem. Bir çember üzerinde verilen sırada A,B,C,D noktaları verilsin. AD ve BC, P'de kesişsin. P noktasından çembere çizilen teğetin değme noktası T olsun. P den geçen AC'ye paralel doğru ile BD, M'de kesişsin. MT = MP olduğunu gösteriniz.

KUVVET EKSENİ

Tanım. Eş merkezli olmayan iki çembere göre eş kuvvette olan noktaların geometrik yerine bu çemberlerin kuvvet ekseni denir.

Teorem. Kesişen iki çemberin kuvvet ekseni çemberlerin kesim noktalarından geçen doğrudur.

Teorem. Birbirine teğet olan iki çemberin kuvvet ekseni değme noktasında çemberlere teğet olan doğrudur.

Teorem. İki çemberin kuvvet ekseni merkezleri birleştiren doğruya diktir.

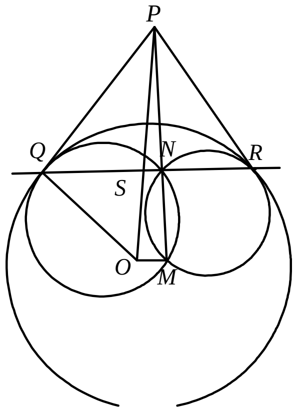
Teorem. Merkezleri doğrusal olmayan üç çemberin ikişer ikişer kuvvet eksenleri noktadaştır. Bu noktaya çemberlerin kuvvet noktası denir.

Problem-k. İkişer ikişer kesişen üç çemberin ortak kirişleri noktadaş veya paraleldir.

Çözüm: Eğer çemberlerin merkezleri doğrusal ise merkezleri birleştiren doğrular ortak kirişlere dik olacağından ortak kirişler birbirine paraleldir. Ortak kirişleri taşıyan doğrular çemberlerin kuvvet eksenleri olduğundan bu eksenler paralel olmalıdır.

Eğer çemberlerin merkezleri doğrusal değil ise ortak kirişler kuvvet eksenlerini tasıyan doğrular olup T-x'den bu eksenler noktadaştır.

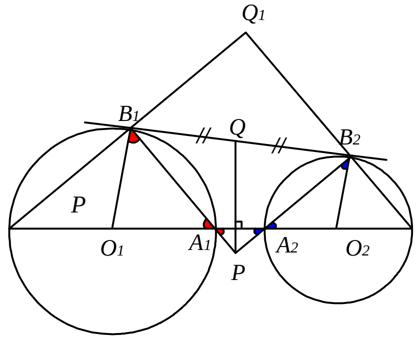
Problem. O merkezli bir çembere içten teğet olan iki çemberin değme noktaları Q ve R olup bu çemberler M ve N'de kesişmektedirler. Q, N, R doğrusal ise $OM \perp MN$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm: O merkezli çemberin Q ve R'deki teğetleri P'de kesişsin. $PQ = PR$ olduğundan P noktası içten teğet olan çemberlerin kuvvet ekseni üzerinde olur. Dolayısı ile P, N, M doğrusaldır. QR ile OP'nin kesim noktası S olmak üzere $OP \perp QR$ ve $PQ \perp OQ$ olduğundan POQ dik üçgeninde $PQ^2 = PS.\ PO$ ve P noktasının QNM çemberine nazaran kuvvetinden $PQ^2 = PN.PM$'dir. Bu durumda $PS.\ PO = PN.PM$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ise $\Delta PNS \sim \Delta POM$ olduğunu gösterir ki $m(OSN) = m(OMN) = 90^0$ olacaktır.

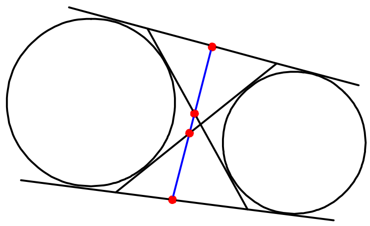
Problem. Kesişmeyen C_1 ve C_2 çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olup O_1O_2 doğru parçası çemberleri sırasıyla A_1 ve A_2'de kessin. C_1 ve C_2 çemberleri üzerinde sırasıyla B_1 ve B_2 noktaları alınsın. B_1B_2 çemberlerin ortak dış teğeti ve B_1A_1 ve B_2A_2'nin kesim noktası P olsun. P den geçen O_1O_2'ye dik doğrunun bu çemberlerin kuvvet ekseni olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: A_1, $A_2 \in [O_1O_2]$ olsun. P den geçen O_1O_2'ye dik doğru B_1B_2'yi Q'da kessin. $O_1B_1 \perp B_1B_2$ ve $O_2B_2 \perp B_1B_2$ olduğundan $O_1B_1 // O_2B_2$ olur. $m(O_1B_1A_1) = m(O_1A_1B_1) = \alpha$ olsun. Bu durumda $m(B_1O_1A_1) = 180^0 - 2.\alpha$ ve $m(B_2O_2A_2) = 2.\alpha$ olup $m(PB_1B_2) = 90^0 - \alpha$, $m(PB_2B_1) = \alpha$, $m(A_2A_1P) = \alpha$, $m(A_1A_2P) = 90^0 - \alpha$ olur. Bu durumda $QB_1 = QB_2$ olur. Bu ise Q noktasının bu çemberlerin kuvvete ekseni üzerinde olduğunu gösterir. Diğer taraftan $\Delta PB_1B_2 \sim \Delta PA_2A_1$ olduğundan $PA_1.PB_1 = PA_2.PB_2$ olduğundan P noktası da çemberlerin kuvvete ekseni üzerindedir. Dolayısı ile PQ, C_1 ve C_2 çemberlerinin kuvvet eksenidir.



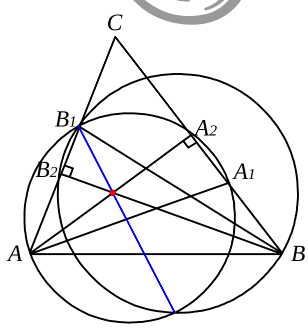
Eğer $A_1, A_2 \notin [O_1O_2]$ ise $B_1A_1 \cap B_2A_2 = Q_1$ olacaktır. $PB_1Q_1B_2$ dikdörtgen ve $QB_1 = QB_2$ olduğundan P, Q, Q_1 noktaları doğusal olup PQ kuvvet ekseni olduğundan PQ_1'de kuvvet ekseni olacaktır.

Problem. Kesişmeyen iki çemberin ortak iç ve dış teğetlerinin orta noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.



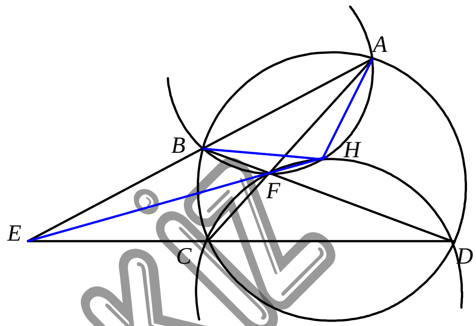
Çözüm: Ortak dış teğetlerin orta noktalarının iki çembere nazaran kuvvetleri eş olduğundan bu noktalar çemberlerin kuvvet ekseni üzerinde olmalıdır. Benzer şekilde ortak iç teğetlerin iki çembere nazaran kuvvetleri eşit olduğundan bu noktalar da kuvvet ekseni üzerindedir. Dolayısı ile bu dört nokta çemberlerin kuvvet ekseni üzerindedir.

Problem. *ABC* üçgeninin *BC* ve *AC* kenarları üzerinde sırasıyla A_1 ve B_1 noktaları verilsin. AA_1 ve BB_1 çaplı çemberlerin ortak kirişinin *ABC* üçgeninin diklik merkezinden geçtiğini gösteriniz.



Çözüm: AA_2 ve BB_2 üçgenin yükseklikleri olsun. Bu durumda AA_1 çaplı çember A_2'den, BB_1 çaplı çember B_2'den geçer. Ayrıca AA_2 ve BB_2'nin kesim noktası *ABC* üçgeninin diklik merkezidir. AA_2 ve BB_2, *AB* çaplı A_2 ve B_2'den geçen çemberin diğer iki çemberle ortak kirişleridir. P-k'dan AA_1 ve BB_1 çaplı çemberlerin ortak kirişi ile AA_2 ve BB_2 noktadaştır.

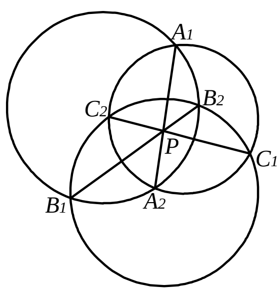
Problem. *O* merkezli bir çember üzerinde verilen sırada *A*, *B*, *C*, *D* noktaları alınsın. *AB* ile *CD*'nin kesim noktası *E* ve *AC* ile *BD*'nin kesim noktası *F*'dir. *AFD* ve *BFC* üçgenlerinin çevrel çemberleri *F*'den başka *H*'de kesişiyor ise m(*OHF*) = 90^0olduğunu gösteriniz.



Çözüm: *AHB*, *CHD* ve *ABCD* çemberlerinin ikişer ikişer ortak kirişleri *CD*, *AB* ve *HF* olup bu doğrular noktadaştır. Bu durumda *E*, *F*, *H* doğrusaldır.

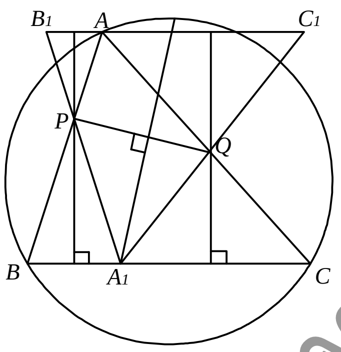
m(*AHB*) = m(*ADF*) + m(*BCF*) = 2.m(*ADF*) = m(*AOB*) olur. Bu durumda *O* noktası *AHB* üçgeninin çevrel çemberi üzerinde olmalıdır. Benzer şekilde *O* noktasının *CHD* üçgeninin çevrel çemberi üzerinde olduğu da gösterilebilir. Bu durumda
m(*OHF*) = m(*OHC*) + m(*CHF*) = m(*ODC*) + m(*CBF*) olur. m(*CAD*) = m(*CBF*) ve 2.m(*CAD*) = m(*DOC*) = 180^0 – 2.m(*ODC*) olup *m*(*ODC*) = 90^0 - m(*CAD*) olduğundan *m*(*OHF*) = 90^0 ve *O*, *H*, *E* doğrusal olduğundan *m*(*OHF*) = *m*(*EHF*) = 90^0'dir.

Problem [Haruki-Ceva]. Üç çember ikişer ikişer A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 noktalarında kesiştiğine göre $\frac{A_1B_2}{A_1C_2}\cdot\frac{B_1C_2}{B_1A_2}\cdot\frac{C_1A_2}{C_1B_2}=1$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm: Çemberlerin ikişer ikişer ortak kirişleri noktadaş olacağından A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 noktadaş olup kesim noktasına P diyelim. $\Delta A_1PB_2 \sim \Delta B_1PA_2$ olduğundan $\frac{A_1P}{B_1P}=\frac{A_1B_2}{B_1A_2}$ olup benzer şekilde $\Delta B_1PA_2 \sim \Delta C_1PB_2$ ve $\Delta C_1PB_2 \sim \Delta A_1PC_2$ olduğundan $\frac{B_1P}{C_1P}=\frac{B_1C_2}{C_1B_2}$ ve $\frac{C_1P}{A_1P}=\frac{C_1A_2}{A_1C_2}$ olup eşitlikleri taraf taraf çarparsak $\frac{A_1B_2}{B_1A_2}.\frac{B_1C_2}{C_1B_2}.\frac{C_1A_2}{A_1C_2}=\frac{A_1P}{B_1P}.\frac{B_1P}{C_1P}.\frac{C_1P}{A_1P}=1$ olur.

Problem. *ABC* üçgeninin *BC* kenarı üzerinde bir A_1 noktası verilsin. A_1B'nin orta dikmesi *AB*'yi *P*'de, A_1C'nin orta dikmesi ise *AC*'yi *Q*'da kessin. A_1 noktasının *PQ*'ya göre simetriğinin *ABC* üçgeninin çevrel çemberi üzerinde olduğunu gösteriniz.



Çözüm: A_1P ve A_1Q, *A*'dan geçen *BC*'ye paralel doğruyu sırasıyla B_1 ve C_1'de kessin. Bu durumda $PB = PA_1$ ve $QC = QA_1$ olup gerekli açı işlemleri yapılırsa $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ olur. $PA.PB = PB_1.PA_1$ ve $QA.QC = QC_1.QA_1$ olduğundan P ve Q noktaları *ABC* ve $A_1B_1C_1$ üçgenlerinin çevrel çemberlerine nazaran eşit kuvvettedirler. Bu durumda *PQ*, bu iki çemberin kuvvet eksenidir. Ayrıca bu iki çember eş olduğundan kuvvet ekseni aynı zamanda simetri eksenidir. Bu sebeple $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel çemberi üzerindeki A_1 noktası *ABC* üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir.