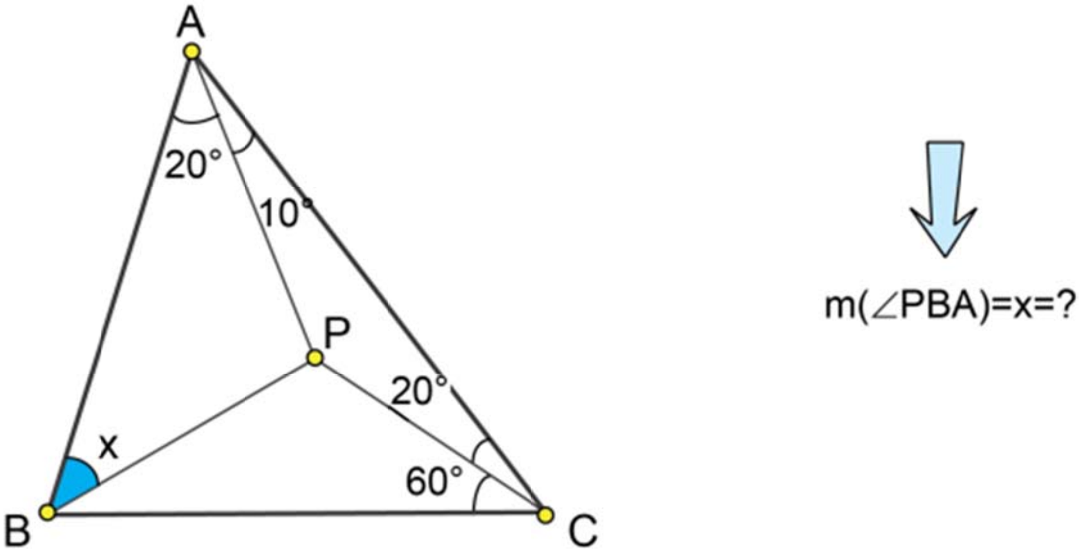
Problem 221.



Çözüm:

Trigo Ceva uygulayaım:

$$sin10 sinx sin60 = sin20\sin(70-x)\,sin20$$

$$\frac{1}{2}[cos50-cos70]sinx = \frac{1}{2}[1-cos40]\sin(70-x)$$

$$sinxcos50 - sinxcos70 = \sin(70-x) - \sin(70-x)\,cos40$$

$$\frac{1}{2}[\sin(x+50)+\sin(x-50)] - \frac{1}{2}[\sin(x+70)+\sin(x-70)]$$
$$= \sin(70-x) - \frac{1}{2}[\sin(110-x)+\sin(30-x)]$$

$$\sin(x+50)+\sin(x-50)-\sin(x+70)+\sin(70-x)$$
$$= 2\sin(70-x)-\sin(110-x)+\sin(x-30)$$

olur. Sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\sin(50+x)+\sin(x-50) = \sin(70-x)+\sin(x-30)$$

$$\sin(x-50)-\sin(x-30) = \sin(70-x)-\sin(50+\boldsymbol{x})$$

$$2\cos(x-40)\sin(-10) = 2\cos(60)\sin((10-x)$$

$$\cos((x-40)sin10 = \frac{1}{2}\sin(x-10)$$

Her iki taraf 2 cos10 ile çarpılırsa

$$sin20\cos(x-40) = \sin(x-10)\,cos10$$

$$\frac{1}{2}[\sin(x-20)+\sin(60-x)]=\frac{1}{2}[\sin(x)+\sin(x-20)]$$

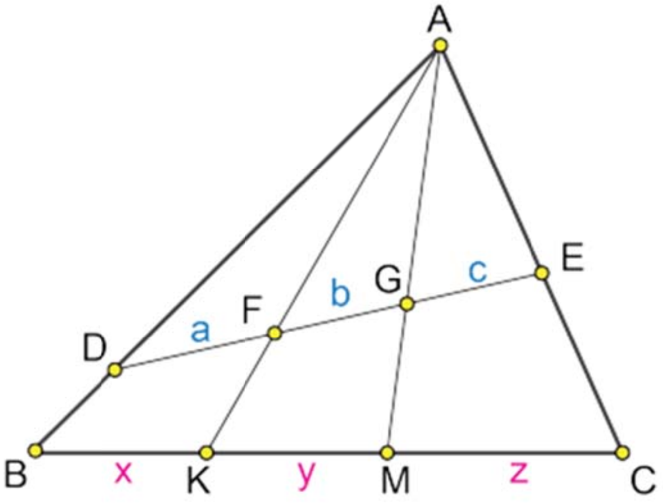
Sadeleştirmelerden sonra

$$\sin(60-x)=sinx$$

$$60-x=x\ ve\ x=30$$

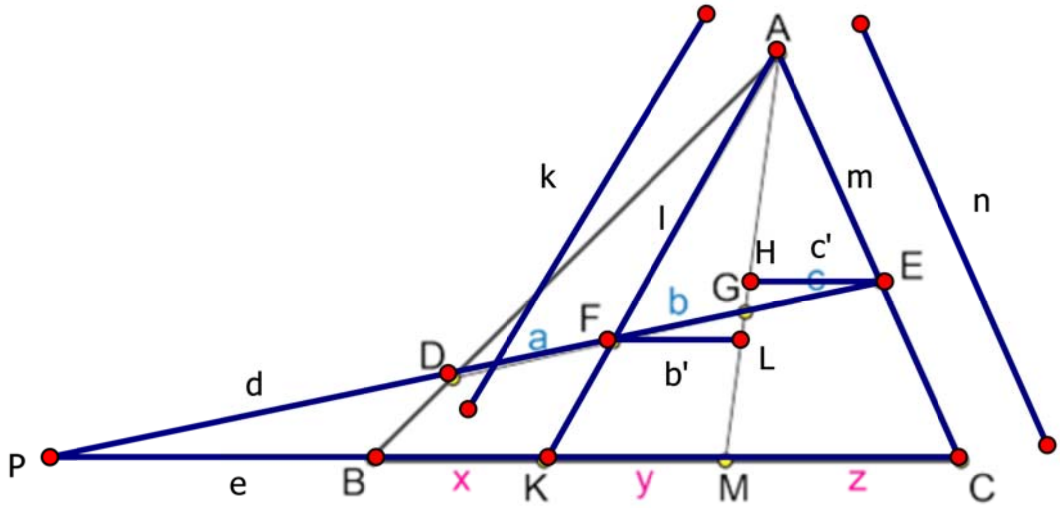
oarak bunur.

Problem 222



$$\frac{a.c}{b(a+b+c)} = \frac{x.z}{y(x+y+z)}$$

Çözüm:



EPC üçgeninde AB nu kesen aşarak Menelaus uygulanırsa

$$\frac{a+b+c}{d} \cdot \frac{e}{x+y+z} \cdot \frac{n}{m} = 1$$

FPK üçgeninde AB nu kesen alarak Menelelaus uygulanırsa $\frac{a}{d} \cdot \frac{e}{x} \cdot \frac{k}{l} = 1$ olur. Bu iki ifade taraf tarafa bölünürse $\frac{a+b+c}{a} \cdot \frac{x}{x+y+z} \cdot \frac{nl}{km} = 1$ (1) ede edilir. [EH]//[BC] ve [FL]//[BC] çizelim $|EH| = c' ve\ |FL| =$

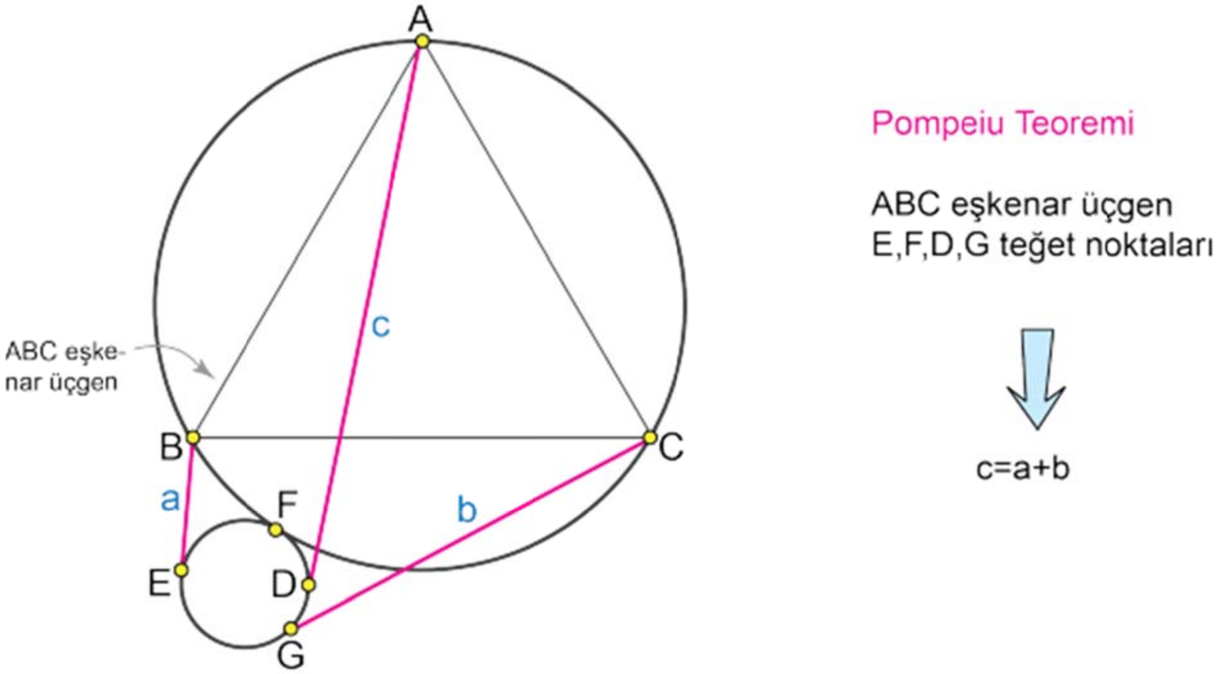
b' olsun. AHE ve AMC üçgenerinin benzerliğinden $\frac{c'}{z}=\frac{m}{n}$, AFL ve AKM üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{b'}{y}=\frac{l}{k}$ yazıır. Taraf tarafa böünürse $\frac{c'y}{b'z}=\frac{mk}{nl}$ elde edilir. GEH ve GFL üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$ olur. Bu değer yerine yazılırsa $\frac{nl}{km}=\frac{bz}{cy}$ elde edilir. Bu değer (1) de yerine yazılırsa

$$\frac{a+b+c}{a}\cdot\frac{x}{x+y+z}\cdot\frac{bz}{cy}=1\ den\ \frac{b(a+b+c)}{ac}\cdot\frac{xz}{y(x+y+z)}=1$$

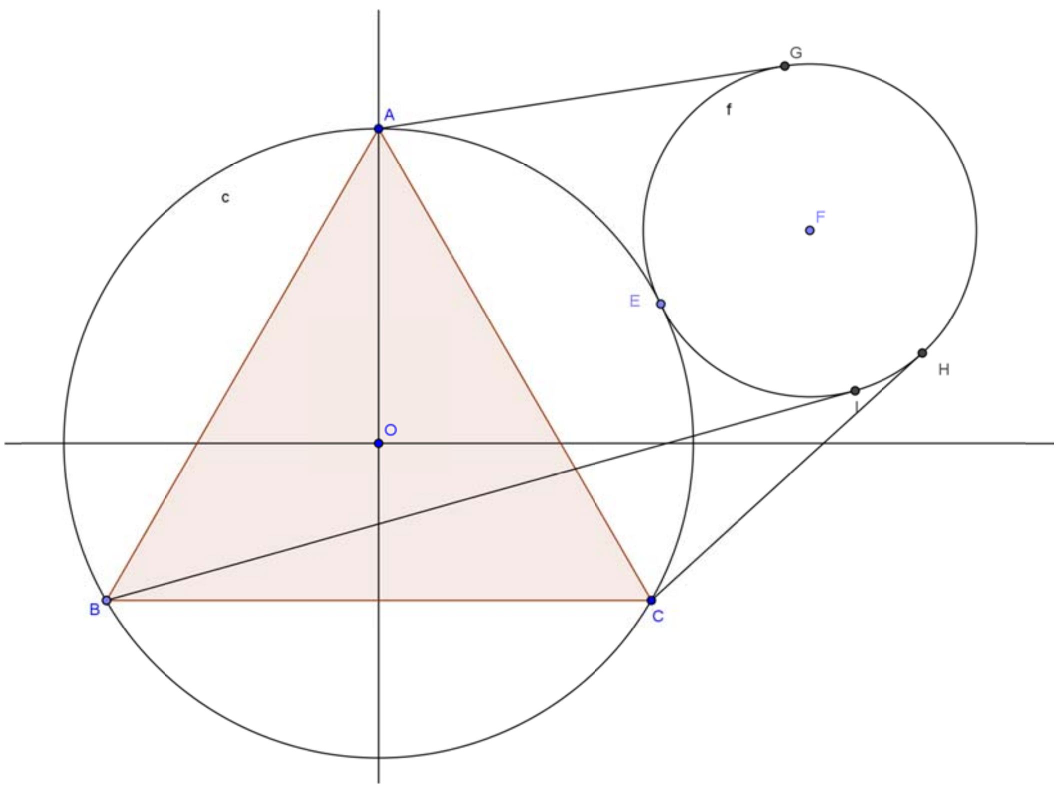
$$\frac{ac}{b(a+b+c)}=\frac{xz}{y(x+y+z)}$$

Sonucu ede edilir.

Problem223



Pompeiu's Teoremine Analitik bir ispat



ABC eşkenar üçgeni ve onun çevrel çemberi çiziliyor. ABC üçgeninin çevre çemberine teğet olan F merkezli çember çiziliyor. A, B ve C köşelerinden F merkezi çembere çizilen teğet parçalarının uzunlukları sırasıyla z, x ve y olsun. x = y + z dir.

Başka bir ifadeyle bir eşkenar üçgeninin çevrel çemberine teğet olarak çizien bir çembere, üçgenin bu çembere yakın köşelerinden çizilen teğet parçalarının uzunlukları toplamı, uzak köşeden çizilen teğet parçasının uzunluğuna eşittir.

İspat:

ABC eşkenar üçgeninin ağırlık merkezi dik koordinat sisteminin merkezine ve A köşesi y ekseninin üzerine gelecek şekilde yerleştirelim. Üçgenin A köşesini $A(0, r_1$ olarak alırsak $B\left(-\frac{r_1\sqrt{3}}{2}, -\frac{r_1}{2}\right)$ ve $C\left(\frac{r_1\sqrt{3}}{2}, -\frac{r_1}{2}\right)$ olur.$F(a,b)$ oarak alalım. A, B ve C noktalarının F merkezli çembere göre kuvvetlerinden

$$|AG|^2 = z^2 = (a)^2 + (b - r_1)^2 - r_2^2$$

$$|BI|^2 = x^2 = \left(a + \frac{r_1\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{r_1}{2}\right)^2 - r_2^2$$

$$|CH|^2 = y^2 = \left(a - \frac{r_1\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{r_1}{2}\right)^2 - r_2^2$$

İfadeleri yazılabiir. Ayrıca $|OF| = r_1 + r_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ olduğundan $r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = a^2 + b^2$ dir. Yukarıdaki parantezler açılırsa:

$$z^2 = a^2 + b^2 - 2br_1 + r_1^2 - r_2^3 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - 2br_1 - r_2^2 = 2r_1^2 + 2r_1r_2 - 2br_1$$
$$= 2r_1\left[r_1 + r_2 - b\right]$$

$$x^2 = a^2 + ar_1\sqrt{3} + \frac{3r_1^2}{4} + b^2 + br_1 + \frac{r_1^2}{4} - r_2^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + r_1^2 + ar_1\sqrt{3} + br_1 - r_2^2$$
$$= 2r_1^2 + 2r_1r_2 + br_1 + ar_1\sqrt{3} = r_1\left[2r_1 + 2r_2 + b + a\sqrt{3}\right]$$

$$y^2 = a^2 - ar_1\sqrt{3} + \frac{3r_1^2}{4} + b^2 + br_1 + \frac{r_1^2}{4} - r_2^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + r_1^2 - ar_1\sqrt{3} + br_1 - r_2^2$$
$$= 2r_1^2 + 2r_1r_2 + br_1 - ar_1\sqrt{3} = r_1\left[2r_1 + 2r_2 + b - a\sqrt{3}\right]$$

Bu üç ifade arasından eğer $z^2 = (x-y)^2$ olduğunu gösterebilirsek $x = y + z$ olduğu ispatlanmış olur.

$$x^2y^2 = r_1^2\left[(2r_1+2r_2+b)^2-3a^2\right] = r_1^2\left[(2(r_1+r_2)+b)^2-3a^2\right]$$
$$= r_1^2\left[4(r_1+r_2)^2+4b(r_1+r_2)+b^2-3a^2\right]$$
$$= r_1^2\left[4(a^2+b^2)+4b(r_1+r_2)+b^2-3a^2\right]$$
$$= r_1^2\left[4a^2+4b^2+4b(r_1+r_2)+b^2-3a^2\right]$$
$$= r_1^2\left[a^2+b^2+4b(r_1+r_2)+4b^2\right]$$
$$= r_1^2\left[(r_1+r_2)^2+4b(r_1+r_2)+4b^2\right] = r_1^2\left[(r\ +r_2)+2b\right]^2$$
$$xy = r_1(r_1+r_2+2b)\ ve\ -2xz = -2r_1(r_1+r_2+2b)$$

Olur. Buradan

$$x^2-2xy+y^2 = r_1\left[2r_1+2r_2+b+a\sqrt{3}-2r_1-2r_2-4b+2r_1+2r_2+b-a\sqrt{3}\right]$$
$$= r_1\left[2r_1+2r_2-2b\right] = 2r_1\left[r_1+r_2-b\right] = z^2$$

Bu son ifadeden anlaşılmaktadır ki;

$$(x-y)^2 = z^2$$

$$x - y = z\ ve\ x = y + z$$

Olur.

Sonuç:

Bir eşkenar üçgenin çevre çemberi üzerinde alınan bir noktayı üçgenin yakın köşelerine birleştiren doğru parçalarının uzunlukları toplamı üçgenin uzak köşesine birleştiren doğru parçasının uzunluğuna eşittir.

İspat:

Yukarıdaki şekilde F noktası çevrel çember üzerinde olursa $a^2+b^2=r_1^2\ ve\ r_2=0$ olacaktır. Bu durumda

$$z^2 = 2r_1(r_1-b)$$

$$x^2 = r_1\left[2r_1+2r_2+b+a\sqrt{3}\right]$$

$$y^2 = r_1\left[2r_1 + 2r_2 + b - a\sqrt{3}\right]$$

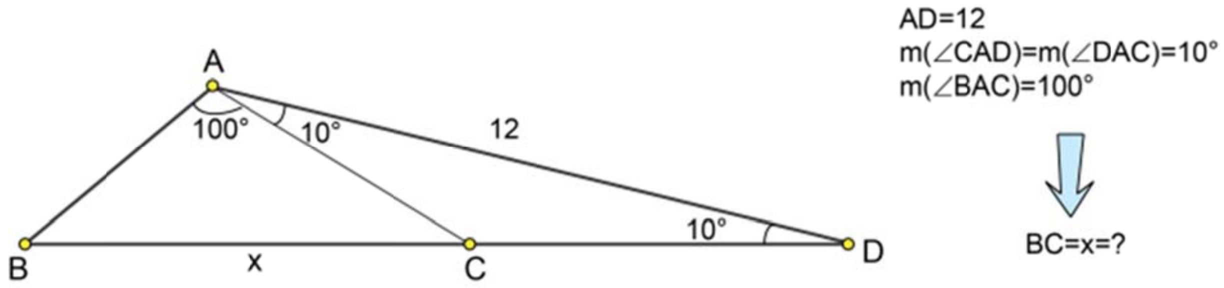
Olur.

$$x^2y^2 = r_1^2\left[\left(2r_1 + b\right)^2 - 3a^2\right] =$$
$$= r_1^2\left[4\left(r_1\right)^2 + 4b\left(r_1\right) + b^2 - 3a^2\right]$$
$$= r_1^2\left[4\left(a^2 + b^2\right) + 4b\left(r_1\right) + b^2 - 3a^2\right]$$
$$= r_1^2\left[4a^2 + 4b^2 + 4b\left(r_1\right) + b^2 - 3a^2\right]$$
$$= r_1^2\left[a^2 + b^2 + 4b\left(r_1\right) + 4b^2\right]$$
$$= r_1^2\left[\left(r_1\right)^2 + 4b\left(r_1\right) + 4b^2\right] = r_1^2\left[\left(r_1\right) + 2b\right]^2$$
$$xy = r_1\left(r_1 + 2b\right)\ ve\ -2xz = -2r_1\left(r_1 + 2b\right) = -2r_1^2 - 4b$$

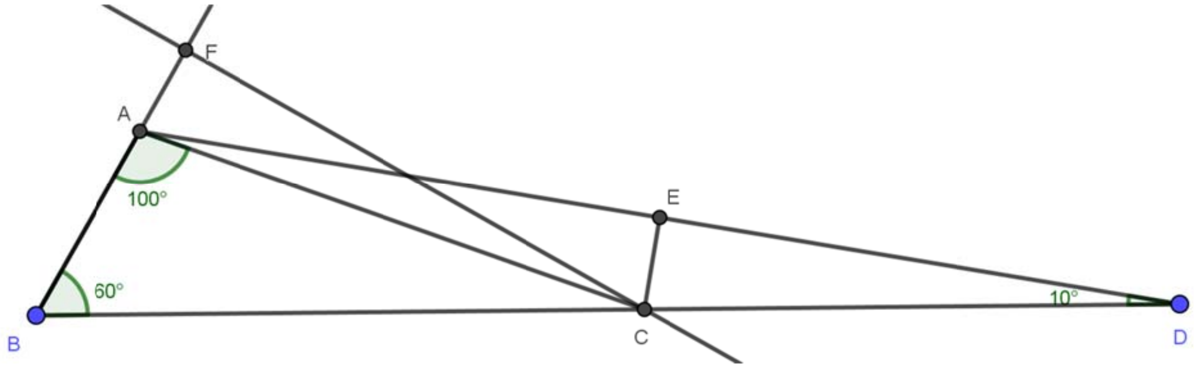
$$x^2 - 2xy + y^2 = r_1\left[2r_1 + b + a\sqrt{3} - 2r_1 - 4b + 2r_1 + b - a\sqrt{3}\right]$$
$$= r_1\left[2r_1 - 2b\right] = 2r_1\left[r_1 - b\right] = z^2$$

Olduğundan $z^2 = (x - y)^2\ ve\ z = x - y\ den\ x = y + z$ olur.

Problem224

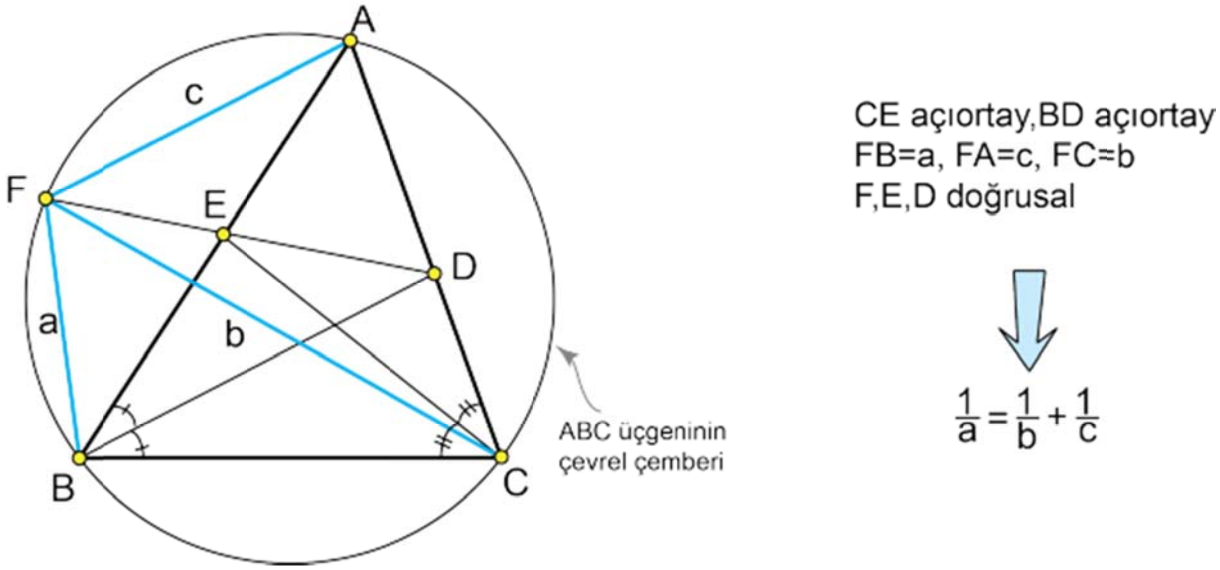


Çözüm:



[CE]⊥[AD] çizilirse |AE|=6 olur. [CF]⊥[BA çizilirse m(BCF)=30 ve m(ACF)=10 olur. Ayrıca CAE üçgeni ile AXF üçgenleri AKA eşlik bağıntısına göre eş olur. Yani |AE|=|CF|=6 olur. Öte yandan FBC bir açısı 30 derece olan bir dik üçgendir. 60 derecenin karşısındaki kenar 6 olduğuna göre 30 derecenin karşısındaki kenar $|BF| = 2\sqrt{3}$ olacaktır. Buna göre F dik açısının karşısındaki kenar $|BC| = x = 4\sqrt{3}$ olur.

Problem 225



Çözüm:

Bu sorunun çözümü için aşağıdaki teoremin ispatı gereklidir. Önce bu ispat ve bağlı olarak da sorunun çözümü aşağıdadır.

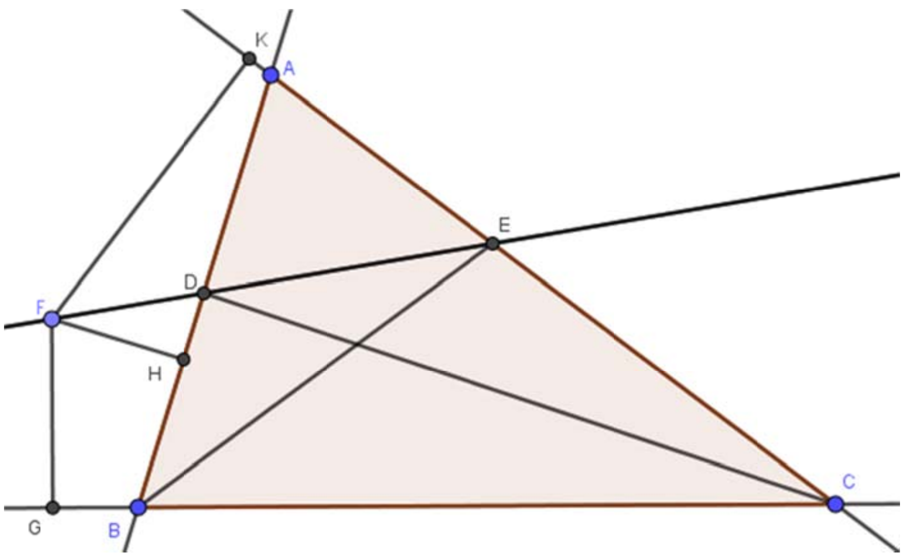
Teorem:

Bir üçgenin herhangi iki açısının açıortayının kenarlarla kesişme noktalarının oluşturduğu doğru üzerinde alınan bir noktanın yakın iki kenara olan uzaklıkları toplamı üçüncü kenara olan uzaklığına eşittir.

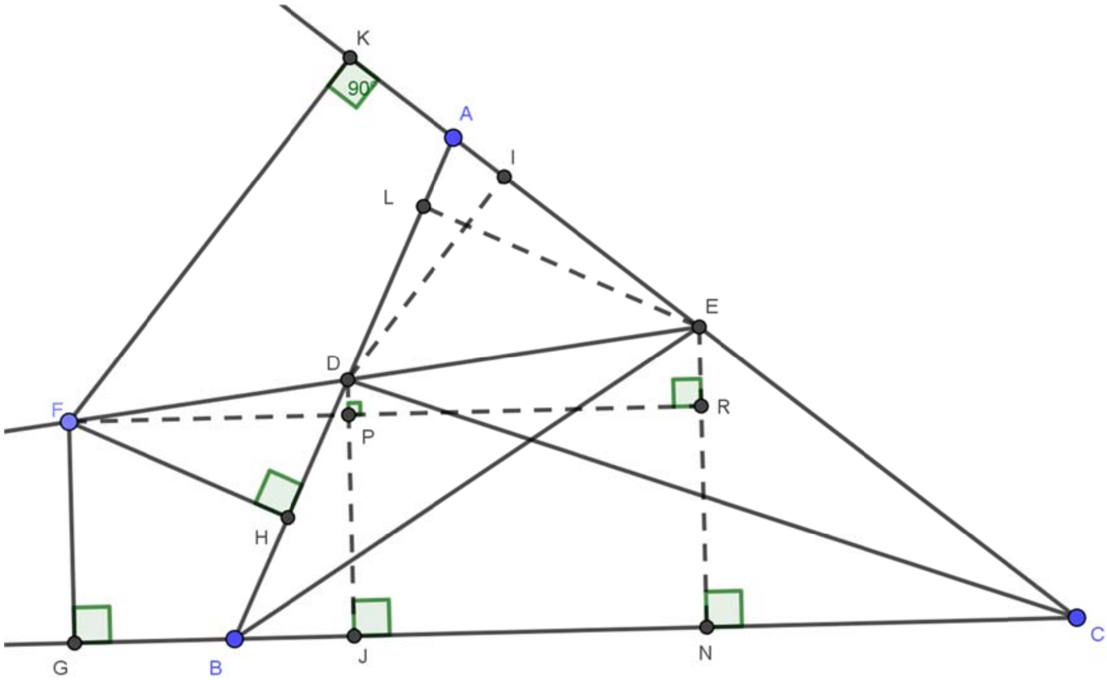
İspat:

1. Üçgenin iki iç açıortayı olsun:

Nokta üçgenin dış bölgesinde olsun



Teoreme göre |FG|+|FH|=|FK| olduğunu göstereceğiz.



D ve E noktalarından kenarlara DI, DJ, EL ve EN dikmeleri ile F noktasında BC na FR paralelini çizelim. CD açıortay olduğundan |DI|=|DJ|, |EL|=|EN| olur. |DI|=k, |EL|=l, |DF|=m, |DE|=n olsun. FG|=x, |FH|=y ve |FK|=z olsun. DP=k – x ve $|ER| = l - x$ olur. Aynı doğruya dik olan doğrular paralel olduklarından

FK//DI paralelliğinden EFK ile EDI üçgenleri benzerdir ve

$\frac{z}{k} = \frac{m+n}{n}$ den $z = \frac{k(m+n)}{n}$ eşitliği yazılır.

FH//EL paralelliğinden FHD ve ELD üçgenlerinin benzerliğinden

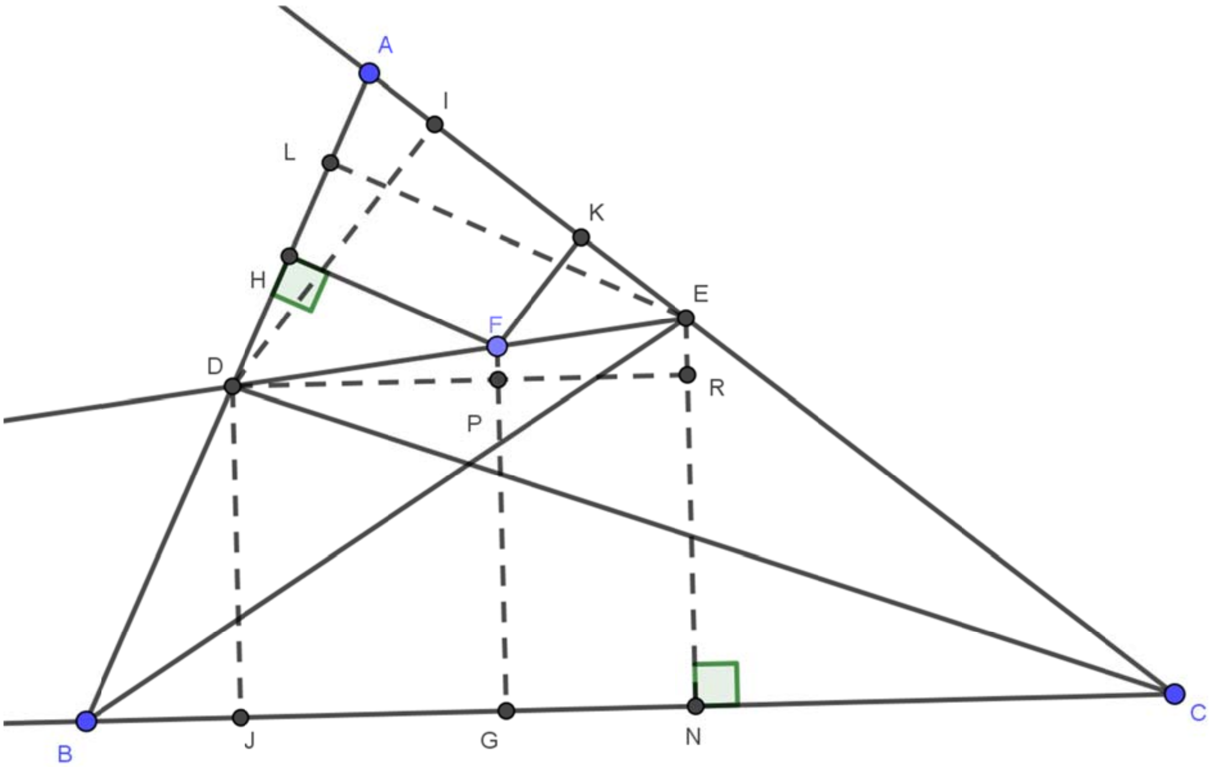
$\frac{y}{l} = \frac{m}{n}$ den $y = \frac{lm}{n}$ eşitliği yazılır.

FPD ve FRE üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{k-x}{l-x} = \frac{m}{m+n}$ den

$km + kn - mx - nx = lm - mx$olur. Buradan $x = \frac{k)n+n)-ml}{n}$ olur.

$x + y = \frac{k)n+n)-ml}{n} + \frac{ml}{n} = \frac{k(m+n)}{n} = z$ sonucu elde edilir.

Nokta üçgenin iç bölgesinde olsun.



F noktasının yakın kenarlara uzaklıkları |FK|=x, |FG|=y ve uzak kenara uzaklığı |FH|=z olsun

Açıortayların kenarları kestiği D ve E noktalarından kenarlara [DJ], [DN], [EM] ve [EL] dikmelerini ve DR//BC çizelim. |DJ|=DN|, |EL|EM| , |DN|=|PH|=|RL| olur. |DJ|=k, |EL|l deresek |FP|=x – k ve |ER|=l – k olur. |DF|=m ve |FE|=n olsun.

DKF ile DME üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{x}{l}=\frac{m}{m+n}$ (I) olur.

DPF ve DRE üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{z-k}{l-k}=\frac{m}{m+n}$ ve $\frac{z-k}{l-k}=\frac{x}{l}$ (II) olur.

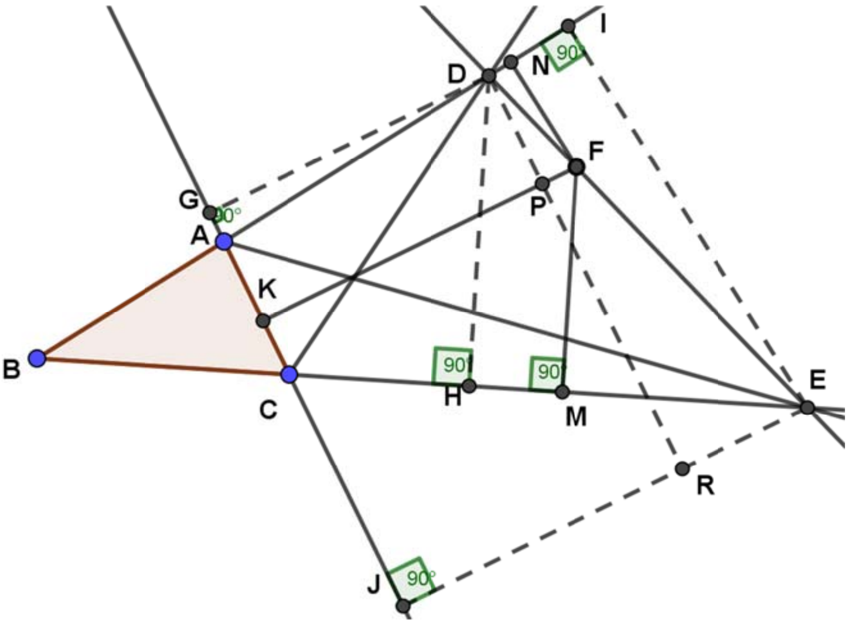
EFG ile EDJ üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{y}{k}=\frac{n}{m+n}$ (III) olur.

I ve III taraf tarafa toplanırsa $\frac{x}{l}+\frac{y}{k}=1$ ve $kx+ly=kl$ olur. II de içler dışlar çarpımı yapılırsa $zl-kl=xl-xk$ olur kl değeri yerine yazılırsa

$$zl-kx-ly=xl-xk$$

$$zl=xl+yl\ den\ z=x+y\ olur.$$

2. Üçgenin iki dış açıortayı olsun



ABC üçgenininde A açısının dış açıortayı AEve C açısının dış açıortayı CD olsun. E ve D noktalarından kenarlara [DG], [DH], [EI] ve [EJ] dikmeleri çizilirse |DG|=|DH| ve |EI|=|EJ| olur. |DH|=k, |EJ|=l diyelim. DE üzerinde bir nokta F olsun. F noktasının kenarlara olan uzaklıkları |FN|=x, |FM|=y ve |FK|z olsun. DR//AC çizilirse |FP|=z – k ve |ER|=l – k olur. |DF|=m ve |FE|=n diyelim

DFN ile DEI üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{x}{l}=\frac{m}{m+n}$ (I) olur.

EMF ile EHD üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{y}{k}=\frac{n}{m+n}$ (II) olur. I ve II taraf tarafa toplanırsa $\frac{x}{l}+\frac{y}{k}=1$ ve $kx+ly=kl$ olur.

DPF ile DRE üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{z-k}{l-k}=\frac{m}{m+n}$ den $\frac{z-k}{l-k}=\frac{x}{l}$ olur. Bu orantıdan

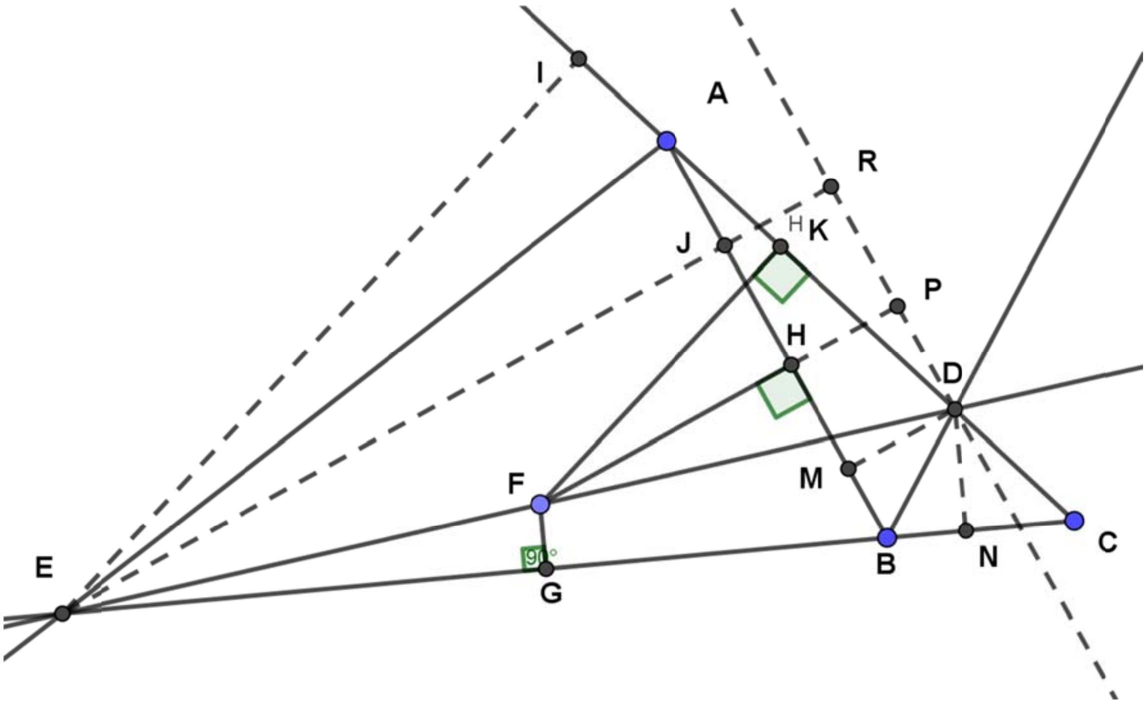
$$lz-kl=xl-xk$$

kl değeri yerine yazılırsa

$$zl-xk-yl=xl-xk$$

$$zl=xl+yl\ den\ z=x+y\ olur.$$

3. **Üçgeninin bir iç bir dış açıortayı olsun**



A açısının dış aöıortayı [AE], B açısının iç açıortayı]BD] çizelim. E ve D noktalarından kenarlara [EI], [EJ], [DM], [DN] dikmeleri çizilirse |EI|=|EJ|, |DM|=|DN| olur. |EI|=l ve |DM|=k diyelim. DE üzerinde bir nokta F olsun. F noktasının yakın iki kenara olan uzaklıkları |FG|=x, |FH|=y ve üçüncü kenara olan uzaklığı |FK|=z olsun. DR//AB çizilirse |ER -=l + k, |FP|=y + k olur. |FE|=n ve |FD|=m diyelim

DFK ile DEI üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{z}{l}=\frac{m}{m+n}$ (I) olur.

DFP ile DER üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{y+k}{l+k}=\frac{m}{m+n}$ den $\frac{y+k}{l+k}=\frac{z}{l}$ (II) olur.

EGF ile END üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{x}{k}=\frac{n}{m+n}$ (III) olur. I ve III taraf tarafa toplanırsa $\frac{z}{l}+\frac{x}{k}=1\ den\ zk+xl=kl$ olur. II de içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$yl+kl=zl+zk$$

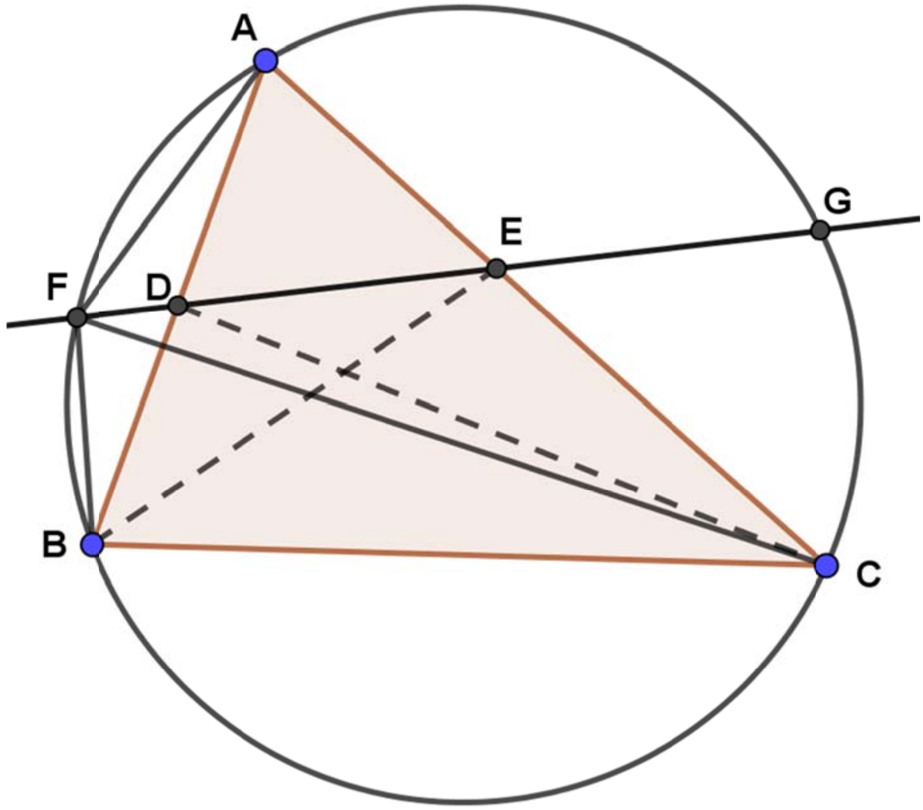
Kl değeri yerine yazılırsa

$$yl+zk+xl=zl+zk$$

$$xl+yl=zl\ den\ x+y=z$$

Eşitliği elde edilir.,

Bir uygulama:



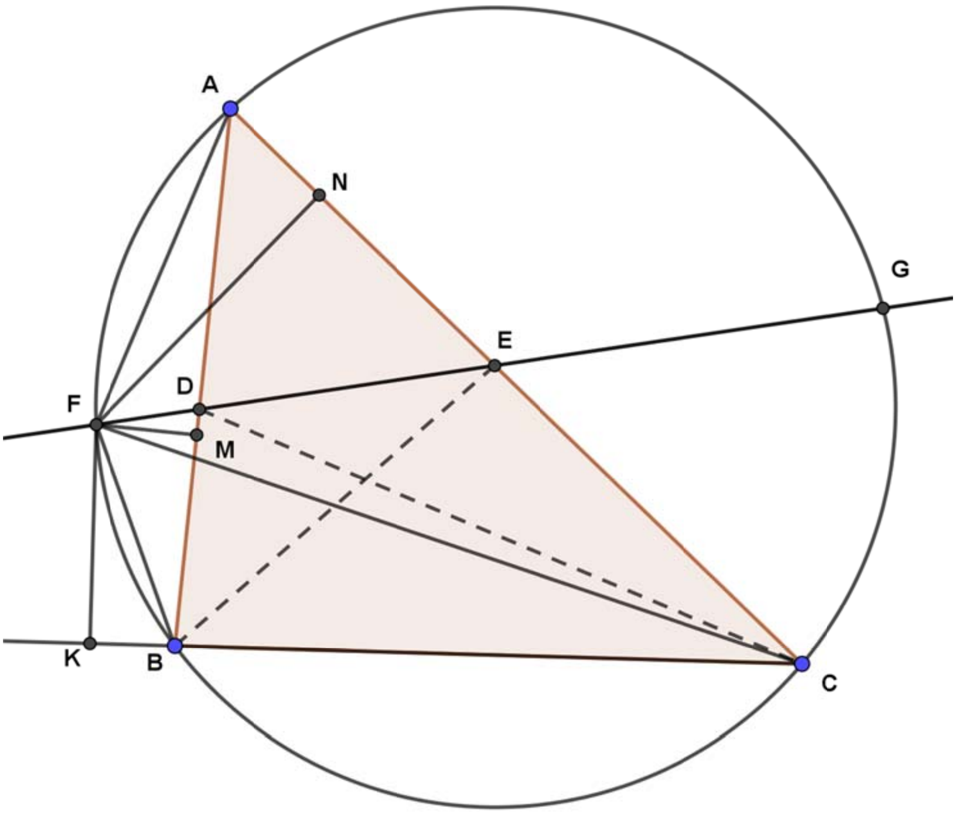
Şekilde ABC üçgeninin çevrel çemberi verilmiştir. [BE] ve [CD] açıortaylar ve DE ile çemberin kesişme noktaları F ve G olsun. |BF|=x, |CF|=y ve |AF -=z ise

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

F noktasından [AB}, [AC] ve [BC] kenarlarına sırasıyla [FM], [FN] ve [FK] dikmelerini çizelim.



Aynı yayı gördüklerinden $m(BAC) = m(BFC), = m(FAB) = m(FCB)$ olur. Bu nedenle FBC üçgeninde FBK dış açı olduğundan $m(FBK) = m(BFC) + m(FCB)$ ve $m(FAC) = m(FAB) + m(BAC)$ olduğundan FBJ üçgeni ile FAN üçgenleri benzerdir. Bu benzerlikten $\frac{|FK|}{|FN|} = \frac{|FB|}{|FA|}$ *den* $\frac{|FK|}{|FN|} = \frac{x}{z}$ (I) yazılır.

Yine aynı yayı gördüklerinden $m(FBA) = m(FCA)$ olduğundan BFM ile CFN üçgenleri benzerdir. Bu benzerlikten $\frac{|FM|}{|FN|} = \frac{|FB|}{|FC|}$ *den* $\frac{|FM|}{|FN|} = \frac{x}{y}$ (II) yazılır.

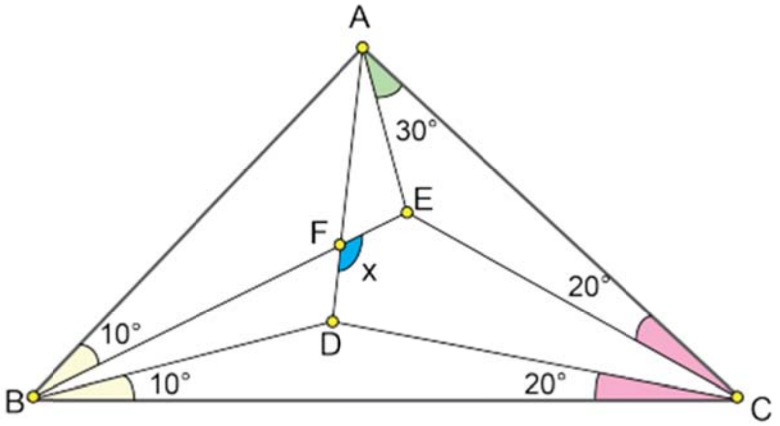
Yukarıda ispatlandığı üzere $|FK| + |FM| = |FN|$ dir. I ve II taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{x}{z} + \frac{x}{y} = \frac{|FK|}{|FN|} + \frac{|FM|}{|FN|} 0 \frac{|FN|}{|FN|} \quad den \quad \frac{x}{y} + \frac{x}{z} = 1 ve\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Sonucu ele edilir.

Problem 226

Posted on Kasım 29, 2014

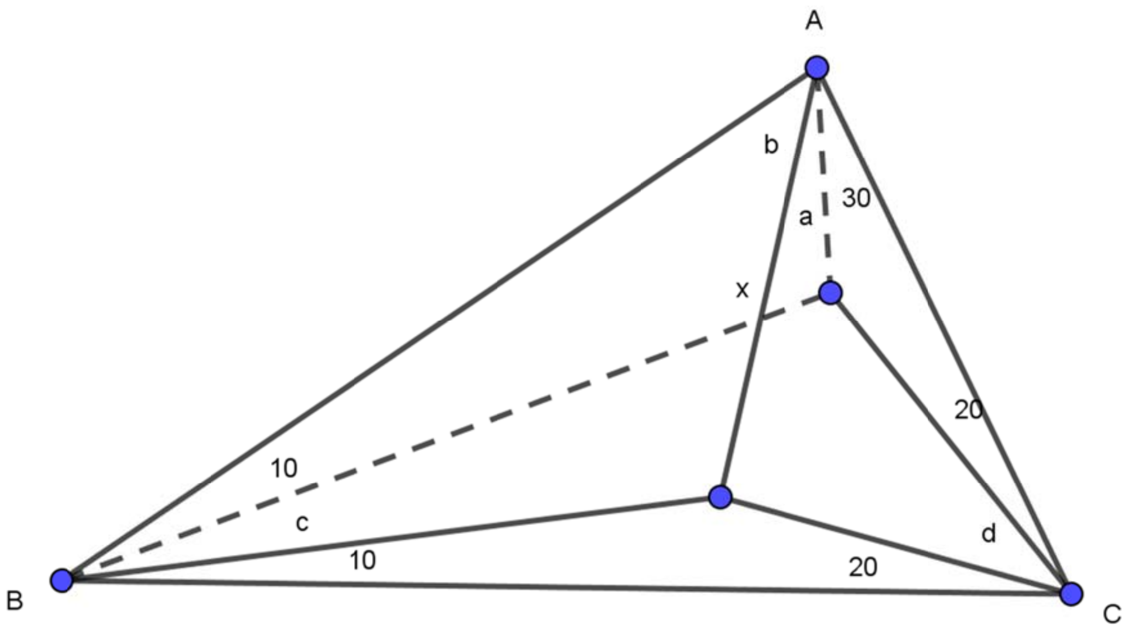


A,F,D doğrusal
B,F,E doğrusal
m(∠ABF)=m(∠DBC)=10°
m(∠ACE)=m(∠DCB)=20°
m(∠EAC)=30°

m(∠EFD)=x=?

Çözüm:

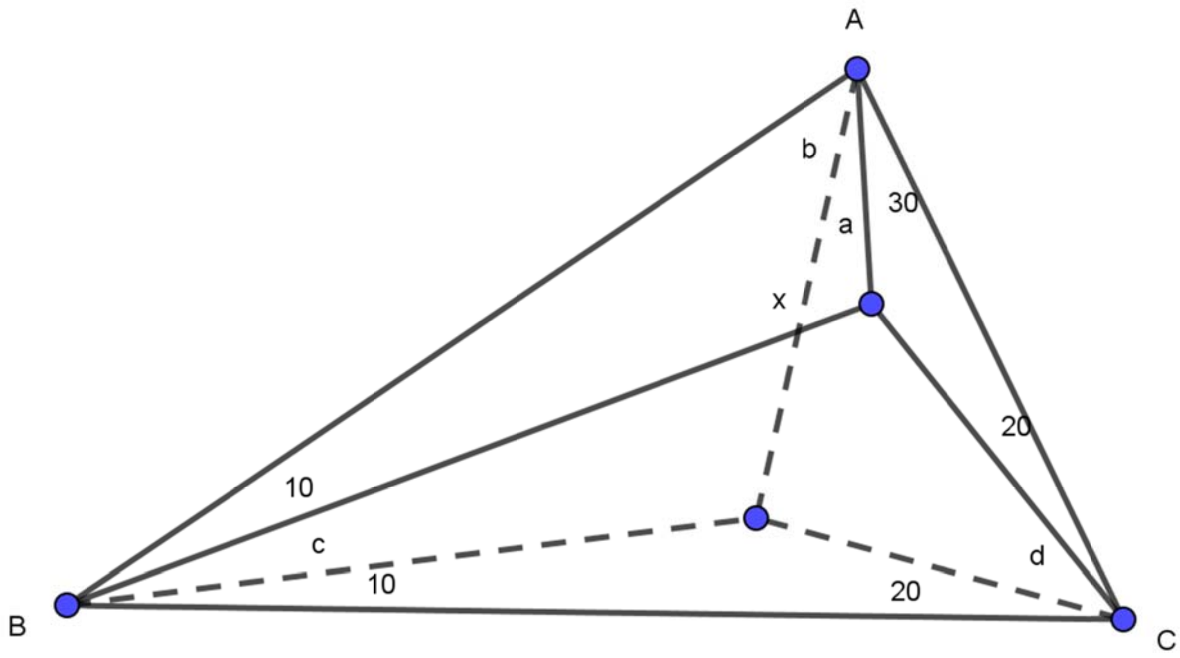
m(EAF)=a, m(FAB)=b, m(FBD)=c ve m(DCE)=d diyelim İki farklı trigo ceva uygulayalım



$$\sin(30+a)\sin(10+c)\,sin20 = sinbsin10\sin(20+d)$$

$$\sin(30+a)\sin(10+c)\,2sin10cos10 = sinbsin10\sin(20+d)$$

$$2\sin(30+a)\sin(10+c)\,cos10 = sinb\sin(20+d) \qquad \text{(I)}$$



$$sin30sin10\sin(20+d)=\sin(a+b)\sin(10+c)\,sinsin20$$

$$sin30sin10\sin(20+d)=\sin(a+b)\sin(10+c)\,sin2sin10cos10$$

$$\frac{1}{2}\sin(20+d)=2\sin(a+b)\sin(10+c)\,cos10$$

$$\sin(20+d)=4\sin(a+b)\sin(10+c)\,cos10 \qquad \text{(II)}$$

Buradaki sin(20 + d) değeri (I) de yerine yazılırsa

$$2\sin(30+a)\sin(10+c)\,cos10=sinb\,4\sin(a+b)\sin(10+c)\,cos10$$

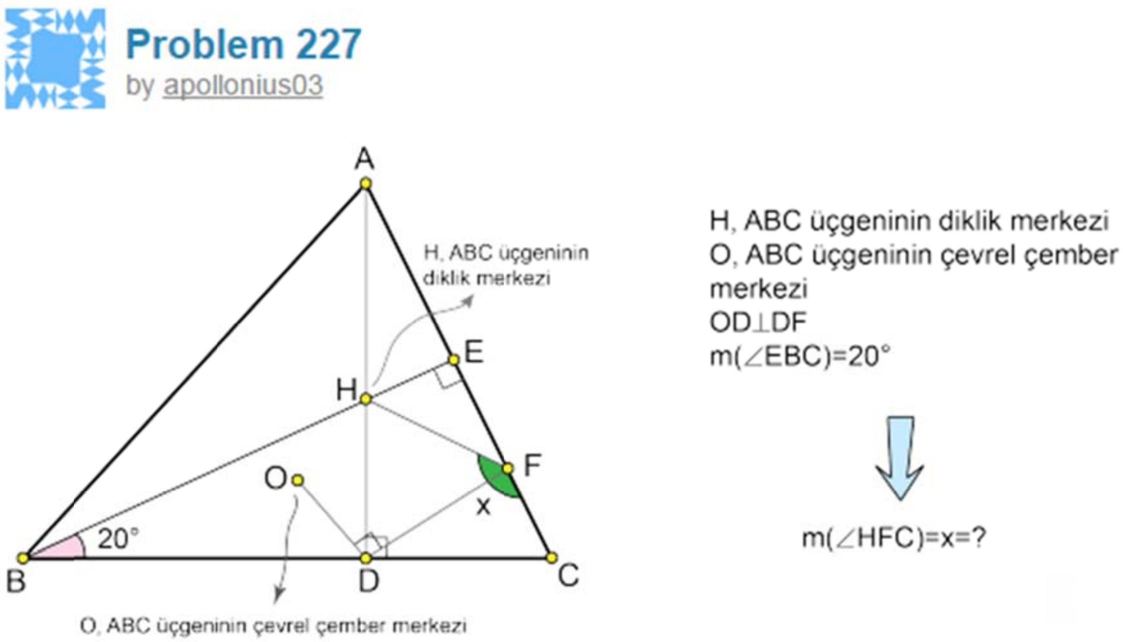
$$2\sin(30+a)=4sinbsin(a+b)$$

$$\frac{1}{2}\sin(30+a)=\sin(a+b=sinb\ densin30\sin(30+a)=\sin(a+b)\,sinb$$

$$cosa-coa(60+a)=cosa-coa(2b+a)$$

$$60+a=2b+a\ dan\ b=30\ olur.$$

ABF üçgeninde x + b + 10 =18 olduğundan x = 140 olarak bulunur.

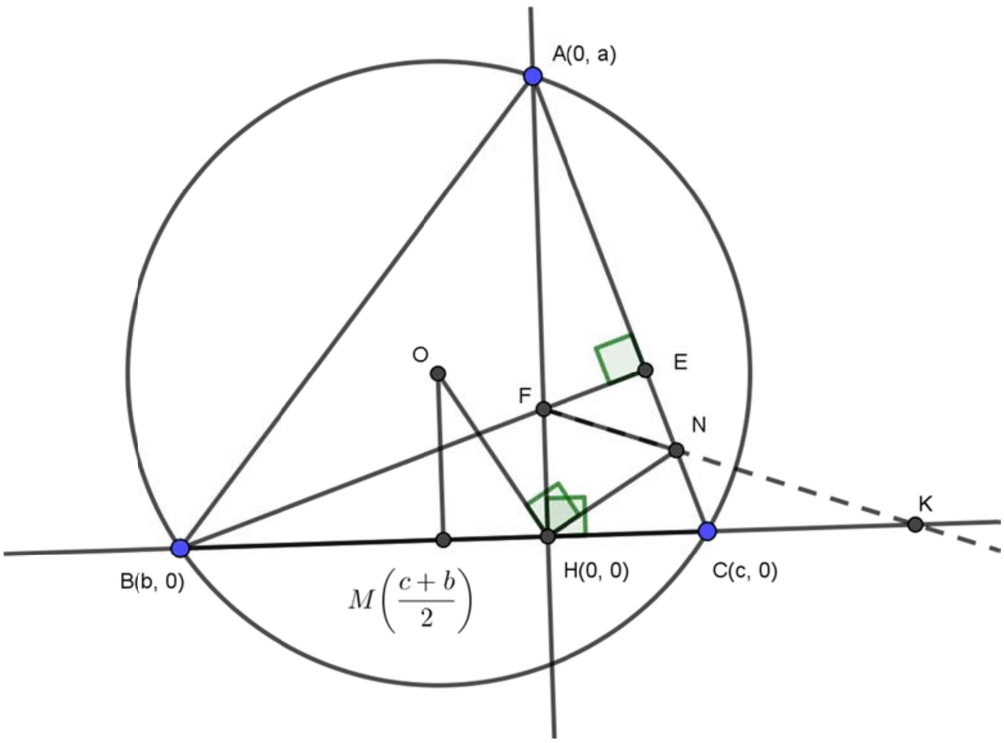


Çözüm:

Önce genel bir ispat:

Özellik:

ABC üçgeninde O çevrel çemberin merkezi, F diklik merkezi olsun. H ve E dikme ayakları. [OH]⊥[HN] olmak üzere [FN∩BC={K} ise FBK üçgeni ikizkenardır.



İspat:

İspatı Analitik olarak yapacağız. Şekildeki gibi H(0, 0), A(0, a), B(b, 0) ve C(c, 0) olacak şekilde dik koordinat sistemine yerleştirilirse [BC] nin orta noktası $M\left(\frac{b+c}{2},0\right)$ olur.

AC doğrusunun eğimi $-\frac{a}{c}$ ve denklemi $y=-\frac{a}{c}(x-c)=-\frac{a}{c}x+a$ olur.

F noktası diklik merkezidie. |AH|=a, |HC|=c ve |BH|= – b olduğundan $|FH|\cdot|AH|=|BH|\cdot|HC|$ olduğundan $|FH|=-\frac{bc}{a}$ yani $F\left(0,-\frac{bc}{a}\right)$ olur.

O noktasının koordinatlarını bulmak için Kenarların orta dikmelerinin kesim noktasının bulunması gerekir. [AC] nın orta noktası $\left(\frac{c}{2},\frac{a}{2}\right)$ ve bu noktadan [AC] na çizilen dikmenin denklemi

$y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}\left(x-\frac{c}{2}\right)$ dir bu doğru ile [BC] nın orta dikmesi $x=\frac{b+c}{2}$ doğrusunun kesişme noktasının ordinatı $y=\frac{c}{a}\left(\frac{b+c}{2}-\frac{c}{2}\right)+\frac{a}{2}=\frac{a^2+bc}{2a}$ dan $O\left(\frac{b+c}{2},\frac{a^2+bc}{2a}\right)$ noktasıdır.

Buna göre OH doğrusunun eğimi $\dfrac{\frac{a^2+bc}{2a}}{\frac{b+c}{2}}=\frac{a^2+bc}{a(b+c)}$ olur. H noktasından OH doğrusuna çizilen dik doğrunun denklemi $y=-\frac{a(b+c)}{a^2+bc}x$ olur. Bu doğru ile AC doğrusunun kesişme noktası

$-\frac{a}{c}x+a=-\frac{a(b+c)}{a^2+bc}$ den $x\left(\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2+bc}\right)=1$ olur. Düzenlenirse

$x\left(\frac{a^2+bc-bc-c^2}{c(a^2+bc)}\right)=1$ den $x=\frac{a^2c+bc^2}{a^2-c^2}$ ve

$y\_-\frac{a}{c}\cdot\frac{c(a^2+bc)}{a^2-c^2}+a=\frac{-a^3-abc+a^3-ac^2}{a^2-c^2}=\frac{-ac(b+c)}{a^2-c^2}$ olur. Yani

$N\left(\frac{a^2c+bc^2}{a^2-c^2},\frac{-ac(b+c)}{a^2-c^2}\right)$ olur.

FB doğrusunun x ekseni ile yaptığı açımım ölçüsü α, olsun $\tan\alpha=\frac{|FH|}{|BH|}=\dfrac{-\frac{bc}{a}}{-b}=\frac{c}{a}$ olur.

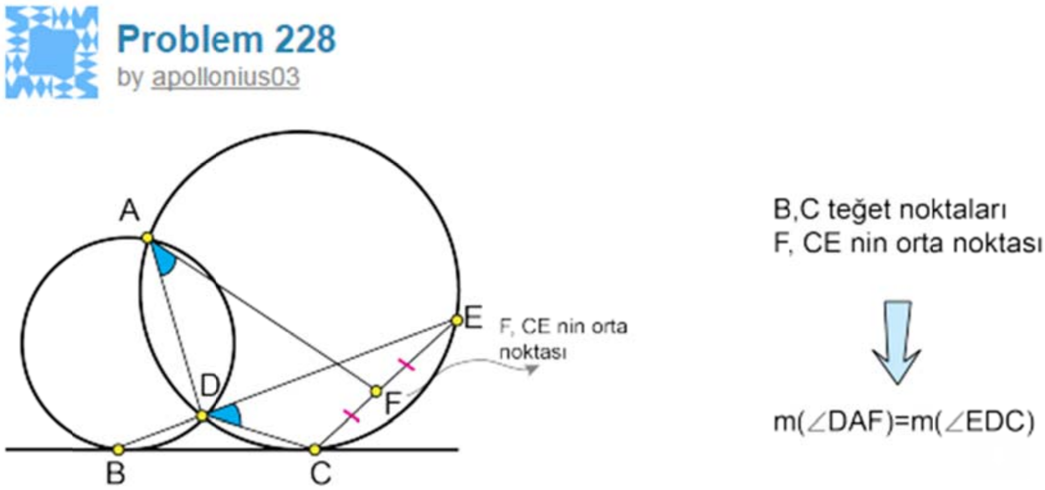
FN doğrusun x ekseni ile yaptığı açının ölçüsü β olsun

$$\tan\beta=\frac{\dfrac{-ac(b+c)}{a^2-c^2}-\left(-\dfrac{bc}{a}\right)}{\dfrac{a^2c+bc^2}{a^2-c^2}-0}=\frac{\dfrac{-a^2bc-a^2c^2+a^2bc-bc^3}{a(a^2-c^2)}}{\dfrac{c(a^2+bc)}{a^2-c^2}}=\frac{-c^2\left(a^2+bc\right)}{ac\left(a^2+bc\right)}=-\frac{c}{a}$$ olur. Yani α ile β bütünlerdir. FBK üçgeninde β, K köşesindeki dış açının ölçüsüdür. Buna göre aynı köşede iç açının ölçüsü α olup m(FBK)=m(FKB olur ki nu da FBK üçheninin ikizkenar olması demektir.

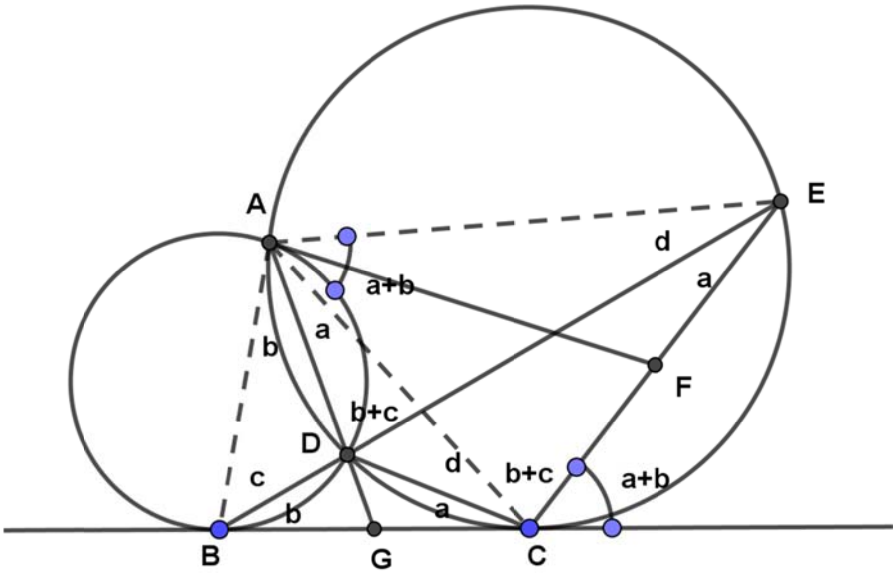
Hatırlatma: Bir doğrunun eğimi x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantıdır.

Bu nedenle FN doğrusunun eğimi FBK üçgeninin K köşesindeki dış açının tanjantı olur.

Soruda verilen bilgilere göre oluşturulacak HBK üçgeninde m(HKB)=20, m(CFK)=50 ve x=130 olur.



Çözüm:



Şekilde m(DCB)=a, m(DBC)=b, m(ABE)=c, diyelim. Küçük çemberde aynı yayı gördüklerinden m(BAG)=m(DBC)=b ve m(ABC)=b+c ve ABD üçgeninde dış açı olduğu içiin m(ADE)=b+c olur. Büyük çemberde aynı yayı gördüklerinden m(ADE)=m(ACE)=b+c olur.

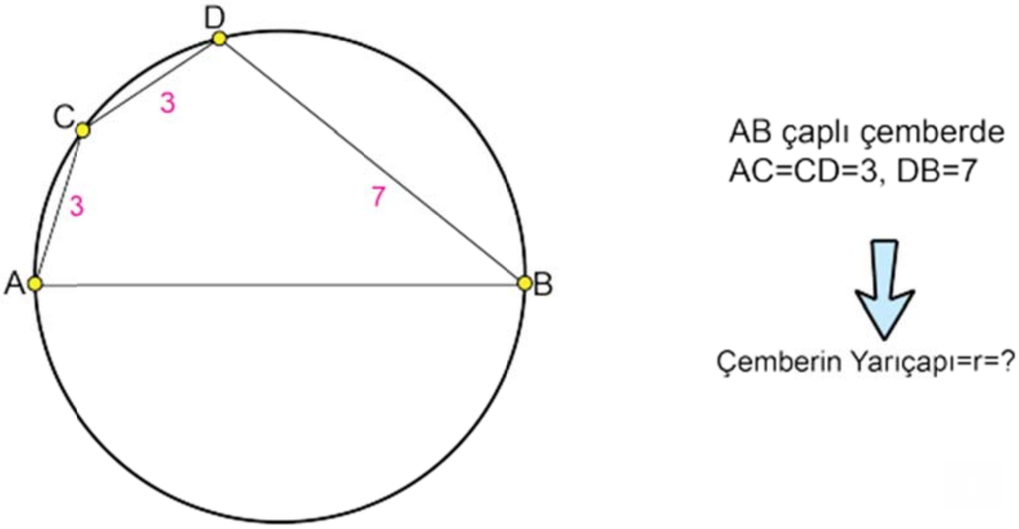
Büyük çemberde m(AED)=d dersek aynı yayı gördüklerinden m(ACD)=d, m(AEC)=a+d, m(ACB)=a+d olur. ABC üçgeninde m(BAC)=a+b olur. Aynı yayı gördüklerinden m(EDC)=m(EAC)=a+b dir. Buna göre ABC ile ACE üçgenleri AA benzerlik kuarlına göre benzerdir.

Çemberlere göre G noktasının kuvveti uygulanırsa |GB|=|GC olur. Yani ABC üçgeninde [AG] kenarortay ve ACE üçgeninde [AF] kenarortay olduğundan ABG ile ACF üçgenleri KAK benzerlik kuralına göre benzerdir. Bu benzerlikten m(BAG)=m(CAF)=b olur ve

$$m(DAF) = m(DAC) + m(CAF) = a + b$$

Bundan dolayı $m(DAF) = m(CDE) = a + b$ olarak bulunur.

Problem 229
by apollonius03



m(ABD)=α denirse m(ACD)=180 – α dır. $|AD| = x\ ve\ |AB| = r$ diyelim ve ADC üçgeninde kosinüs kuralı uygulayalım

$$x^2 = 9 + 9 - 2.9\cos(180 - \alpha) = 18 + 18cos\alpha$$

olur. Öte yandan ADC de $x^2 = r^2 - 49$ ve $\cos\alpha = \dfrac{7}{r}$ olduğundan yerine yazılırsa

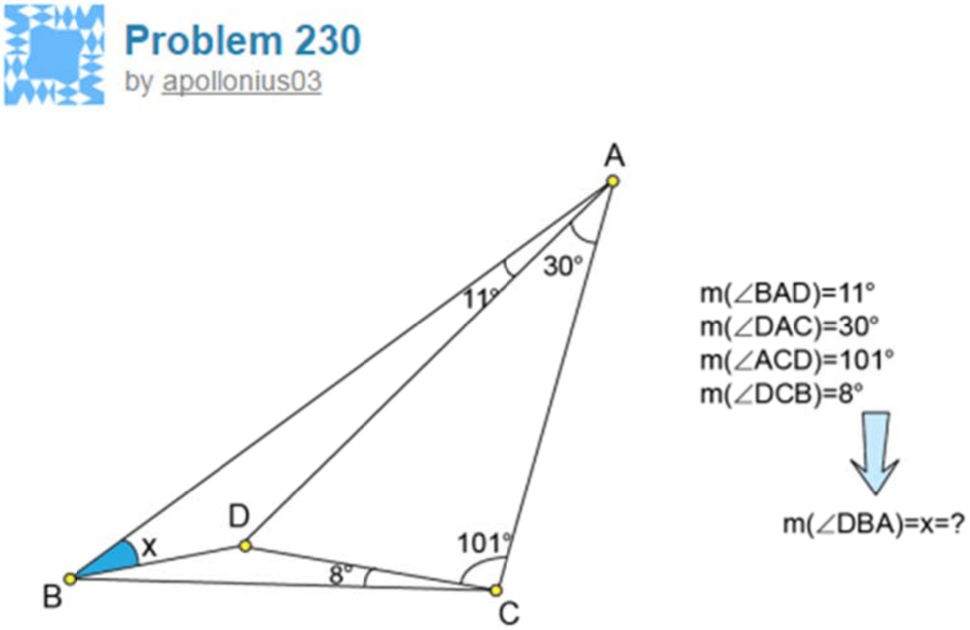
$$r^2 - 49 = 18 + 18 \cdot \frac{7}{r}$$

Düzenlenirse

$$r^3 - 67r - 18.7 = 0$$

$$r^3 - 67r - 14.9 = 0$$

olarak yazılır. Bu denklemin son teriminin çarpanlarından 9 denklemi sağlar. Yani $r = 9$ olarak bulunur.



Trigo Ceva uygulanırsa sin30 sinx sin8=sin11 sin(30 – x) sin101 düzenlenirse

$$\frac{1}{2}\, sinx\ sin8 = \sin(30 - x)\, sin11cos11$$

$$sinx\ sin8 = \sin(30 - x)\, 2sin11cos11$$

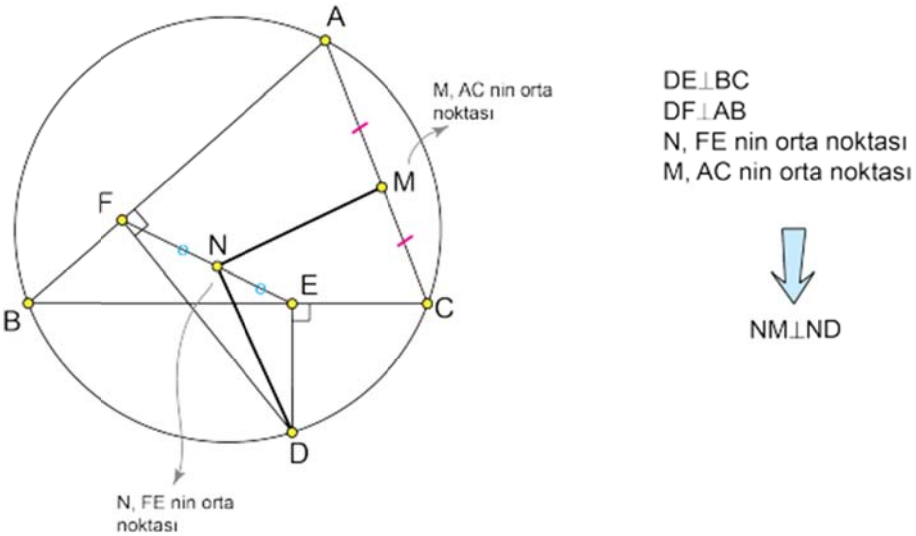
$$sinx\ sin8 = \sin(30 - x)\, sin22$$

Ters dönüşüm uygulanırsa

$$\cos(x - 8) - \cos(x48) = cps(x - 8) - os(52 - x)$$

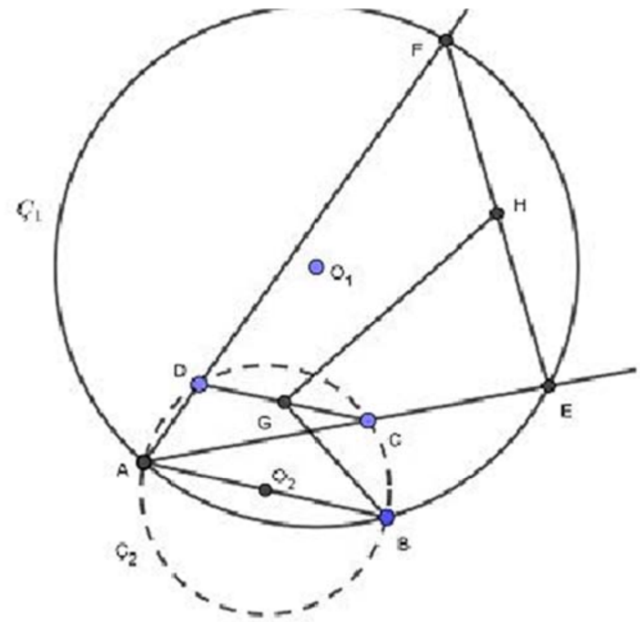
Olur. Buradan x + 8 = 52 – x den 2x = 44 ve x = 22 olur.

Problem 231



Çözüm:

Soru:

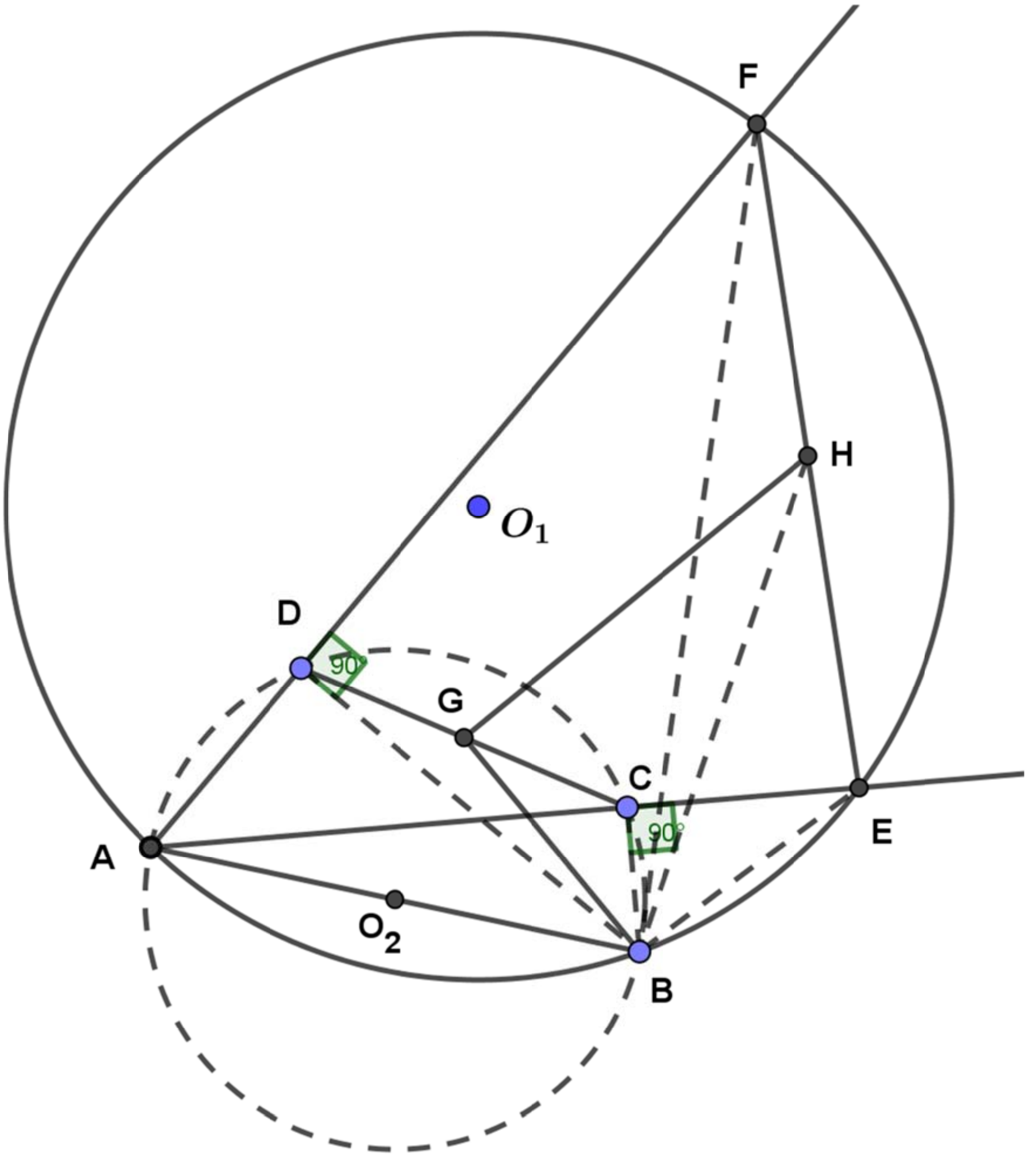


$Ç_1$ çembernin merkezi O_1, $Ç_2$ çemberinin merkezi O_2 dir. A, D ve F doğrusal, A, C ve E doğrusaldır. [DC], $Ç_2$ çemberinde bir kiriş ve G, [DC] nın orta noktasıdır. [EF], $Ç_1$ çemberinin bir kirişi ve H, [EF[nın orta noktasıdır. Buna göre m(BGH)=x kaç derecedir.

Bir FAE üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde bir B noktası alalım. B noktasından üçgenin hethangi iki kenarına çizilen dikmelerin kenarları kestiği noktalar D ve C olsun. [DC] nın orta noktası G ve üçgenin diğer kenarının orta noktası H olsum. BGH açısı dik açıdır.

Çözüm:

1. Durum.
   B noktası A açısının dış bölgesinde olsun.



O_2 merkezli çemberde [BD] ve [BC] çizilirse çapı gören çevre açılar olduklarından m(ADB)=90 ve m(ACB)=90 olur. Yine O_2 merkezli çemberde BC yayını gördüklerinden m(BDC)=m(BAC) olur. Ayrıca CD yayını gördüklerinden m(DAC)=m(DBC) olur.

O_1 merkezli çemberde BE yayını gördüklerinden m(BAE)=m(BFE) olur. Yani m(BAC)=m(BAE)=m(BDC)=m(BFE) olur. Yine aynı çemberde EF yayını gördüklerinden m(EAF)=m(EBF) yani m(CAD)=m(EAF)=m(DBC)=m(EBF) olur. Bu durumda DBC üçgeni ile EBF üçgenleri AA benzerlik kuralı gereğince benzerdirler. Benzer üçgenlerin karşılıklı uzunlukları orantılı ve karşılıklı açıları eş olduğundan m(DBG)=m(FBH), m(GBC)=m(HBE) olur. Ayrıca $\frac{|GB|}{|HB|}=\frac{|CB|}{|EB|}$ orantısı yazılır.

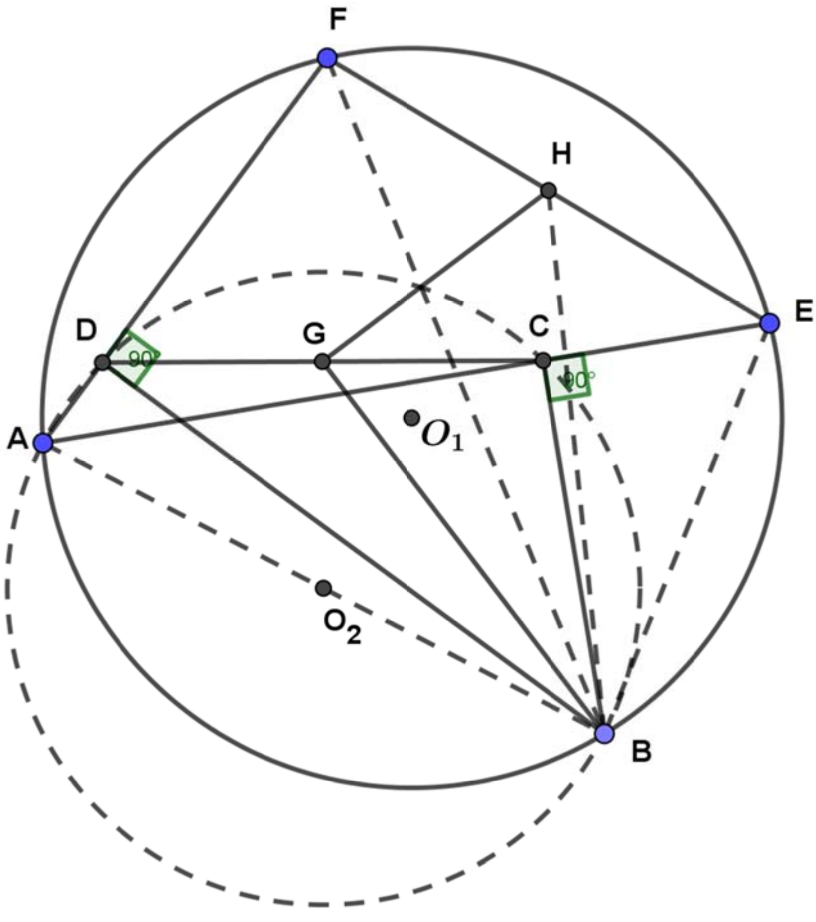
CBF açısının ölçüsünü x ve m(DBG)=m(FBH)=a, m(GBC)=m(HBE)=b diyelim.

CBE üçgeninde m(CBE)=m(CBF)+m(FBH)+m(m(HBE)= x + a + b

GBH üçgeninde m(GBH)=m(GBC)+m(CBF)+m(FBH)= b + x + a olur. Bu durumda m(CBE)=m(GBH) olur. $\frac{|GB|}{|HB|}=\frac{|CB|}{|EB|}$ orantısından $\frac{|GB|}{|CB|}=\frac{|HB|}{|EB|}$ oratnıtı yazılır.

Yani GBH ile CBE üçgenlerinde m(GBH)=m(CBE) ve $\frac{|GB|}{|CB|}=\frac{|HB|}{|EB|}$ olduğundan Bu iki üçgen KAK benzerlik kuralına göre benzerdir. Benzer üçgenlerin karşılıklı açıları eş olduğundan m(BGH)=m(BCE)=90 olur. Yani BHG açısı dik açıdır.

C noktasının [BF] nın sağında olması durumu:



O_2 merkezli çemberde [BD] ve [BC] çizilirse çapı gören çevre açılar olduklarından m(ADB)=90 ve m(ACB)=90 olur. Yine O_2 merkezli çemberde BC yayını gördüklerinden m(BDC)=m(BAC) olur. Ayrıca CD yayını gördüklerinden m(DAC)=m(DBC) olur.

O_1 merkezli çemberde BE yayını gördüklerinden m(BAE)=m(BFE) olur. Yani m(BAC)=m(BAE)=m(BDC)=m(BFE) olur. Yine aynı çemberde EF yayını gördüklerinden m(EAF)=m(EBF) yani m(CAD)=m(EAF)=m(DBC)=m(EBF) olur. Bu durumda DBC üçgeni ile EBF üçgenleri AA benzerlik kuralı gereğince benzerdirler. Benzer üçgenlerin karşılıklı uzunlukları orantılı ve karşılıklı açıları eş olduğundan m(DBG)=m(FBH), m(GBC)=m(HBE) olur. Ayrıca $\frac{|GB|}{|HB|}=\frac{|CB|}{|EB|}$ orantısı yazılır.

GBF açısının ölçüsünü x ve m(DBG)=m(FBH)=a, m(GBC)=m(HBE)=b diyelim.

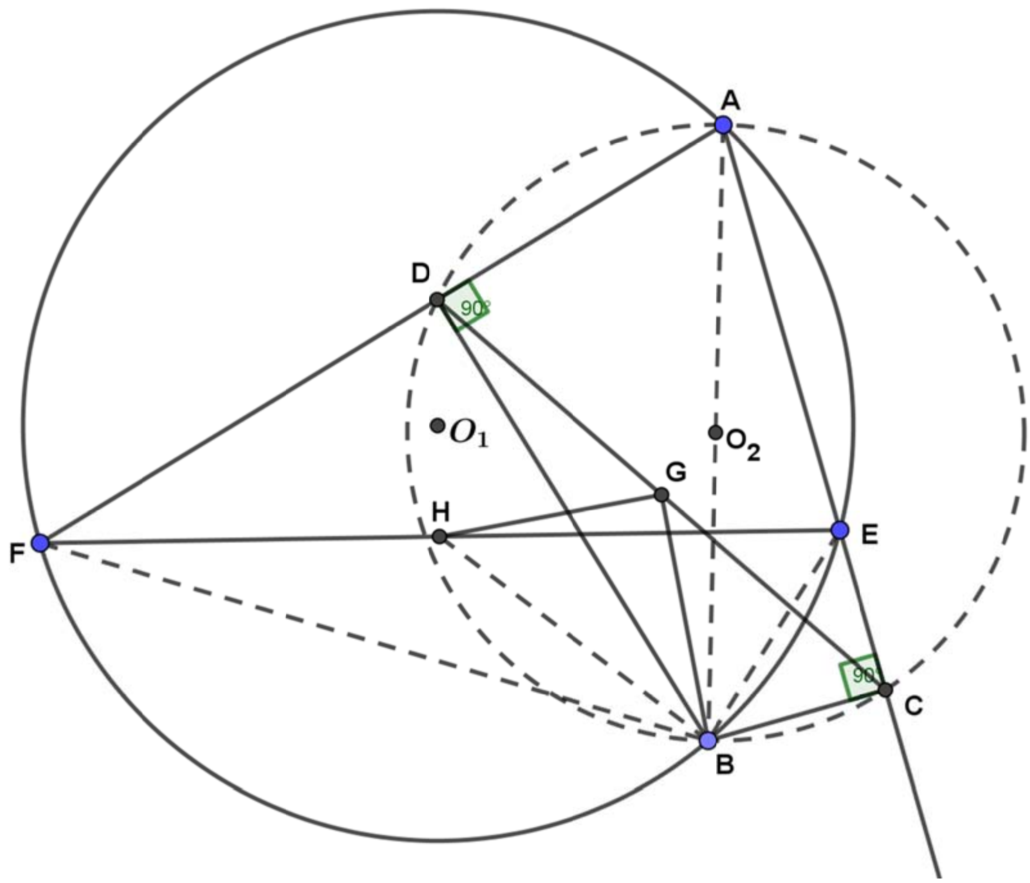
CBE üçgeninde m(CBE)=m(GBF)+m(FBH)+m(m(HBE) – m(GBC)== x + a + b – b =a + x

GBH üçgeninde m(GBH)=m(GBF)+m(FBH)=a + x olur.

Bu durumda m(CBE)=m(GBH) olur. $\frac{|GB|}{|HB|}=\frac{|CB|}{|EB|}$ orantısından $\frac{|GB|}{|CB|}=\frac{|HB|}{|EB|}$ oratnıtı yazılır.

Yani GBH ile CBE üçgenlerinde m(GBH)=m(CBE) ve $\frac{|GB|}{|CB|}=\frac{|HB|}{|EB|}$ olduğundan Bu iki üçgen KAK benzerlik kuralına göre benzerdir. Benzer üçgenlerin karşılıklı açıları eş olduğundan m(BGH)=m(BCE)=90 olur. Yani BHG açısı dik açıdır.

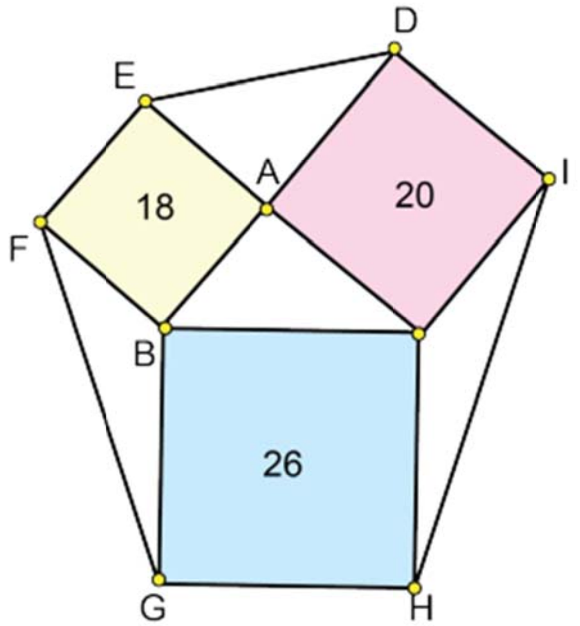
2. Durum:
   B noktası A açısının iç bölgesinde olsun.



O_1 merkezli çemberde BE yayını gördüklerinden m(BFE)=m(BAE) olur. O_2 merkezli çemberde BC yayını gördüklerinden m(BAC)=m(BDC) olur.
Bu nedenle m(BAE)=m(BAC)=m(BDC)=m(BFE) olur.
O_1 merkezli çemberde AFBE kirişler dörtgeninde m(FAE)+m(FBE)=180 dir.
O_2 merkezli çemberde ADBC kirişler dörtgeninde m(DAC)+m(DBC)=180 olur.
Bu nedenle m(DBC)=m(FBE) olur. Bu açı ölçülerin
N eşitliğinden ABC ile FBE üçgenleri AA benzerlik kuralı gereğince benzerdir. Benzer üçgenlerin karlılıklı açıları eş ve karşılıklı uzunlukları orantılı olduğundan m(FBH)=m(DBG), m(HBE)=m(GBC) ve
$\frac{|BH|}{|BG|}=\frac{|BE|}{|BC|}$ orantısı yazılır.

m(FBH)=m(DBG)=a, m(HBE)=m(GBC)=b ve m(GBE)=x diyelim.
$m(EBC) = m(GBC) - m(GBE) = b - x$ olur.
$m(HBG) = m(HBE) - m(HBE) = b - x$ olur.
$\frac{|BH|}{|BG|}=\frac{|BE|}{|BC|}$ orantısından $\frac{|BH|}{|BE|}=\frac{|BG|}{|BC|}$ orantısı yazılır. Bu eşitliklerden HBG üçgeni ile EBC üçgeni
KAK benzerlik kuralı gereğince benzerdir. Benzer üçgenlein kareşılıklı açılarının ölçüleri eşit olacağından m(BGH)=m(BCE)=90 olur.

Problem 232:



ABFE, ADIC, BCHG alanları sırası ile 18,20 ve 26 br^2 olan kareler

Alan(DEFGHI)=?

Çözüm:

Karelerin kenarları a, b, c olsun. $a^2 = 26, b^2 = 20\ ve\ c^2 = 18$ olsun.$|BC| = a = \sqrt{26}$, $|AC| = b = 2\sqrt{5}$ ve $|AB| = 3\sqrt{2}$ olur. $\sin(108 - \alpha) = sin\alpha$ olduğumdan FBG, EAD, ICH ve ABC üçgenlerinin alanları eşittir. Şöyle ki; m(ABC)=α dersek m(FBG)=180 – α olur.

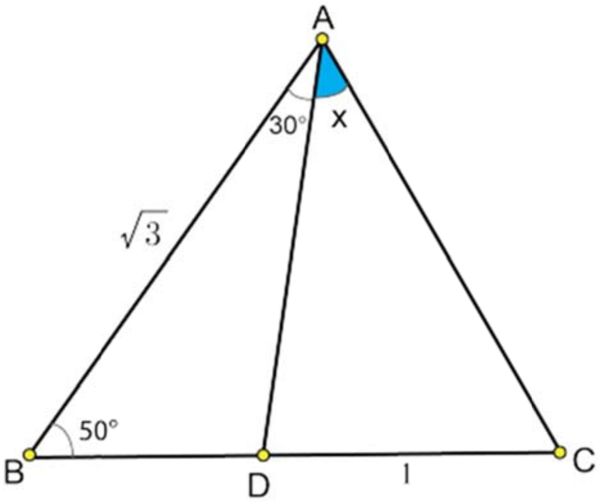
$A(ABC) = \dfrac{1}{2} ac \sin\alpha$ ve $A(FBG) = \dfrac{1}{2} ac \sin(180 - \alpha)$ olduğundan eşittir. Benzer şekilde diğer eşitlikler de gösterilebilir. Bu durumda önemli olan ABC üçgeninin alanının hesaplanmasıdır.

BAC açısının kosinüsünü hesaplayalım $\cos(BAC) = \dfrac{18 + 20 - 26}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{15}$ Bundan faydalanarak $\sin(BAC) = \sqrt{1 - \dfrac{10}{225}} = \sqrt{\dfrac{43}{45}} = \dfrac{\sqrt{43}}{3\sqrt{5}}$ olur.

Buna göre $A(ABC) = \dfrac{1}{2} bc \sin(BAC) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{43}}{3\sqrt{5}} = \sqrt{86}$ olur.

İstenen alan = $64 + 4\sqrt{86}$ olur.

Problem 233:



AB= $\sqrt{3}$
DC=1 br.
m(∠ABC)=50°
m(∠BAD)=30°

m(∠DAC)=x=?

Çözüm:

|AD|=a diyelim. ABD üçgeninde sinüs kuralı $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 80}=\dfrac{a}{\sin 50}$ ve ADC üçgeninde sinüs kuralı $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{a}{\sin(80+x)}$ yazılır. Taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2\sin 40\cos 40}=\dfrac{\sin(80+x)}{\cos 40}$ olur. Düzenlenirse $sin60sinx=\sin(80+x)\,sin40$ eşitliği yazılır.

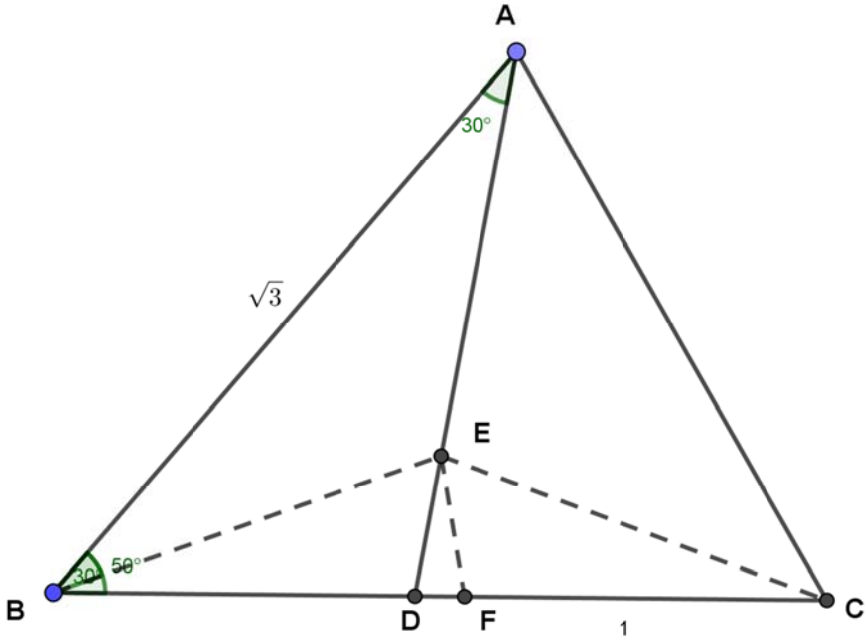
$$\cos(60-x)-\cos(60+x)=\cos(40+x)-\cos(120+x)$$

$$cos860-x)+\cos(120-x)=\cos(40+x)+\cos(60-x)$$

$$120-x=40+x\ den\ 2x=80\ ve\ x=40$$

Olur.

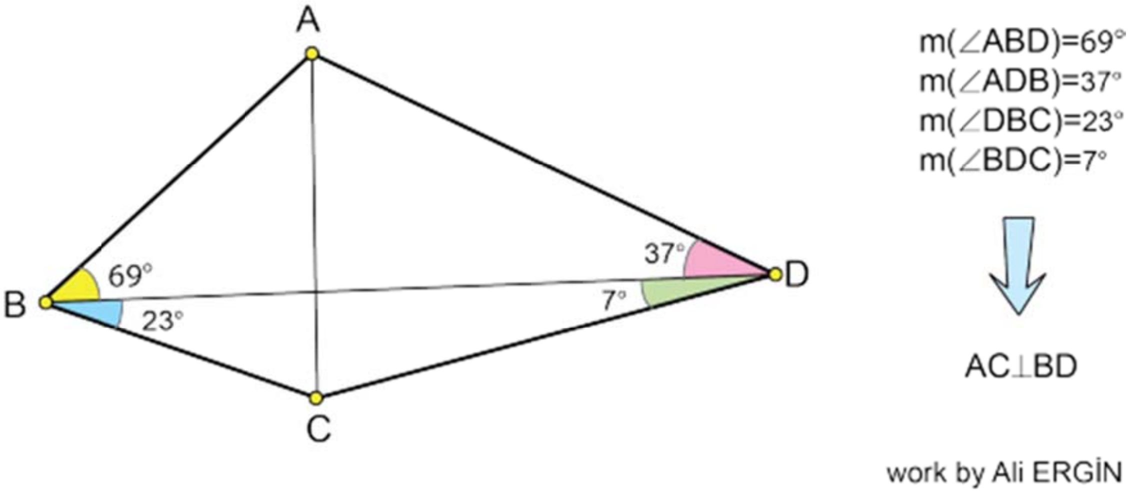
2. Çözüm:



[AB] üzerine m(ABE)=30 olacak şekilde ABE üçgeni oluşturulursa 30-30-120 üçgeni ve |AE|=|BE|=1 olur.

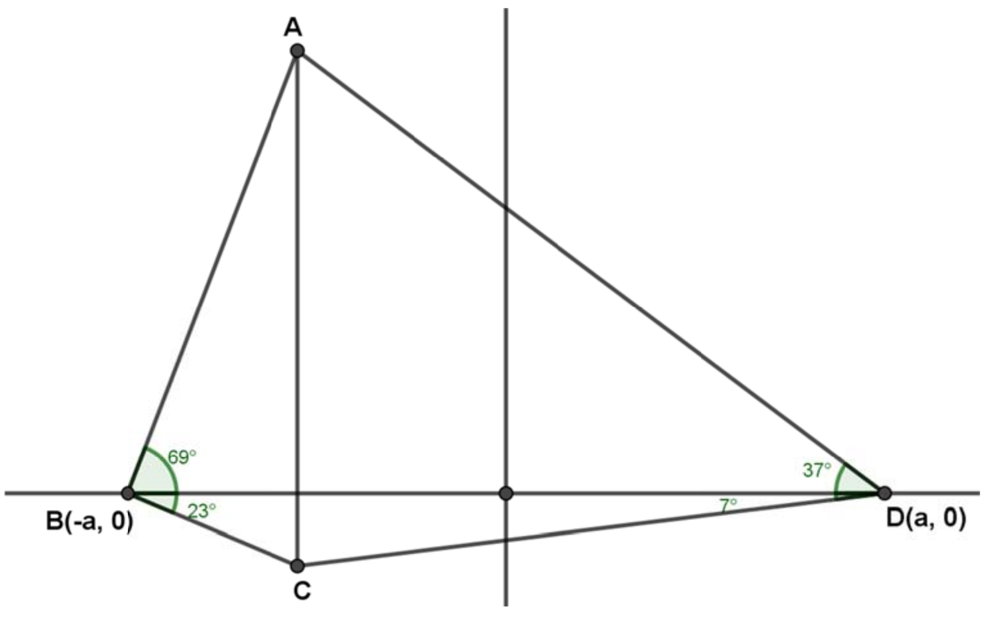
Ayrıca m(EBC)=20 olur. |BE|=|BF| olacak şekilde BEF üçgeni 20-80-80 üçgeni oluşturulursa EDF üçgeni de 20-80-80 üçgeni olur ve EDB ile EFC üçgenleri KAK eşlik kuralına göre eş olur Bu durumda m(ECD)=20, m(CED)=80 ve |CD|=|CE|=1 olur. Yani |CE|=|AE|=1 ve AEC üçgeninde m(EAC)=m(ECA)=x olup CED , AEC üçgeninde bir dış açı olduğundan 2x=80 ve x=40 olur.

Problem 234:



Çözüm:

[BD] nın orta noktası koordinat sisteminin merkezi olacak şekilde [BD] nı koordinat sisteminde x ekseni ile çaıştıralım.



A ve C noktalarının apsisleri aynı ise [AC] ile [BD] dik lur.

AB doğrusunun denklemi $y = tan69(x + a) = xtan69 + atan69$

AD doğrusunun denklemi $y = -tan37(x - a) = -xtan37 + atan37$

Bu iki doğrunun kesişme noktası $xtan69 + atan69 = -xtan23 + atan23$ eşitliğinden

$x = \dfrac{a(\tan 37 - \tan 69)}{\tan 69 + \tan 37} = \dfrac{-a\sin 32}{\sin 106} = \dfrac{-2a\sin 16\cos 16}{\cos 16} = -2a\sin 16$ olur.

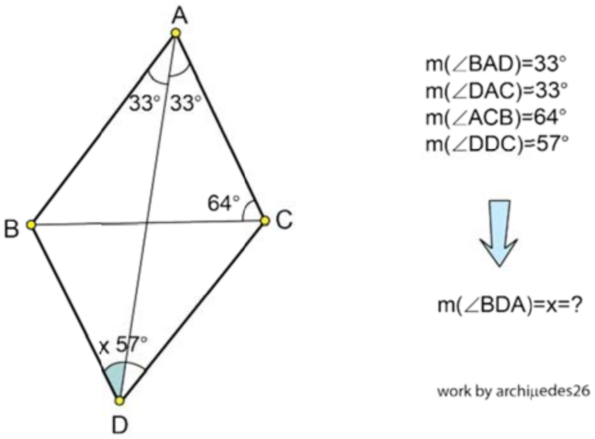
Yani A noktasının apsisi $-2asin16$ dır.

BC doğrusunun denklemi $y = -tan23(x + a) = -xtan23 - atan23$

DC doğrusunun denklemi $y = tan7(x - a) = xtan7 - atan7$ olur. Bu iki doğrunun kesişme noktası $-xtan23 - atan23 = xtan7 - atan7$ eşitliğinden

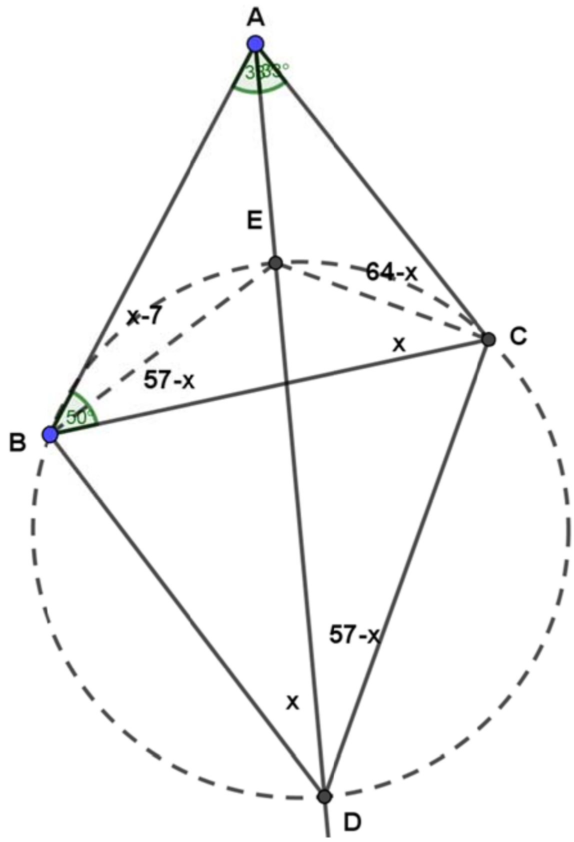
$x = \frac{a(\tan 7 - \tan 23)}{\tan 23 + \tan 7} = \frac{-a \sin 16}{\sin 30} = -2a \sin 16$ olur. Yani C noktasının apsisi de $-2asin16$ dır. Bu durumda A ve C noktalarının apsisi aynı olduğundan bu iki nokta $x = -2asin16$ doğrusu üzerindedir. Yai [AC] doğru parçası $x = -2asin16$ doğrusunun alt kümesi olpu Ox aksenine diktir. Yani [AC] ile [BD] dik olur.

Problem 235:



Çözüm:

BDC üçgeninin çevrel çemberi çizilir ve açılar şekildeki gibi yazılarakABC üçgeninde Trigo-Ceva uygulanırsa

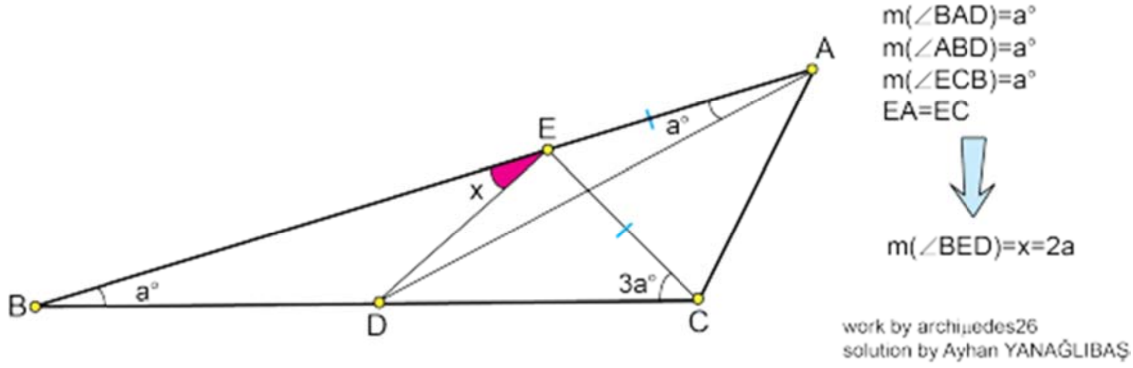


$$sin33 \sin(x-7)\sin(x = sin33si(57-x)\sin(64-x)$$

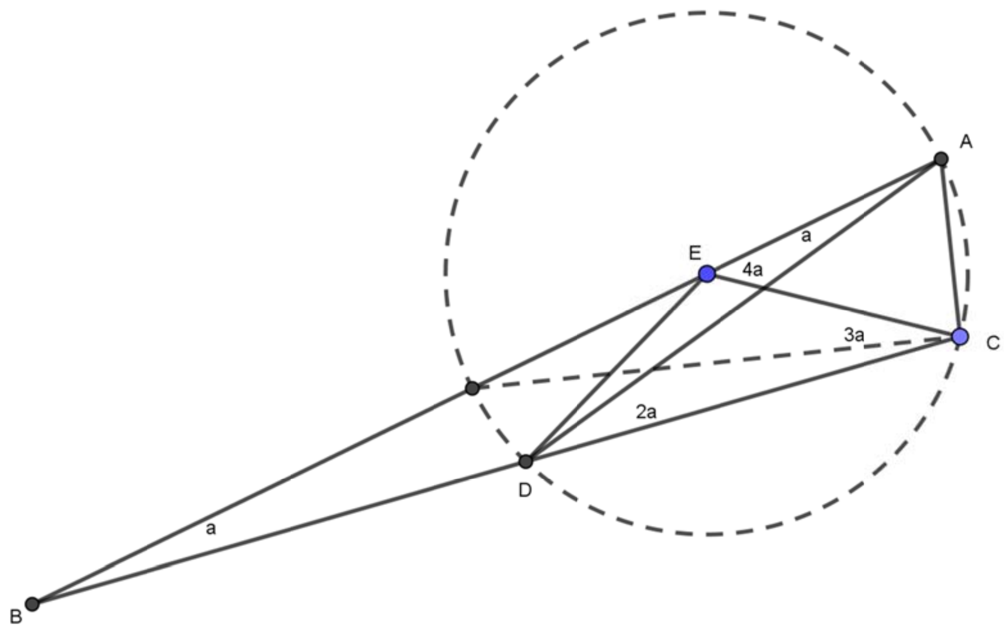
$$xos7-\cos(2x-7) = cos7-\cos(121-2x)$$

$2x-7 = 121-2x$ den $4x = 128\ ve\ x = 32\ olur$

Problem 236:

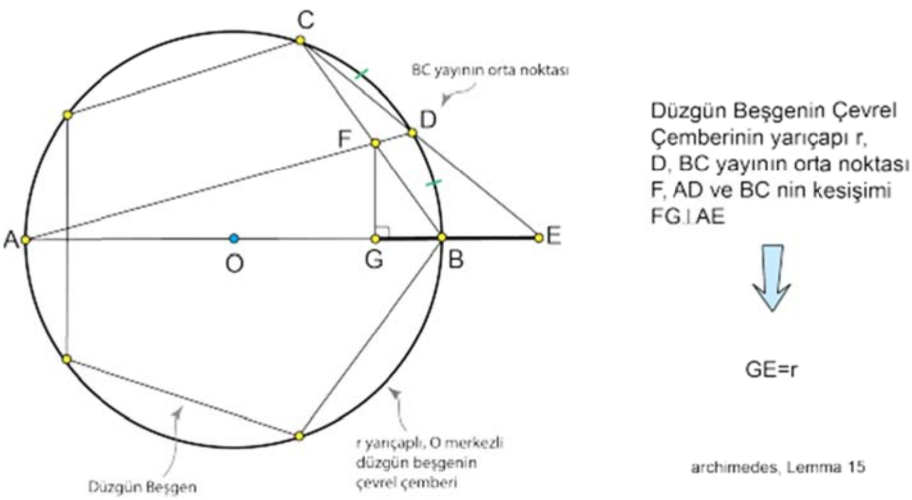


Çözüm:

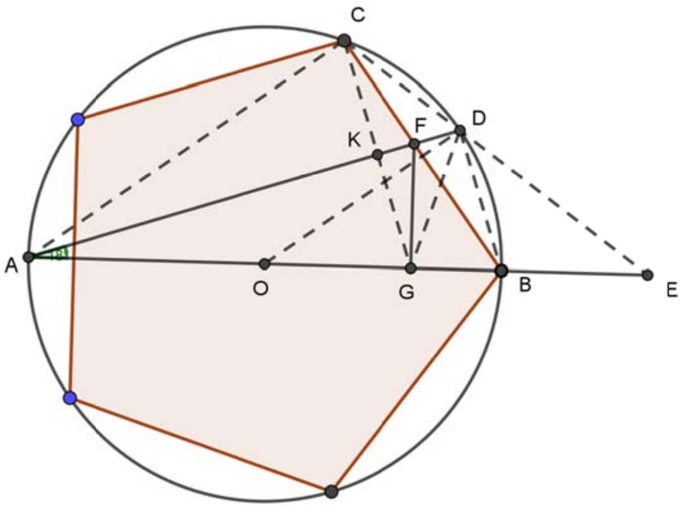


Açılar yazılırsa m(AEC)=4a olur. E merkezli çemberin [BC] nı kestiği nokta D' olsun.m(AD'C)=2a olur. Aynı zamanda verilenlerden dolayı m(ADC)=2a olduğundan D=D' olup A, D ve C noktaları E merkezli çember üzerindedir.Yani m(EDA)=m(EAD)=a ve x, AED üçgeninde dış açı olduğundan x= 2a olur.

Problem 237:



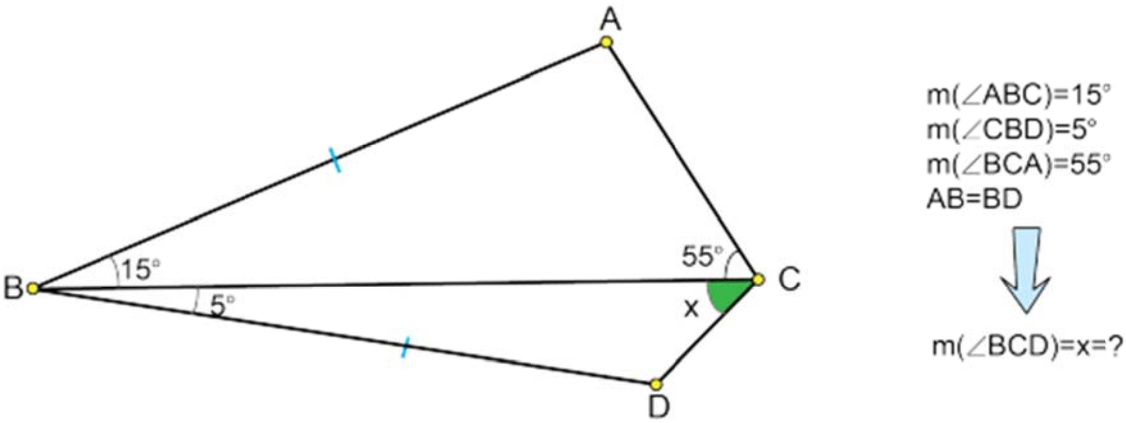
Çözüm:



[AC] çizilirse m(CAD)=m(DAE)=18, m(ACB)=90 olur. Budurumda [AD] CAB açısının açıortayı olup |FG|=|FC| ve |AC|=|AB| olur. Budurmda [AD], [BC] nın orta dikmesidir. Yani D noktası [BC] nın orta dikmesi üzerinde olduğundan |DC|=|DG| olur. Soruda verilen bilgiye göre |DC|=|DB| olduğundan |DB|=|DG| olur.

Yine soruda verilen bilgiden $m(\widehat{BD} = 36\ ve\ m(\widehat{CA}) = 108)$ olduğundan m(DEA)=36 olur. $m(BCD) = m(CBD) = 18$ olduğundan m(BDE)=36 ve m(DBO=72 olur. DGB üçgeni ikizkenar olduğundan m(DGE)=72 olur. DOE açısı da merkez açı olup 36 derece olduğundan |DO|=|DE|ve ayrıca m(GDB)=36 olduğundan m(GDE)=72 olur. Yani EDG ile ODB üçgenleri KAK eşlik kuralına göre eştir. Buna göre |OB|=|EG|=düzgün beşgenin yaroçapı olur.

Problem 238:



Çözüm:

|BA|=|BD|a ve |BC|=b diyelim.

BAC üçgeninde sinüs kuralı uygulanırsa
$\frac{a}{\sin 55}=\frac{b}{\sin 70}$ *den* $\frac{a}{\cos 35}=\frac{b}{2\sin 35\cos 35}$ *ve* $b=2a\sin 35$ olur.

BDC çgeninde sinüs kuralı uygulanırsa
$\frac{a}{\sin x}=\frac{b}{\sin(x+5)}$ *den* $\frac{a}{\sin x}=\frac{2a\sin 35}{\sin(x+5)}$ *ve* $\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin 35}{\frac{1}{2}\sin(x+5)}$

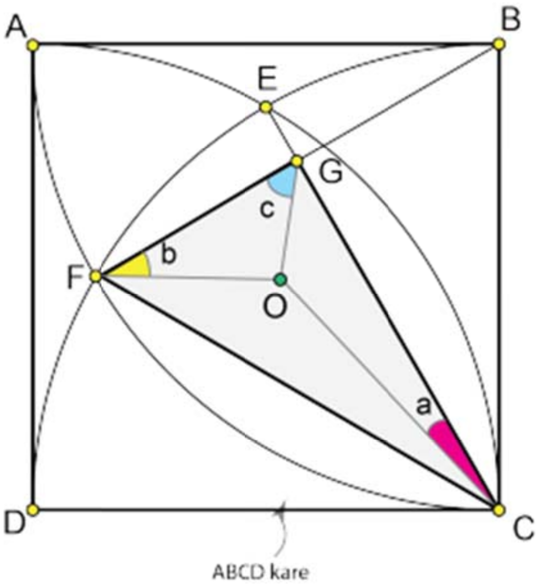
$$sinxsin35 = sin30\sin(x+5)$$

$$\frac{1}{2}[\cos(x-35)-\cos(x+35)] = \frac{1}{2}[\cos(25-x)-\cos(35+x)]$$

$$x-35 = 25-x \;\; den \;\; 2x = 60 \;\; ve \; x = 30$$

Olur.

Problem 239:



ABCD, O merkezli kare
E,G; B ve C merkezli çemberlerin kesim noktası
G, FB ve EC nin kesişim noktası,

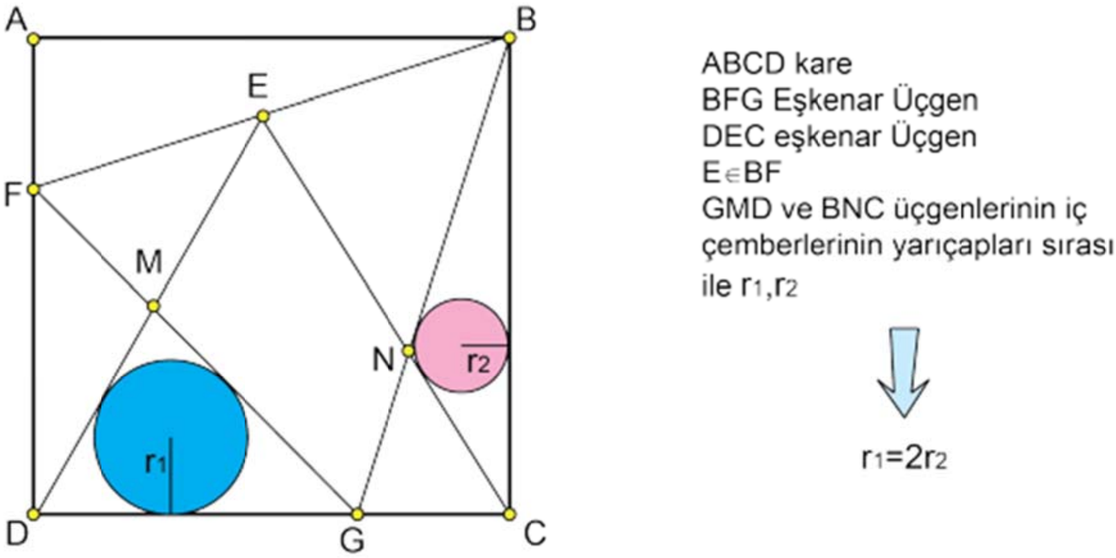
a=15°
b=30°
c=45°
O, FGC üçgeninin iç merkezi

Çözüm:

FBC eşkenar üçgendir. Aynı zamanda EDC üçgeni de eşkenardır. Bu nedenle m(DCF)=m(BCE)=30 olduğundan m(GCF)=30 olur. E noktası BF yayının orta noktasıdır ve m(CGF)=90 ve m(CFG)=60 olur. O noktası karenin merkezi olduğundan OF//CD ve m(BCO)=45 dir. Buna göre m(GCO)=a=45-30=15 olur.

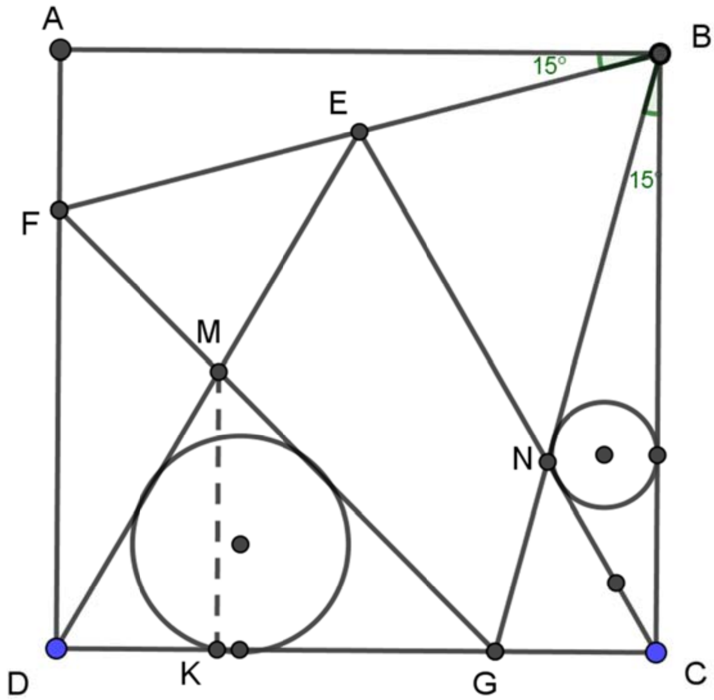
Aynı zamanda m(OFB)=m(FBA)=m(FCD)=b=30 olur. Yan OF ile OC, GFC üçgeninde iç açıortaylardır. O halde GO da iç açıortay olup m(FGO)=c=45 olur.

Problem 240:



Çözüm:

Verilenlere göre BAF ile BCG üçgenleri eş olup m(ABF)=m(CBG)=15 ve m(BFA)=m(BGC)=75 olur. BFG üçgeninde m(BGF)=60 olduğundan GDM üçgeninin iç açılarının ölçüleri m(MDG)=60, m(DGM)=45 ve m(DMG)=75 olur. BNC üçgeninin iç açılarının ölçüleri ise m(NBC)=15, m(NCB)=30 ve m(BNC)=135 olur.



[MK]⊥[DC] çizelim. |DK|=1 dersek | |$\sqrt{3}$ olur. $m(DGF)=45$ olduğundan

$|KG| = \sqrt{3}\ ve\ |GD| = |DF| = \sqrt{3} + 1$ olur. FDG dik üçgeninde $|FG| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ olur.

BGC dik üçgeninde |BG|=x dersek bu üçgen 15-75-90 üçgeni ve $|BG| = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$ olup hesaplanırsa x=1 olur. MDG ile GCN üçgenlerinin benzerliğinden

$\frac{|DG|}{|CN|} = \frac{|MD|}{|CG|}$ *den* $\frac{\sqrt{3}+1}{|CN|} = \frac{2}{1}$ *ve* $|CN| = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ olup benzerlik oranı 2 dir. Öte yandan karede

$|DC| = |BC| = 2 + \sqrt{3}$ dür. Ayrıca $|FG| = |BG| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ve $|GN| = \frac{|MG|}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ olur.

$|BN| = |BG| - |GN| = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}$ olarak hesaplanır.

$A(DGM) = \frac{\left(2+\sqrt{3}+1+\sqrt{6}\right)r}{2} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\sin 60}{2}$ *ve* $r_1 = \frac{\sqrt{3\left(\sqrt{3}+1\right)}}{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ olur.

$$A(BNC) = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \sqrt{3} + 2 + \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}}{2}\cdot r_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}{2}\ den\ r_2 = \frac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+6\sqrt{3}+4\sqrt{2}+10}$$

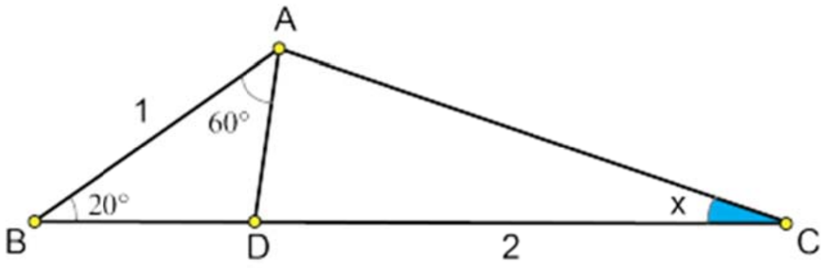
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\frac{2\sqrt{6}+6\sqrt{3}+4\sqrt{2}+10}{5+3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}+18\sqrt{3}+12\sqrt{2}+30+6\sqrt{2}+18+4\sqrt{6}+10\sqrt{3}}{15+9\sqrt{3}+5\sqrt{3}+9+5\sqrt{6}+9\sqrt{2}}$$

$$= \frac{10\sqrt{6}+28\sqrt{3}+18\sqrt{2}+48}{5\sqrt{6}+14\sqrt{3}+9\sqrt{2}+24} = 2$$

Olur ki bu $r_1 = 2\ r_2$ olduğunu gösterir.

Problem 241:

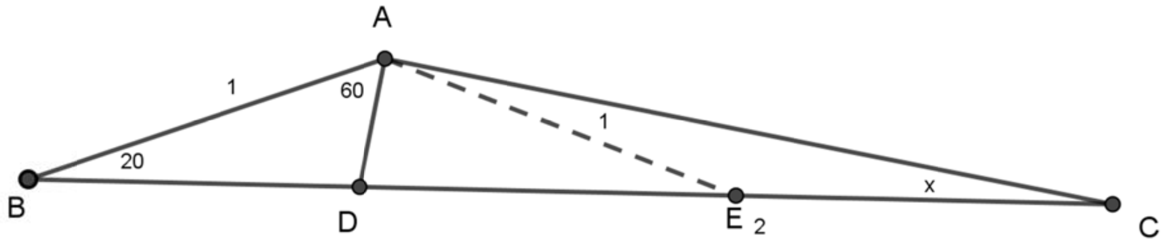


AB=1, DC=2,
A,D,C doğrusal
m(∠ABD)=20°
m(∠BAD)=60°

⇓

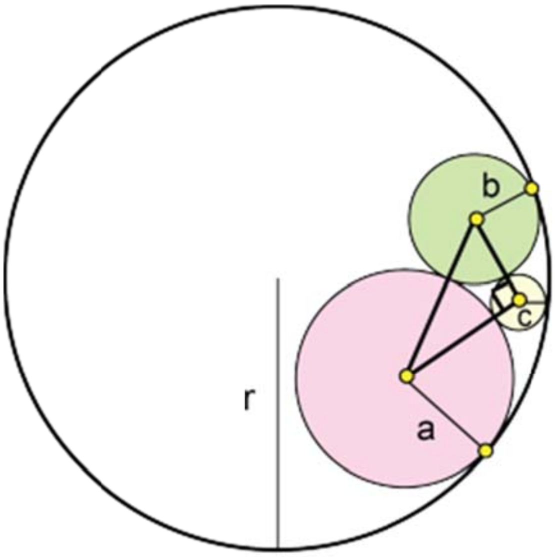
m(∠ACD)=x=?

Çözüm:



Önce ABE ikizkenar üçgeninini oluşturalım. Bu üçgende m(AEB)=20 olur. Bu durumda EAD üçgeni 20-80-80 üçgeni olur. Yani |EA|=|ED|=1 ve |EA|=|EC|=1 olur. Bu durumda m(EAC)=m(ECA)=x ve ACB, AEC üçgeninde dış açı olduğundan 2x=20 den x=10 olur.

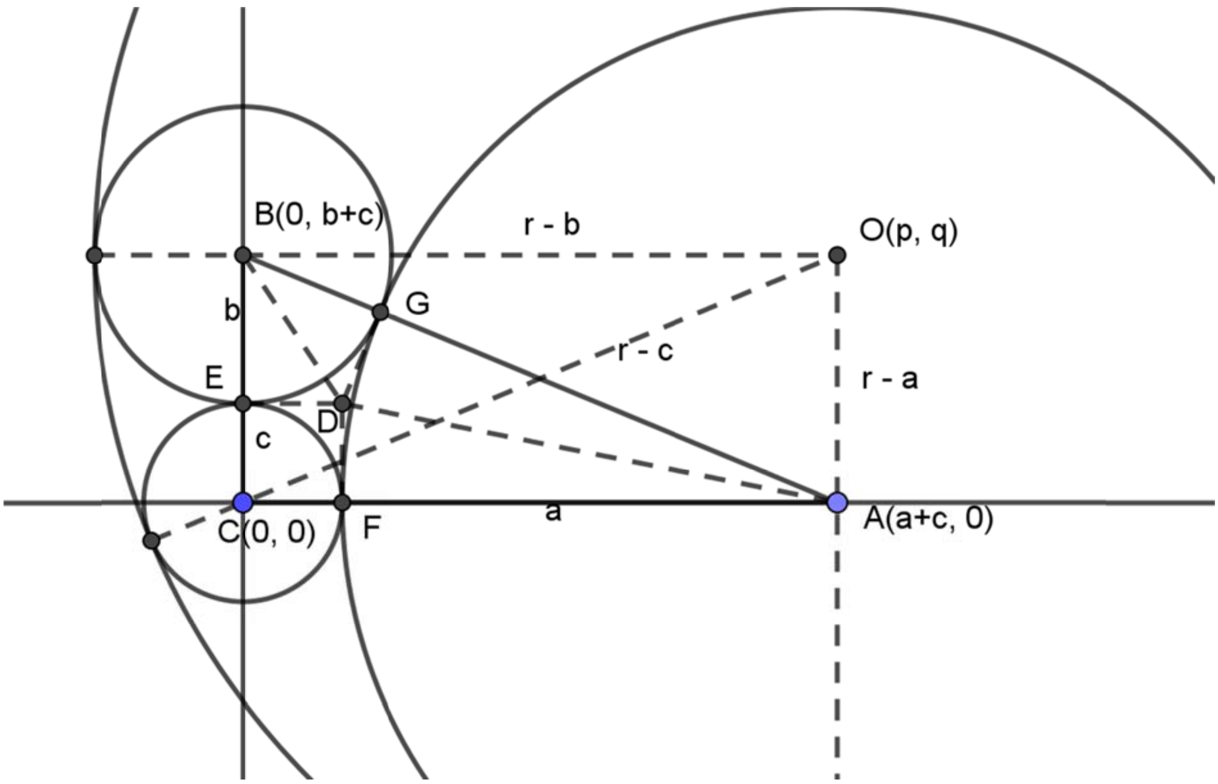
Problem 242:



Yarıçapları a,b,c ve merkezleri bir dik üçgenin köşesi olan olan çemberler şekildeki gibi birbirine ve r yarıçaplı çembere teğet

r=a+b+c

Çözüm:



ABC üçgeninin dik açının bulunduğu C köşesini dik koordinat sisteminin merkezine, AC kenarı x eksenine ve BC kenarı y ekseni üzerine gelecek şekilde yerleştirelim. C(0, 0), A(a + c, 0) ve B(0, b+c) olur. A, B ve C merkezli çemberler O merkezli çembere içten teğet olduğundan |OB|=r – b, |OC|=r – c, |OA|=r – a olur. A, B ve C merkezli çemberlerin kuvvet merkezi D olsun. BED ile BGD ve AFD ile AGD üçgenlerinin eşliğinden [BD] ve [AD] çizildikleri köşedeki açıların açıortayları olup m(ADB)=135 derecedir.

ABC üçgeninde |AB|= a + b, |AC|=a + c ve |BC|= b+ c dir. Pisagor bağıntısından

$$(a+c)^2+(b+c)^2=(a+b)^2$$

$$a^2+2ac+c^2+b^2+2bc+c^2=a^2+2ab+b^2$$

$$ac+bc+c^2=ab \qquad (I)$$

Olur. Analitik olarak uzunluklar yazılırsa

$$p^2+(q-(b+c))^2=(r-b)^2\ \ den$$

$$p^2+q^2-2q(b+c)+(b+c)^2=(r-b)^2 \quad (II)$$

$$p^2+q^2=(r-c)^2 \qquad (III)$$

$$(p-(a+c))^2+q^2=(r-a)^2\ \ den$$

$$p^2+q^2-2p(a+c)+(a+c)^2=(r-a)^2 \quad (IV)$$

Eşitlikleri yazılır.

$(II) ve\ (III) den\ r^2-2cr+c^2-2q(b+c)+(b+c)^2=r^2-2br+b^2$ den $q=\dfrac{(b-c)r+c^2+bc}{b+c}$ olur. (I) den $c^2+bc=a(b-c)$ yazılırsa $q=\dfrac{cr+ac}{a}$ olur.

(III) ve (IV) den $r^2-2cr+c^2-2p(a+c)+(a+c)^2=r^2-2ar+a^2\ \ den$

$p=\dfrac{(a-c)r+c^2+ac}{a+c}$ olur. (I) den $c^2+ac=b(a-c)$ yazılırsa $p=\dfrac{cr+bc}{b}$ olur. (III) de yerine yazılırsa

$$\left(\frac{cr+bc}{b}\right)^2+\left(\frac{cr+ac}{a}\right)^2=(r-c)^2$$

Düzenlenirse $(a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)r^2-2abc(ab+ac+bc)r-a^2b^2c^2=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$\Delta = 4a^2b^2c^2(ab+ac+bc)^2+4a^2b^2c^2(a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)$$

$$\Delta = 4a^2b^2c^2[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2+a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2]$$

$$\Delta = 4a^2b^2c^2[2a^2b^2+2abc(a+b+c)]$$

Olur. Öte yandan (I) den c(a+b+c)=ab olduğundan yerine yazılırsa

$$\Delta = 4a^2b^2c^2[4a^2b^2]=16a^4b^4c^2$$

Olur. Bu denklemin kökü yazılırsa

$$r = \frac{2abc(ab+ac+bc)+4a^2b^2c}{2(a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)} = \frac{abc(3ab+ac+bc)}{a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}$$

$(I) den\ ac+bc = ab-c^2$ olup yerine yazılırsa

$$r = \frac{abc(4ab-c^2)}{a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}$$

Olur. D noktası üç çemberin kuvvet merkezi ve C dik açı olduğundan |DE|=|DG|=|DF|=c dir. BGD ve AGD dik üçgenlerinde $|BD| = \sqrt{b^2+c^2}\ ve\ |AD| = \sqrt{a^2+c^2}$ dir. |AB|=a + b dir. ADB ü,çgeninde cos kuralı yazılırsa

$$a^2+2ab+b^2 = a^2+c^2+b^2+c^2+\sqrt{2(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$$

Düzenlenirse

$$4a^2b^2-8abc^2+c^2 = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+c^4)$$

$$a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2 = c^2(4ab-c^2)$$

Yerine yazılırsa,

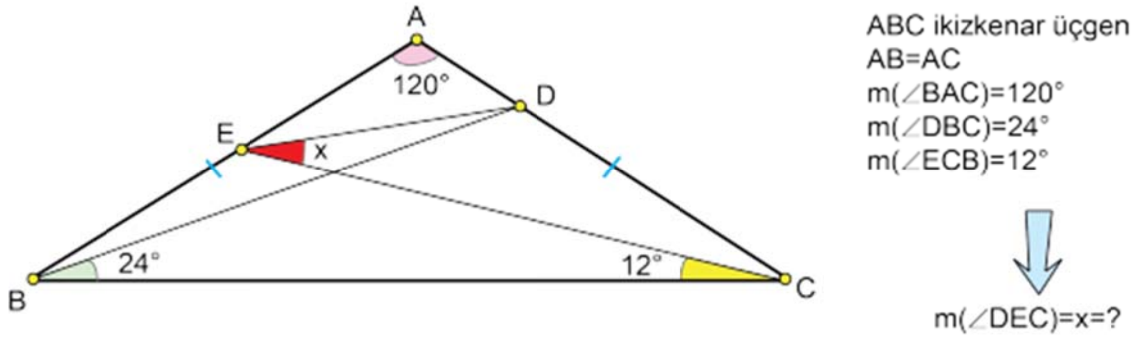
$$r = \frac{abc(4ab-c^2)}{c^2(4ab-c^2)} = \frac{ab}{c}$$

Elde edilir. (I) den ab=c(a + b + c) olduğundan yerine yazılırsa

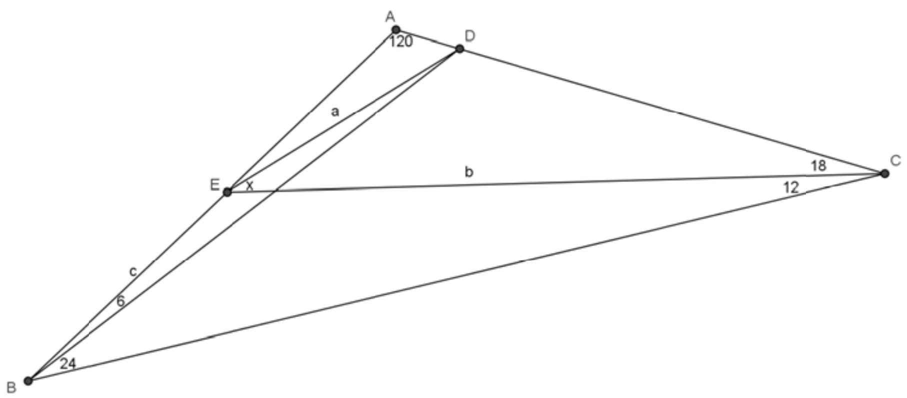
$$r = \frac{c(a+b+c)}{c} = a+b+c$$

Elde edilir.

Problem 243:



Çözüm:



DEC üçgeninde sinüs kuralı $\dfrac{a}{\sin 18}=\dfrac{b}{\sin(18+x)}$

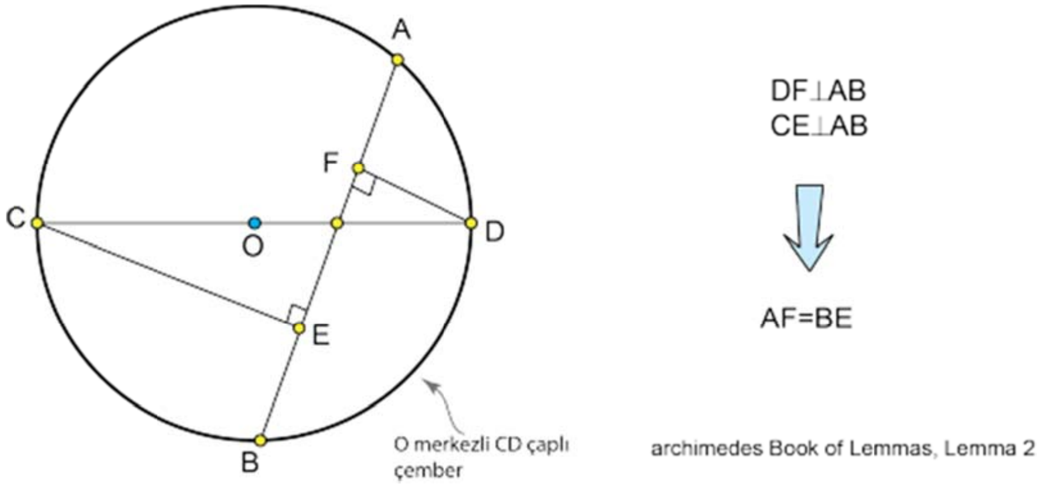
EBC üçgeninde sin kuralı $\dfrac{c}{\sin 12}=\dfrac{b}{\sin 30}$ taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{a\sin 12}{c\sin 18}=\dfrac{\sin 30}{\sin(18+x)}$

EBD üçgeninde sinüs kuralı $\dfrac{a}{\sin 6}=\dfrac{c}{\sin(36-x)}$ *den* $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin 6}{\sin(36-x)}$ olur. Bu oran yerine yazılırsa $\dfrac{\sin 6\sin 12}{\sin(36-x)\sin 18}=\dfrac{\sin 30}{\sin(18+x)}$ elde edilir. sin18=2sin12sin48 yazılır ve sadeleştirilirse $\dfrac{\sin 6}{2\sin 48\sin(36-x)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sin(18+x)}$ ifadesi ede edilir. Bu orantıdan

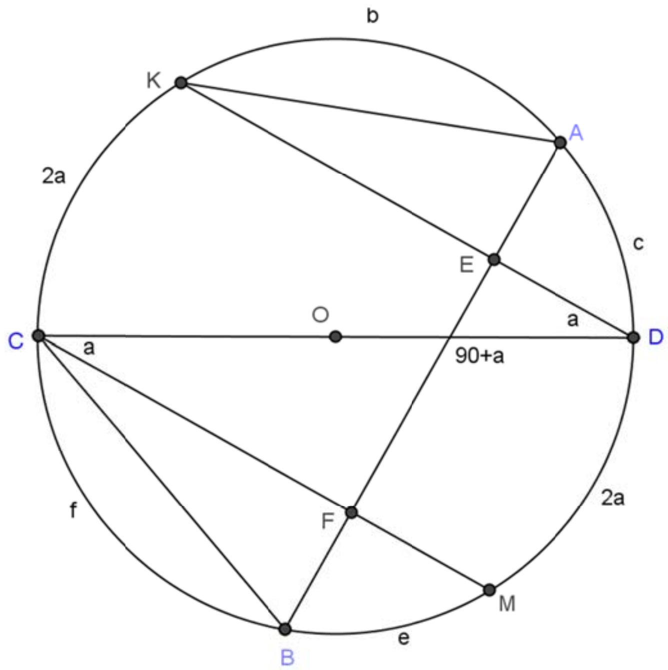
$$sin6\sin(18+x)=sin48\sin(36-x)$$
$$\frac{1}{2}[\cos(12+x)-\cos(24+x)]=\frac{1}{2}[\cos(12+x)-\cos(84-x)]$$
$$\cos(24+x)=\cos(84-x)$$
$$24+x=84-x\ den\ 2x=60\ ve\ x=30$$

olur.

Problem 244:

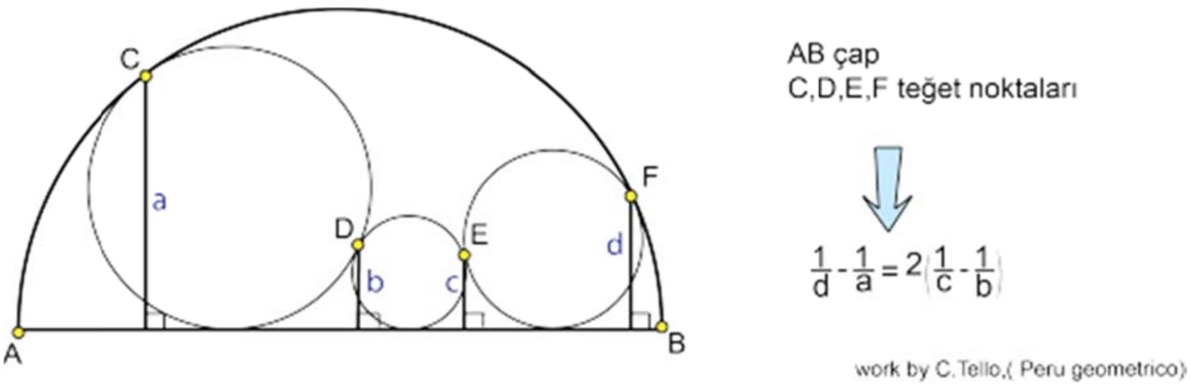


Çözüm:

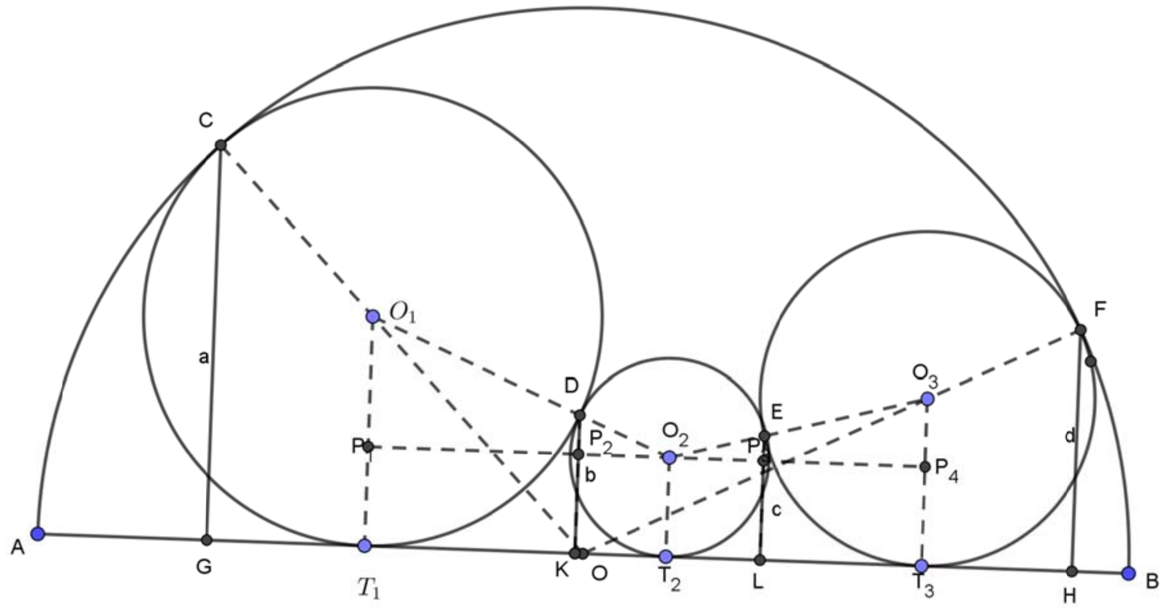


Şekilde $90+a=\dfrac{2a+b+2a+e}{2}$ den $180+2a=2a+b+2a+e\ den\ 2a+b+e=180$ olur. O merkez olduğundan $2a+b+c=180$ olup bu iki eşitlikten c = e ve b = f olur. Yani m(EKA)=m(FCB) olur. Aybı zamanda $|AK|=|BC|$ olacağından AKE üçgeni ile BCF üçgenleri AKA eşlik kuralına göre eştir. Bunun sonucu olarak $|AE|=|FB|$ our.

Problem 245:



Çözüm:

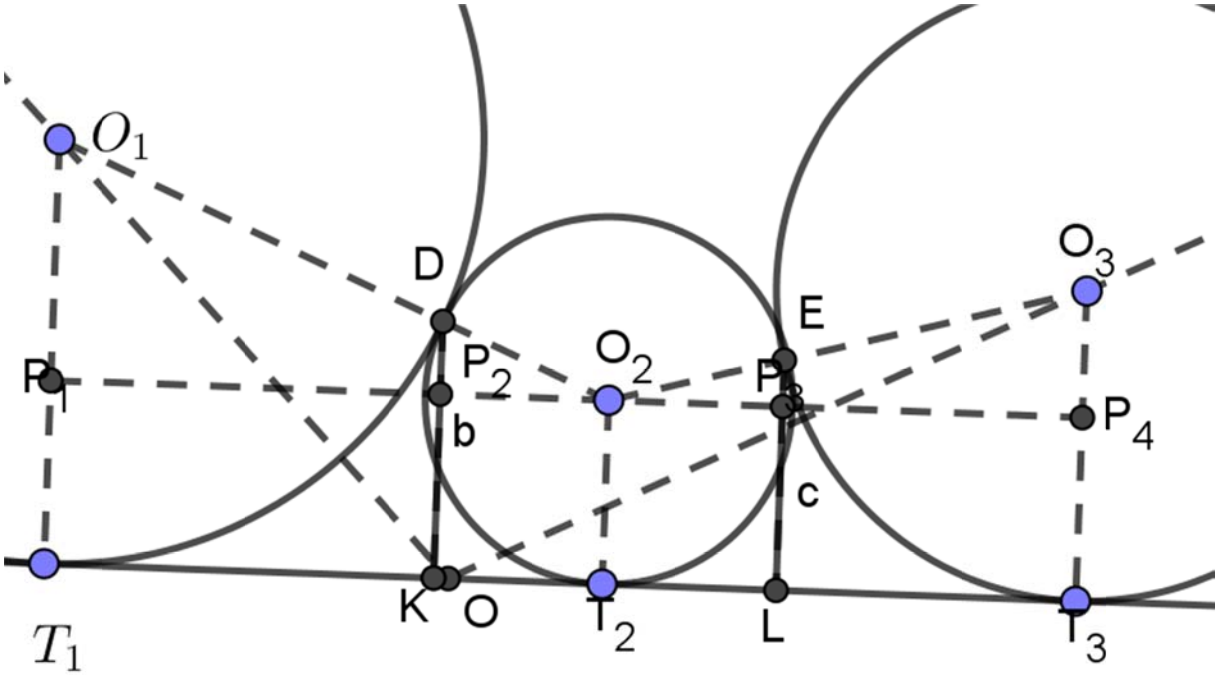


[AB] çaplı çemberin yarıçapı r merkezi O olsun. İçteki çemberlerin yarıçapları r_1, r_2, r_3 ve merkezleri O_1, O_2, O_3 olsun.

OO_1T_1 ile OCG üçnlerinin benzerliğinden $\frac{r-r_1}{r}=\frac{r_1}{a}\ dan\ \frac{1}{a}=\frac{r-r_1}{rr_1}$ olur.

OT_3O_3 ile OHF üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{r-r_3}{r}=\frac{r_3}{d}\ den\ \frac{1}{d}=\frac{r-r_3}{rr_3}$ olur. Bu iki ifadeden

$\frac{1}{d}-\frac{1}{a}=\frac{r-r_3}{rr_3}-\frac{r-r_1}{rr_1}=\frac{r_1-r_3}{r_1r_3}$ olur.



O_2 den büyük çemberin çapına paralel çizilirse

O_2P_2D ile $O_2P_1O_1$ üçgenlerinin benzerliğinden

$\dfrac{r_2}{r_1+r_2}=\dfrac{b-r_2}{r_1-r_2}$ *den* $\dfrac{r_1r_2-r_2^2}{r_1+r_2}+r_2=b$ *ve* $b=\dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$, $\dfrac{1}{b}=\dfrac{r_1+r_2}{2r_1r_2}$ olur.

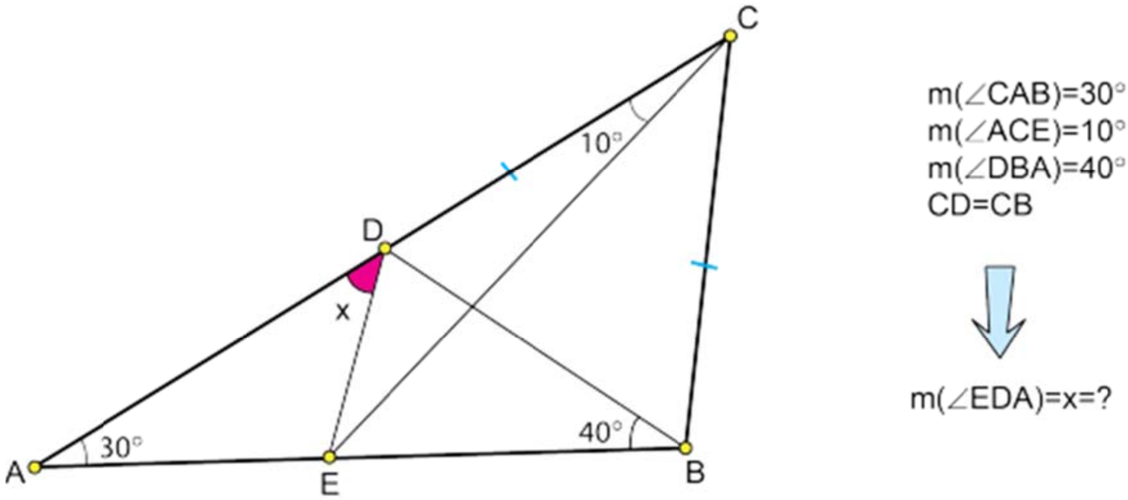
O_2P_3E ile $O_2P_4O_3$ üçgenlerinin benzerliğinden

$\dfrac{r_2}{r_3+r_2}=\dfrac{c-r_2}{r_3-r_2}$ *den* $\dfrac{r_3r_2-r_2^2}{r_3+r_2}+r_2=c$ *ve* $c=\dfrac{2r_3r_2}{r_3+r_2}$, $\dfrac{1}{c}=\dfrac{r_3+r_2}{2r_3r_2}$ olur.

$\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{r_3+r_2}{2r_3r_2}-\dfrac{r_1+r_2}{2r_1r_2}=\dfrac{r_1r_3+r_1r_2-r_1r_3-r_2r_3}{2r_1r_2r_3}=\dfrac{r_2(r_1-r_3)}{2r_1r_2r_3}=\dfrac{r_1-r_3}{2r_1r_3}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{a}\right)$ olur. Yani

buradan $\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{a}=2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\right)$ sonucu elde edilir.

Problem 246:



Çözüm:

Açılar yazılırsa m(DEC)=x – 10 m(CEB)=40, m(ABC)=110, m(BCE)=30 olur. |CD|=|CB|=a ve |CE|=b diyelim.

CDE üçgeninde sinüs kuralı yazılırsa $\dfrac{a}{\sin(x-10)}=\dfrac{b}{\sin x}$

CBE üçgennde sinüs kuralı yazılırsa

$\dfrac{a}{\sin 40}=\dfrac{b}{\sin 110}$ dan $\dfrac{a}{2\sin 20\cos 20}=\dfrac{b}{\cos 20}$ $ve\ a=2b\sin 20$ olur. Yerine yazılırsa

$\dfrac{2b\sin 20}{\sin(x-10)}=\dfrac{b}{\sin x}$ den $\dfrac{\sin 20}{\frac{1}{2}\sin(x-10)}=\dfrac{1}{\sin x}$ olur.

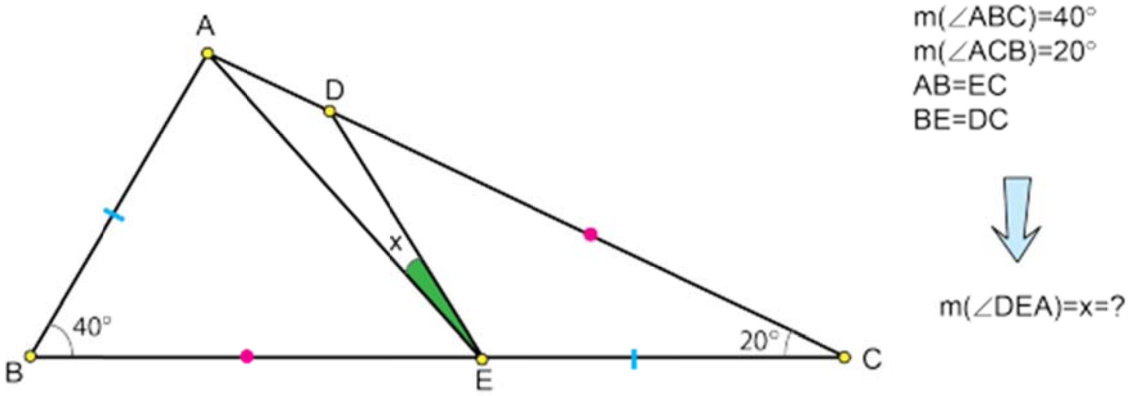
$$sin30\sin(x-10)=sinxsin20$$

$$\cos(40-x)-\cos(x+20)=\cos(x-20)-\cos(x+20)$$

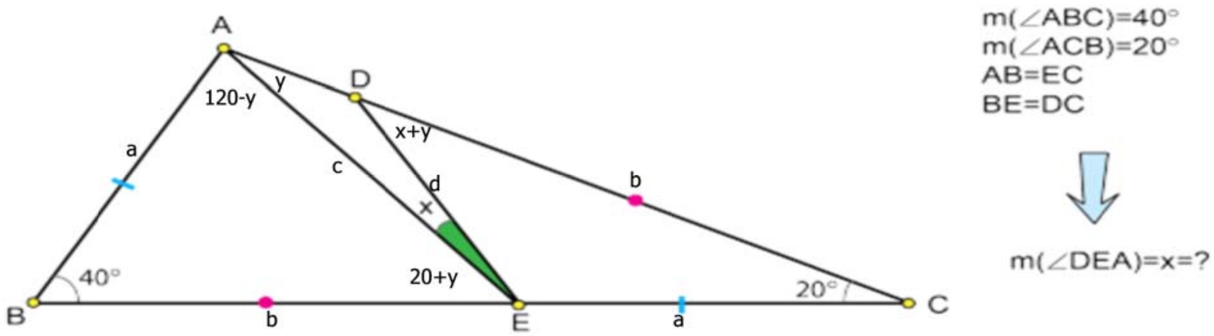
$$40-x=x-20\ \ den\ \ 2x=60\ \ ve\ x=30$$

Olur.

Problem 247:



Çözüm:



ABE üçgeninde sinüs kuralı : $\dfrac{a}{\sin(20+y)} = \dfrac{b}{\sin(120-y)} = \dfrac{c}{\sin 40}$ (1),

DEC üçgeninde sinüs kuralı : $\dfrac{a}{\sin(x+y)} = \dfrac{b}{\sin(20+y+x)} = \dfrac{d}{\sin 20}$ (2)

AED üçgeninde sinüs kuralı : $\dfrac{c}{\sin(x+y)} = \dfrac{d}{\sin y}$ (3) olur.

(1) Ve (2) taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(20+y)} = \dfrac{c\sin 20}{d\sin 40} = \dfrac{\sin(20+y+x)}{\sin(120-y)}$ olur. (3) de $\dfrac{c}{d} = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin y}$ olarak hesaplanır ve yerine yazılırsa $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(20+y)} = \dfrac{\sin(x+y)\sin 20}{\sin y \sin 40}$ olur.
Sadeleştirilir ve düzenlenirse: $\sin(20 + x)\, sin20 = sinysin40$ olur. Ters dönüşüm uygulanırsa

$$\frac{1}{2}[cosy - \cos(y + 40)] = \frac{1}{2}[\cos(40 - y) - \cos(40 + y)]$$

$$cosy = \cos(40 - y)\ den\ y = 20\ olur.$$

Bu değer (3) de yerine yazılırsa

$$\frac{\sin(x+20)}{\sin(40)} = \frac{\sin(40+x)}{\sin(100)}, \quad \frac{\sin(x+20)}{\sin 40} = \frac{\sin(40+x)}{\sin 80}, \quad \frac{\sin(x+20)}{\sin 40} = \frac{\sin(40+x)}{2\sin 40 \cos 40}$$

olur ve buradan

$$2\sin(x+20)\, cos40 = \sin(40+x)$$

2 sayısı eşitliğin ikinci tarafına cos60 olarak geçirilirse

$$\sin(x+20)\, cos40 = \sin(30+x)\, cos60$$

Ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirilirse

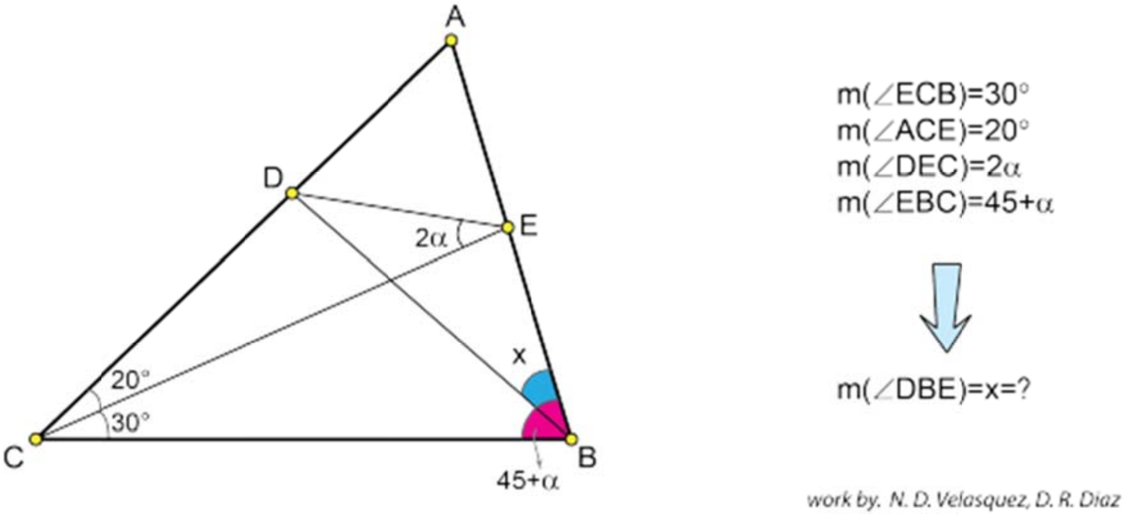
$$\sin(x+60) + \sin(x-20) = sin100 + x) + \sin(x-20)$$

$$x + 60 = 180 - (x + 100)$$

$$x + 60 = 80 - x \;\; den\; 2x = 20\; ve\; x = 10$$

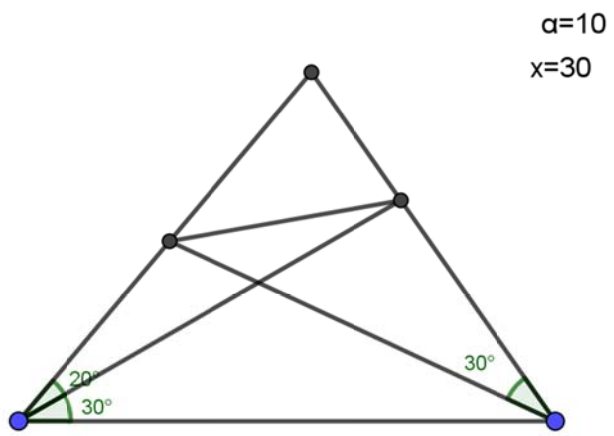
Olarak buunur.

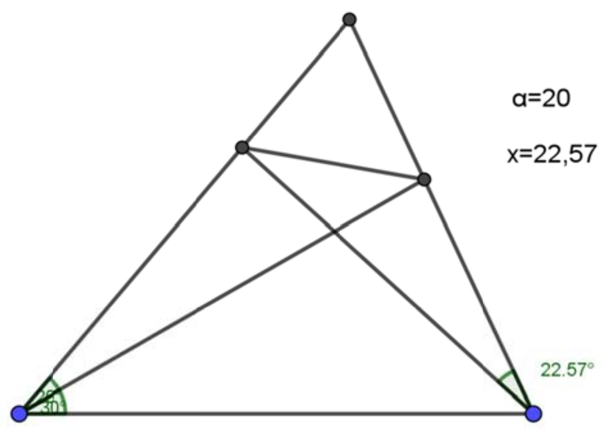
Problem 248:



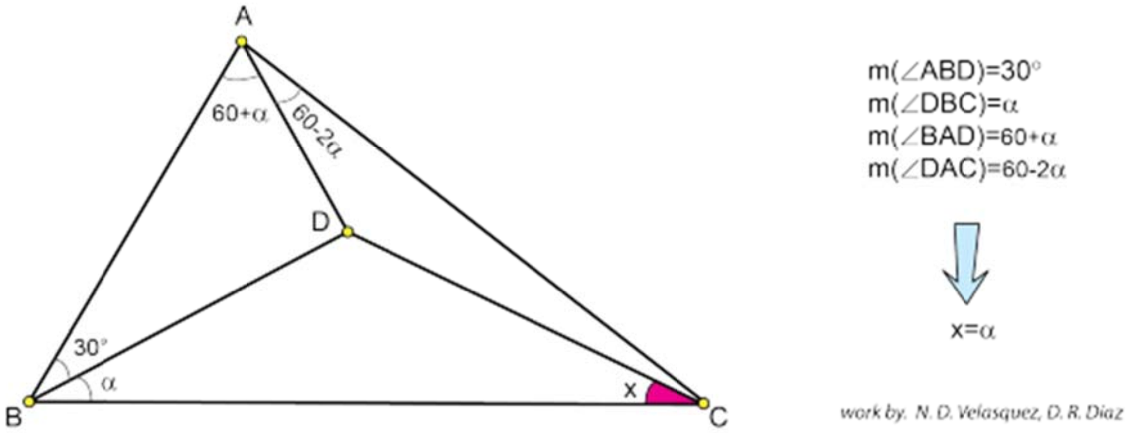
Çözüm:

Bu soruda α nın değişik değerleri için farklı x değereleri bulunuyor. Mesela $\alpha = 10$ için x=30, $\alpha = 20$ için x=22,57 değeri geogebrada elde ediliyor. Yani ABC sabit üçgeb değil.





Problem 249:



Çözüm:

ABC üçgeninde m(ACB)=30 dur. Bı üçgende Trgi-Ceva uygulanırsa

$$\sin(60-2a)\, sin30 sinx = \sin(60+a)\, sinasin(30-x)$$

$$2\sin(30-a)\cos(30-a)\frac{1}{2}sinx = \cos(30-a)\, sinasin(30-x)$$

$$\cos(60+a) sinx = \sin a \cos(60+x)$$

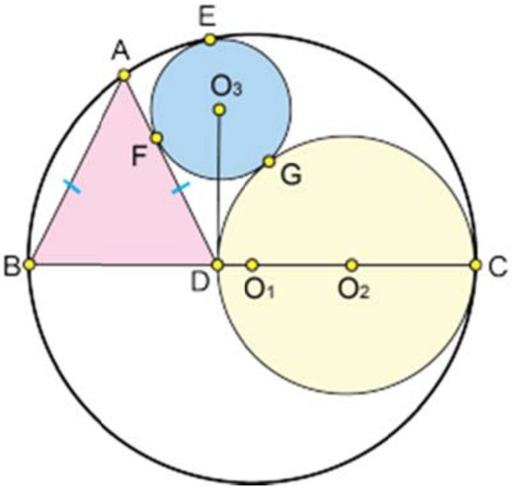
$$\frac{1}{2}[\sin(x+a+60)+\sin(x-a-60)] = \frac{1}{2}[\sin(60+x+a)+\sin(a-60-x)]$$

$$x-a-60 = a-60-x$$

$$2x = 2a \;\; dan\; x = a$$

Olarak bulunur

Problem 250:

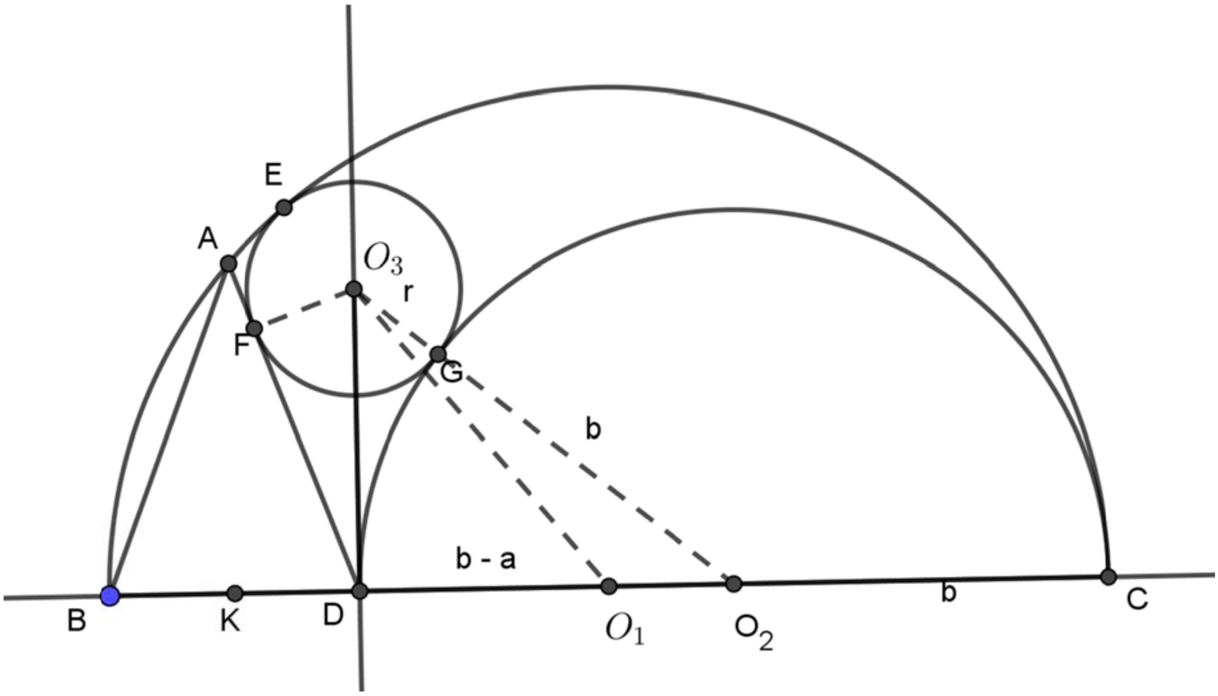


Şekilde BC çaplı O_1 merkezli çember,
DC çaplı O_2 merkezli çember,
O_3 merkezli çember verilmiştir.
E,F,G teğet noktaları
ABD ikizkenar üçgen AB=AD

⇓

$O_3D \perp BC$

Çözüm:



O_1 merkezli çemberin yarıçapı a+b, O_2 merkezli çemberin yarıçapı b ve O_3 merkezli çemberin yarıçap r olsun. Verilen şekli D noktası koordinat sisteminin merkezine ve BC doğrusu Ox ekseni üzerinde olacak şekilde yerleştirilirse D(0, 0), O_1(b – a, 0), O_2(b, 0), B(- 2a, 0), C(2b, 0) ve K(- a, 0) olur. O_3(p, q) olsun. Yapacağımız işlemlerde p sayısını bulmaya çalışacağız.
Önce [BC] çaplı çemberin denklemini yazalım $(x-(b-a))^2+y^2=(a+b)^2$ olur.
A noktasının ordinatı için bu denklemde x = - a yazılırsa

$$(-b)^2+y^2=a^2+2ab+b^2 \quad den \;\; y=\sqrt{a^2+2ab} \; olup \; A(-a,\sqrt{a^2+2ab})$$

Noktasıdır. Buna göre AD dorğrusunun denklemi

$y=-\dfrac{\sqrt{a^2+2ab}}{a}$ $dan\left\{\sqrt{a^2+2ab}\right\}x+ay=0$ şeklindedir.

O_3 noktasının bu doğruya uzaklığı r sayısını verir yani $r = \dfrac{\left|\left(\sqrt{a^2+2ab}\right)p+aq\right|}{\sqrt{2a^2+2ab}}$ (I) olarak hesaplanır.

Birbirine teğet çemberlerin merkezleri arasındaki özelliklere göre

O_1 v O_3 merkezli çemberler için $(a+b-r)^2 = (p-)b-a))^2 + q^2$ (II)

O_2 ve O_3 merkezli çemberler için $(b+r)^2 = (p-b)^2 + q^2$ (III)

II ve III den q^2 yok edilirse r nin p türünden değeri $r = \dfrac{2ab-ap}{2b+a}$ (IV) olarak hesaplanır

1. $\left|\sqrt{a^2+2ab}\ p+aq\right| = \sqrt{a^2+2ab}\ p+aq$ olması durumu;

I ve IV ün eşitliğinden $\dfrac{\sqrt{a^2+2ab}\,p+aq}{\sqrt{2a^2+2ab}} = \dfrac{2ab-ap}{2b+a}$ eşitliğinde

$$q = \frac{2ab\sqrt{2a^2+2ab} - \left(a\sqrt{2a^2+2ab} + (2b+a)\sqrt{a^2+2ab}\right)p}{a(2b+a)}$$

Olarak hesaplanır.

Burada $2ab\sqrt{2a^2+2ab} = \alpha$ ve $a\sqrt{2a^2+2ab} + (2b+a)\sqrt{a^2+2ab} = \beta$ diyelim

$q = \dfrac{\alpha-\beta p}{a(2b+a)}$ olur. III de r ve q nun bu değerler III de yerine yazılırsa,

$$q^2 = (b+r)^2 - (p-b)^2 = (r+p)(2b+r-p) = \left(\frac{2ab-ap}{2b+a}+p\right)\left(2b-p+\frac{2ab-ap}{2b+a}\right)$$

$$\left(\frac{\alpha-\beta p}{a(2b+a)}\right)^2 = \left(\frac{2ab+2bp}{2b+a}\right)\left(\frac{4b(a+b)-2(a+b)p}{2b+a}\right)$$

$$\frac{\alpha^2-2\alpha\beta p+\beta^2p^2}{a^2(2b+a)^2} = \frac{8ab^2(a+b)-4ab(a+b)p+8b^2(a+b)p-4b(a+b)p^2}{(2b+a)^2}$$

$$= \frac{8ab^2(a+b)-4b(a+b)(a-2b)p-4b(a+b)p^2}{(2b+a)^2}$$

Burada $4b(a+b)(a-2b) = t$ ve $4b(a+b) = z$ dersek

Yukarıda $\alpha = 2ab\sqrt{2a^2+2ab}$ den $\alpha^2 = 8a^3b^2(a+b)$ dir.

$$\frac{8a^3b^2(a+b)-2\alpha\beta p+\beta^2p^2}{a^2} = \frac{8ab^2(a+b)-tp-zp^2}{1}\ den$$

$$8a^3b^2(a+b)-2\alpha\beta p+\beta^2p^2 = 8a^3b^2(a+b-a^2tp-a^2zp^2$$

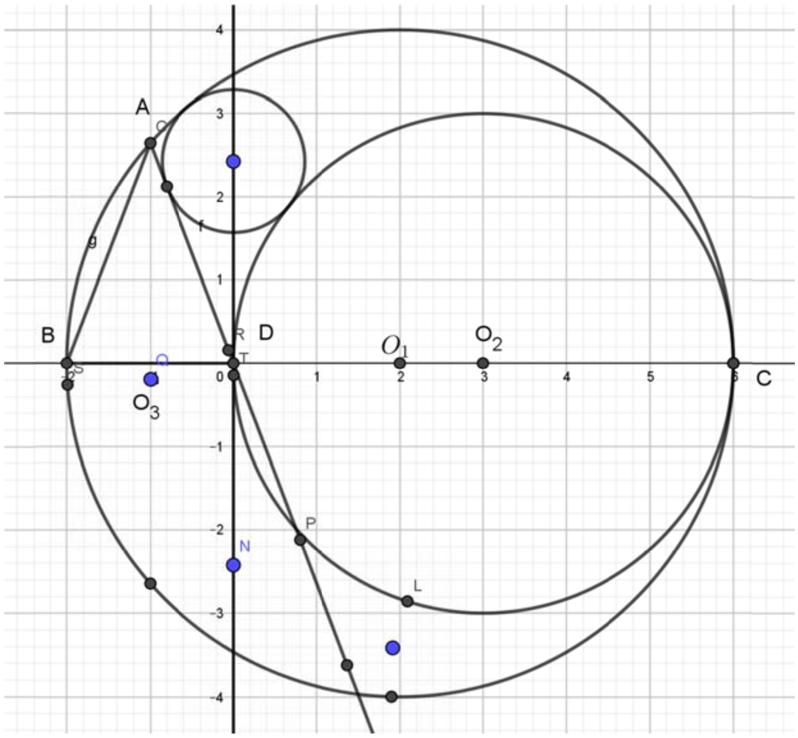
$$(a^2t-2\alpha\beta)p = (-a^2z-\beta^2)p^2\ denklemin den\ p=0\ veya\ p=\frac{a^2t-2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$$

Olarak bulunur. Burada p = 0 için O_3 ün apsisi ile D noktasının apsisi eşit ve 0 dır. Yani D ve O_3 noktaları y ekseni üzerinde olup x eksenine dik olduğundan O_3D doğrusu [BC] na diktir.

$p = \dfrac{a^2t-2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$ için $q = \dfrac{\alpha\beta^2-a^2\alpha z-a^2\beta t}{a(2b+a)(-\beta^2-a^2z)}$ olur. $a=1$ ve $b=3$ olsun.

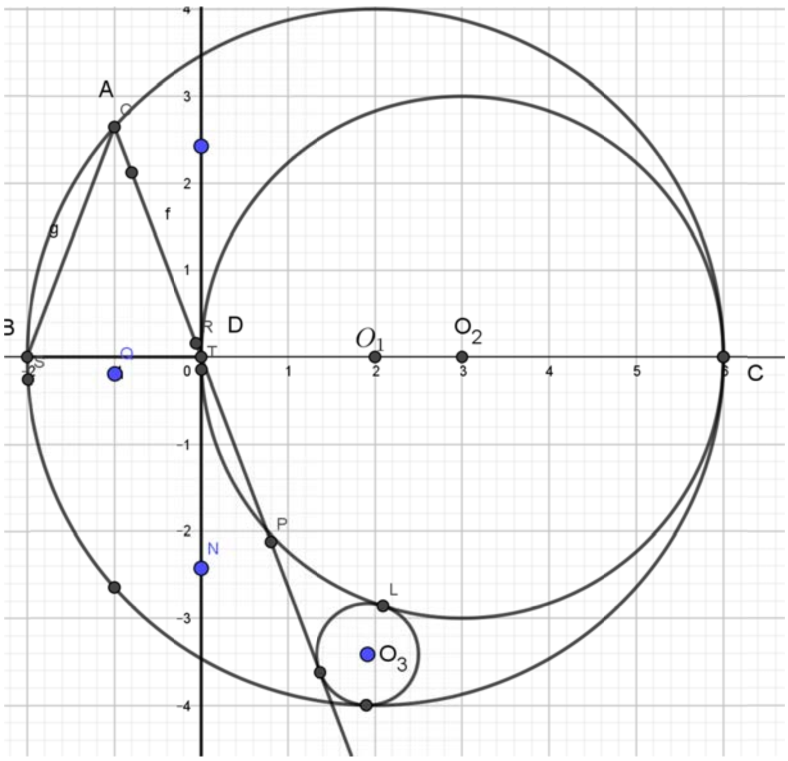
$\alpha = 12\sqrt{2},\ \beta = 2\sqrt{2}+7\sqrt{7},\ t=-240\ \ ve\ \ z=48$ olur.

$p=0$ için $q=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$ ve $r=\dfrac{6}{7}$ olup şekil aşağıdadır.



$p=\dfrac{a^2t-2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$ için $q=\dfrac{a^2t\beta+a^2z\alpha-\alpha\beta^2}{a(2b+a)\left(a^2z+\beta^2\right)}$ olur. Yukarıdaki değerler yerine yazılırsa için

$q=\dfrac{-84\sqrt{2}-48\sqrt{7}}{57+4\sqrt{14}}$ olup gra $p=\dfrac{48+24\sqrt{14}}{57+4\sqrt{14}}$ fik aşağıdadır.



Bu çember AD ye ve diğer çemberlere teğet olmasına rağmen merkezini D ile birleştiren doğru x eksenine dik değildir.

2. $\left|\sqrt{a^2+2ab}\;p+aq\right|=-\sqrt{a^2+2ab}\;p-aq$ olması durumu;

I ve IV ün eşitliğinden $\dfrac{-\sqrt{a^2+2ab}\;p-aq}{\sqrt{2a^2+2ab}}=\dfrac{2ab-ap}{2b+a}$ eşitliğinde

$$q=\frac{-2ab\sqrt{2a^2+2ab}+\left(a\sqrt{2a^2+2ab}-(2b+a)\sqrt{a^2+2ab}\right)p}{a(2b+a)}$$

Olarak hesaplanır.

Burada $-2ab\sqrt{2a^2+2ab}=\alpha\;\; ve\; a\sqrt{2a^2+2ab}-(2b+a)\sqrt{a^2+2ab}=\beta$ diyelim

$q=\dfrac{\alpha+\beta p}{a(2b+a)}$ olur. III de r ve q nun bu değerler III de yerine yazılırsa,

$$q^2=(b+r)^2-(p-b)^2=(r+p)(2b+r-p)=\left(\frac{2ab-ap}{2b+a}+p\right)\left(2b-p+\frac{2ab-ap}{2b+a}\right)$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta p}{a(2b+a)}\right)^2=\left(\frac{2ab+2bp}{2b+a}\right)\left(\frac{4b(a+b)-2(a+b)p}{2b+a}\right)$$

$$\frac{\alpha^2+2\alpha\beta p+\beta^2p^2}{a^2\left(2b+a\right)^2}=\frac{8ab^2(a+b)-4ab(a+b)p+8b^2(a+b)p-4b(a+b)p^2}{(2b+a)^2}$$

$$=\frac{8ab^2(a+b)-4b(a+b)(a-2b)p-4b(a+b)p^2}{(2b+a)^2}$$

Burada $4b(a+b)(a-2b)=t\; ve\; 4b(a+b)=z$ dersek

Yukarıda $\alpha=-2ab\sqrt{2a^2+2ab}\quad den\quad a^2=8a^3b^2(a+b)$ dir.

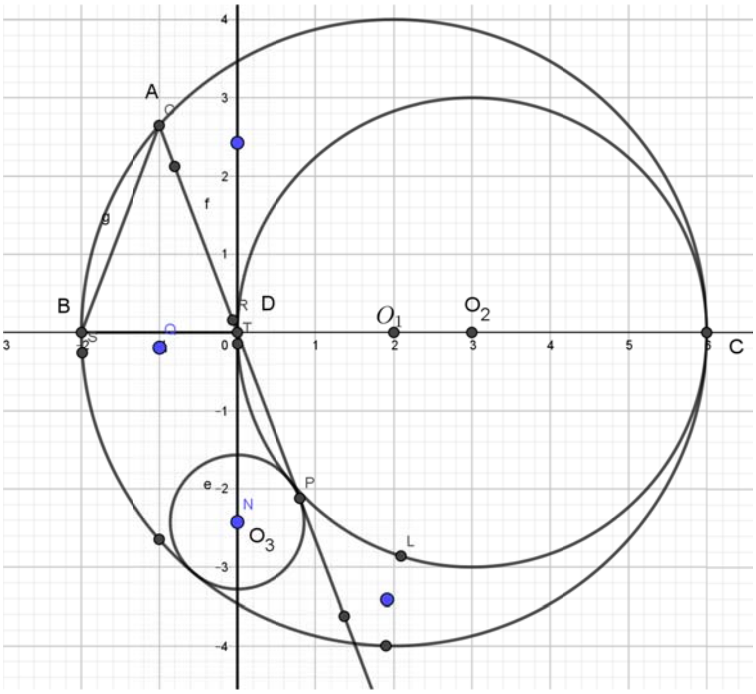
$$\frac{8a^3b^2(a+b)+2\alpha\beta p+\beta^2p^2}{a^2}=\frac{8ab^2(a+b)-tp-zp^2}{1}\; den$$

$$8a^3b^2(a+b)+2\alpha\beta p+\beta^2p^2=8a^3b^2(a+b-a^2tp-a^2zp^2$$

$$(a^2t+2\alpha\beta)p=(-a^2z-\beta^2)p^2\;\; denklem\min den\;\; p=0\;\; veya\;\; p=\frac{a^2t+2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$$

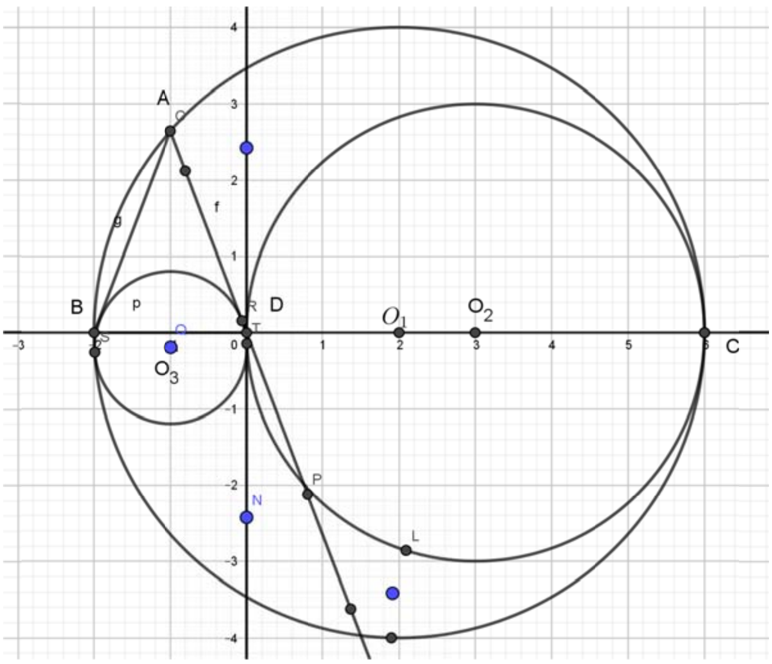
Olarak bulunur. Burada p = 0 için O_3 ün apsisi ile D noktasının apsisi eşit ve 0 dır. Yani D ve O_3 noktaları y ekseni üzerinde olup x eksenine dik olduğundan O_3D doğrusu [BC] na diktir

Yukarıdaki örnekte p=0 için $q=-\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$ olup şekil aşağıdaki gibidir.

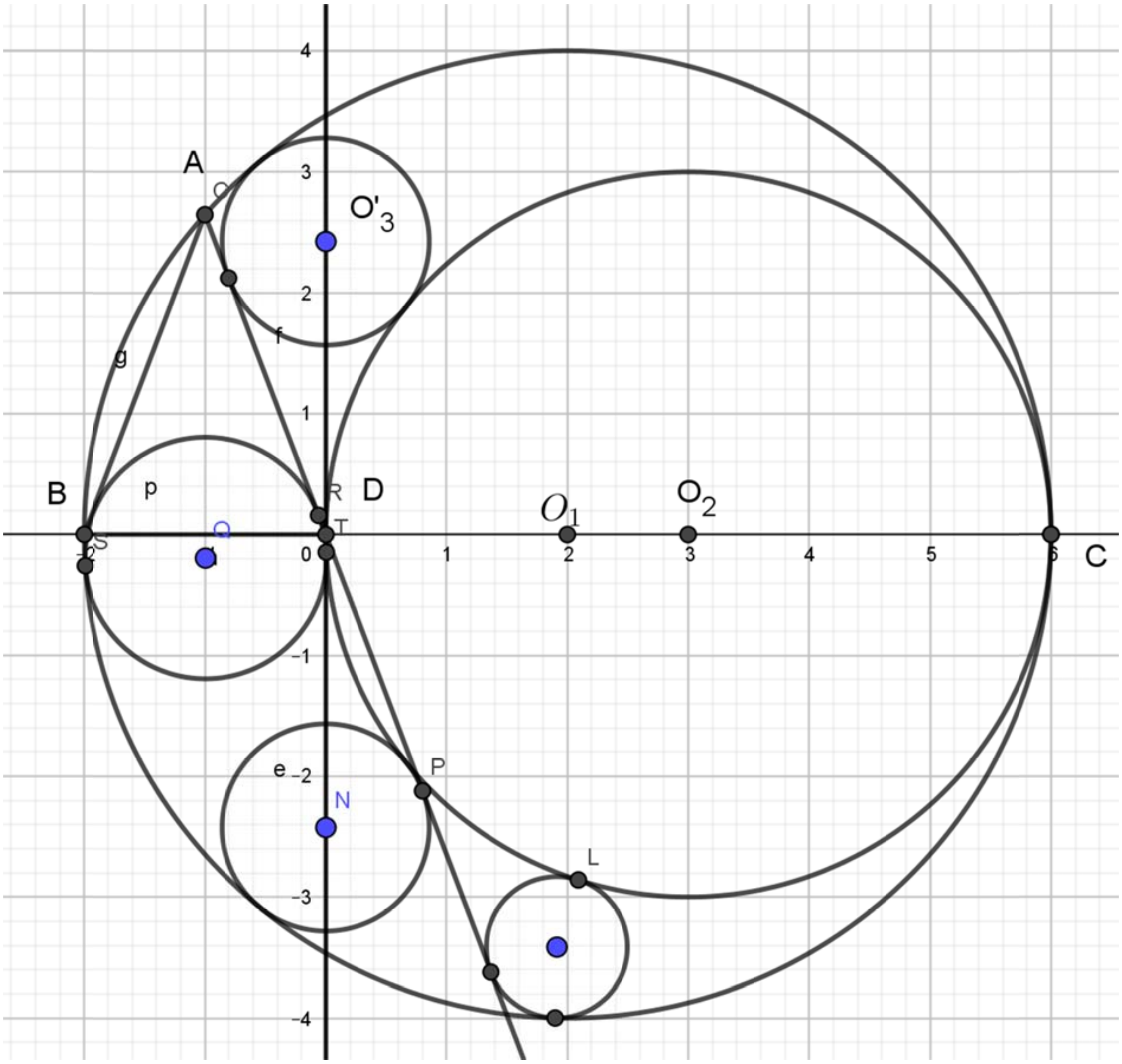


$p=\dfrac{a^2t+2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$ için $q=\dfrac{a^2t\beta-a^2z\alpha+\alpha\beta^2}{a(2b+a)\left(-a^2z-\beta^2\right)}$ olur. Yukarıdaki örnekte a=1 ve b=3 alınmıştı.

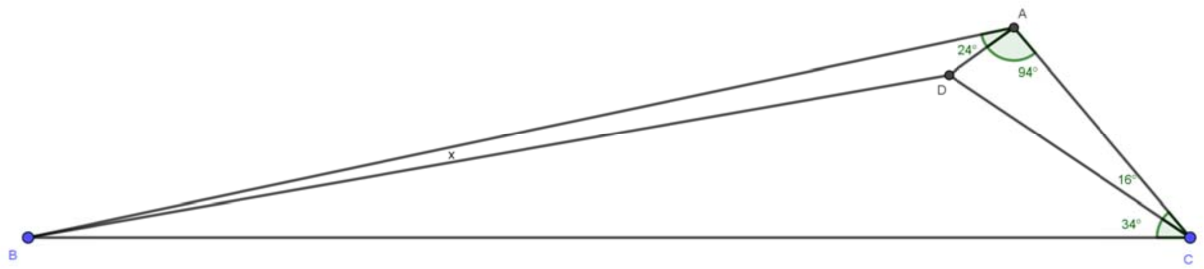
Bu durumda $\alpha=-12\sqrt{2}, \beta=2\sqrt{2}-7\sqrt{7}, t=-240\ ve\ z=48$ olur. Bu değerler yerine yazılırsa $p=\dfrac{-48+24\sqrt{14}}{-57+4\sqrt{14}}=\dfrac{48-24\sqrt{14}}{57-4\sqrt{14}}$ ve $q=\dfrac{-84\sqrt{2}+48\sqrt{7}}{-57+4\sqrt{14}}=\dfrac{84\sqrt{2}-48\sqrt{7}}{57-4\sqrt{14}}$ olup grafik aşağıdadır.



Bu sorunun çözümünde görüldüğü gibi ABD ikizkenar üçgeninin [AD ışınına , [BC] ve [DC] çaplı çemberlere teğet olmak üzere dört farklı çember vardır. Bunlardan iki tanesinin apsisi D ile aynı olup D ile birleştirildiğinde Ox eksenine dik olan doğru parçaları çizilmekte diğer iki çemberin merkezleri d noktası ile birleştirildiğinde çizilen doğru parçaları Ox eksenine dik omamaktadır. Problemn genel çözümünün şekli aşağıdadır.



Soru:



ABC üçgeninde m(CAD)=94, m(ACD)=16, m(DCB)=34 ve m(BAD)=24 ise m(DAB)=x kaç derecedir.

Çözüm.

ABC üçgeninde verilenlere göre m(ABC)=12 dir. Trigo Ceva uygulayalım.

$$sin94.sinx.sin34 = sin24.\sin(12-x).sin16$$

$$\frac{1}{2}[cos60 - cos128]sinx = \frac{1}{2}[cos8 - cos40]\sin(12-x)$$

$$\frac{1}{2}sinx - \sin(-38)\,sinx = \sin(12-x)\,cos8 - \sin(12-x)\,cos40$$

$$\frac{1}{2}sinx + sin38sinx = \sin(12-x)\,cos8 - \sin(12-x)\,sin50$$

$$\frac{1}{2}sinx + \frac{1}{2}[\cos(38-x) - \cos(38+x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(20-x) + \sin(4-x)] - \frac{1}{2}[\cos(38+x) - \cos(62-x)]$$

$$sinx + \cos(38-x) - \cos(38+x)$$

$$= \sin(20-x) + \sin(4-x) - \cos(38+x) + \cos(62-x)$$

$$sinx - \sin(4-x) = \sin(20-x) + \cos(62-x) - \cos(38-x)$$

$$sinx + \sin(x-4) = \sin(20-x) + \cos(62-x) - \cos(38-x)$$

$$2\sin(x-2)\,cos2 = \sin(20-x) - 2\sin(50-x)\,sin12$$

Burada 2sin12sin48=sin18 eşitliğinden sin12 hesaplanır ve yerine yazılırsa

$$2\sin(x-2)\,cos2 = \sin(20-x) - \sin(50-x)\frac{sin18}{sin48}$$

$$2sin48cos2\sin(x-2) = \sin 48\sin(20-x) - \sin(50-x)\,sin18$$

$$2sin48cos2\sin(x-2) = \frac{1}{2}[cos28 + x) - \cos(68-x)] - \frac{1}{2}[\cos(32-x) - \cos(68-x)]$$

$$4sin48cos2\sin(x-2) = \cos(28+x) - \cos(68-x) - \cos(32-x) + \cos(68-x)$$

$$4sin48cos2\sin(x-2) = \cos(28+x) - \cos(32-x)$$

$$4sin48cos2\sin(x-2) = -2sin30\sin(x-2)$$

$$4sin48cos2\sin(x-2) + \sin(x-2) = 0$$

$$\sin(x-2)\,[4sin48cos2 + 1] = 0\ ve\ \sin(x-2) = 0\ dan\ x = 2$$

olur.