Özel Problem – 1

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün, dik koordinat sisteminin başlangıç noktasından geçen iki teğetinin bulunması ve bunların birbirine dik olması koşulunu bulunuz.

Çözüm

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün başlangıç noktasından geçen teğetlerinin denklemi $y = mx$ olsun.

Bu parabolün $y = mx$ doğrusuna teğet olması için,

$ax^2 + bx + c = mx \Rightarrow ax^2 - (m-b)x + c = 0$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (m-b)^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2bm + b^2 - 4ac = 0$$

Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Teğetler birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı -1 olmalıdır.

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow b^2 - 4ac = -1$ bulunur.

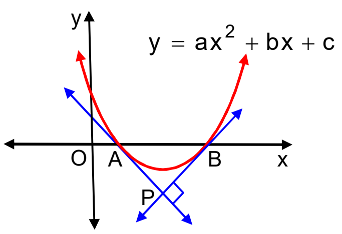
$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün dik koordinat sisteminin başlangıç noktasından geçen iki teğeti varsa; bunların birbirine dik olması için $b^2 - 4ac = -1$ olmalıdır.

Özel Problem – 2

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün x eksenini iki farklı noktada kesmesi ve bu kesim noktalarındaki teğetlerinin birbirine dik olması koşulunu bulunuz.

Çözüm

Parabolün x eksenini kestiği noktalar A ve B olsun. A ve B'deki teğetler P'de dik kesişsin.



$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$B\left(\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ 0\right)$ olur.

Teğetler, parabolün eksenine göre simetrik olduklarından PB'nin eğim açısı 45° olur.

$m_{PB} = 1$ olup PB'nin denklemi yazılabilir:

$$PB : y = x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

PB doğrusunun $y = ax^2 + bx + c$ parabolüne teğet olması için, bunların kesim noktalarının apsislerini veren denklemin kökleri birbirine eşit olmalıdır:

$$ax^2 + bx + c = x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow ax^2 + (b-1)x + c - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$\Delta = (b-1)^2 - 4a\left(c - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$\Rightarrow b^2 - 4ac = 1$ bulunur.

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün x eksenini kestiği noktalardaki teğetlerinin birbirine dik olması için $b^2 - 4ac = 1$ olmalıdır.

Uyarı!

$b^2 - 4ac$ ifadesi $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantı olduğu için, $y = ax^2 + bx + c$ parabolünde de $\Delta = b^2 - 4ac$ diye adlandırılır.

Özel problemlerde bulduğumuz sonuçlar $\Delta = 1$, $\Delta = -1$ olarak ezberlere alınırlar.

Bu sonuçlar özel problemlerin sonuçlarıdır.

Bunları, çözümlerini unutarak ezbere almak sadece aynı problemler sorulduğunda işe yarar. Zihin bu ezberlerle doldurulmamalı, temel bilgilerle düşünebilme yolu açık tutulmalıdır.

Verilecek örneklerle böyle bir ezbere takılı kalmanın hiçbir yararı olmadığı görülecektir.

Problem – 1

$y = x^2 + kx + 1$ parabolüne orijinden çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre bu teğetlerin denklemlerini bulunuz.

Çözüm

1. yol: Teğetlerin eğimleri m olsun.
Teğetlerin denklemleri $y = mx$ olur.

$y = x^2 + kx + 1$ eğrisi ile $y = mx$ doğrusu teğet olduklarından, $x^2 + kx + 1 = mx$ denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır:

$x^2 + kx + 1 = mx \Rightarrow x^2 - (m-k)x + 1 = 0$;

$\Delta = (m-k)^2 - 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 2km + k^2 - 4 = 0$;

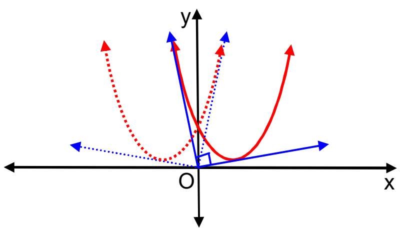
Teğetler birbirlerine dik olduklarından, eğimlerin çarpımı -1 olmalıdır:

$k^2 - 4 = -1 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$ bulunur.

$k_1 = -\sqrt{3}$ için $m_1 = -\sqrt{3} - 2$, $m_2 = -\sqrt{3} + 2$;

$k_2 = \sqrt{3}$ için $m_1 = \sqrt{3} - 2$, $m_2 = \sqrt{3} + 2$ olur.

Şekildeki eğrilerin ve teğetlerin denklemlerini siz yazınız.



2. yol: Orijinden çizilen teğetlerin birbirine dik olmaları için, $y = x^2 + kx + 1$ parabolünde $b^2 - 4ac = -1$ olmalıdır.

$b^2 - 4ac = -1 \Rightarrow k^2 - 4 = -1 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$ olur.

Teğetlerin denklemleri $y = mx$ biçimindedir.

$k_1 = -\sqrt{3}$ için,

$x^2 - \sqrt{3}x + 1 = mx \Rightarrow x^2 - \left(m + \sqrt{3}\right)x + 1 = 0$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$m_1 = -\sqrt{3} - 2$, $m_2 = -\sqrt{3} + 2$ bulunur.

$k_2 = \sqrt{3}$ için teğetlerin eğimlerini siz bulunuz.

Uyarı!

Dikkat edilirse; problemler tam aynı olmadığında $b^2 - 4ac = -1$ ezberini kullanmanın pek katkısı olmamıştır. Böyle özel problemlerin sonuçları olan formülleri ezberlemek zihni tembelleştirir.

Problem – 2

$y = x^2 + kx + 1$ eğrisine $A(2,-1)$ noktasından çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre; olası k değerlerini bulunuz.

Çözüm

1. yol: $A(2,-1)$ noktasından geçen doğruların eğimleri m olsun. Bu doğruların denklemi,

$y - (-1) = m(x-2) \Rightarrow y = mx - 2m - 1$ olur.

$y = x^2 + kx + 1$ parabolü ile $y = mx - 2m - 1$ doğrularının birbirlerine teğet olması için,

$$x^2 + kx + 1 = mx - 2m - 1$$
$$\Rightarrow x^2 + (k-m)x + 2m + 2 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (k-m)^2 - 4(2m+2) = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 2(k+4)m + k^2 - 8 = 0$$

Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Teğetler birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı -1 olmalıdır.

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow k^2 - 8 = -1 \Rightarrow k_1 = -\sqrt{7},\ k_2 = \sqrt{7}$

Eğriler $y = x^2 - \sqrt{7}x + 1$, $y = x^2 + \sqrt{7}x + 1$ olabilir.

2. yol: $A(2,-1)$ noktası ve eğri $+x$ yönünde 2 birim, $-y$ yönünde 1 birim ötelenirse; problem

"$y + 1 = (x-2)^2 + k(x-2) + 1$ eğrisine $O(0,0)$ noktasından çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre; olası k değerlerini bulunuz."

biçimine dönüşür.

Problem – 1'in çözümü gibi çözüm yapılır.

Problem – 3

$y = x^2 + 2x + k$ eğrisine $A(1, -1)$ noktasından çizilen teğetlerin eğimlerinin oranı -3 olduğuna göre; k değerini bulunuz.

Çözüm

$A(1, -1)$ noktasından geçen doğruların eğimleri m olsun. Bu doğruların denklemi,

$y - (-1) = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 1$ olur.

$y = x^2 + 2x + k$ parabolü ile $y = mx - m - 1$ doğrularının birbirlerine teğet olması için,

$$x^2 + 2x + k = mx - m - 1$$
$$\Rightarrow x^2 + (2 - m)x + m + k + 1 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (2 - m)^2 - 4(m + k + 1) = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 8m - 4k = 0$$

Bu son denklemin m_1 ve m_2 kökleri, teğetlerin eğimlerini verir.

$\frac{m_1}{m_2} = -3$ ve $m_1 + m_2 = 8$ eşitliklerinden

$m_1 = -4$, $m_2 = 12$ ve

$-4k = m_1 \cdot m_2 \Rightarrow -4k = -4 \cdot 12 \Rightarrow k = 12$

bulunur.

Problem – 4

$y = x^2 + kx - 1$ eğrisine $A(1, -2)$ noktasından çizilen teğetlerin eğimlerinin farkı 2 olduğuna göre; k değerini bulunuz.

Çözüm

$A(1, -2)$ noktasından geçen doğruların eğimleri m olsun. Bu doğruların denklemi,

$y - (-2) = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 2$ olur.

$y = x^2 + kx - 1$ parabolü ile $y = mx - m - 2$ doğrularının birbirlerine teğet olmaları için,

$x^2 + kx - 1 = mx - m - 2 \Rightarrow x^2 + (k - m)x + m + 1 = 0$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (k - m)^2 - 4(m + 1) = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - (k + 4)m + k^2 - 4 = 0$$

Bu son denklemin m_1 ve m_2 kökleri, teğetlerin eğimlerini verir.

$m_1 - m_2 = 2$, $m_1 + m_2 = k + 4$, $m_1 \cdot m_2 = k^2 - 4$ eşitliklerinden

$k_1 = -2$, $k_2 = 14/3$, $m_1 = -4$, $m_2 = 12$ ve

$-4k = m_1 \cdot m_2 \Rightarrow -4k = -4 \cdot 12 \Rightarrow k = 12$

bulunur.

Problem – 5

$y = x^2 - 2x - 3$ parabolünün birbirine dik olan teğetlerinden birinin eğimi 2 olduğuna göre; bu teğetlerin kesim noktasını bulunuz.

Çözüm

Birbirine dik teğetlerin eğimlerinin çarpımı -1 olacağından diğer teğetin eğimi $-1/2$ olur.

Teğetlerin denklemleri

$y = 2x + n_1$ ve $y = -\frac{1}{2}x + n_2$ olsun.

$x^2 - 2x - 3 = 2x + n_1 \Rightarrow x^2 - 4x - n_1 - 3 = 0$;

$x^2 - 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + n_2 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - n_2 - 3 = 0$

Bu iki denklemin ikikat kökleri olmalıdır:

$\Delta_1 = 16 + 4(n_1 + 3) = 0 \Rightarrow n_1 = -7$;

$\Delta_2 = 9/4 + 4(n_2 + 3) = 0 \Rightarrow n_2 = -57/16$

Teğetlerin denklemleri,

$y = 2x - 7$ ve $y = -\frac{1}{2}x - \frac{57}{16}$ olarak bulunur;

$\left(\frac{11}{8}, -\frac{17}{4}\right)$ noktasında kesişirler.

Uyarı!

Dikkat edilirse; **Problem – 3, Problem – 4** ve **Problem – 5**'te ezber hiçbir işe yaramamıştır.

Öğrenci aynı konuda, sayısız farklı problemle karşılaşacaktır!

Özel Problem – 3

$y = f(x)$, üçüncü dereceden bir fonksiyondur.
$f(x) = 0$ denkleminin köklerinin toplamı k ise $f(x-a) = 0$ denkleminin köklerinin toplamının $3a + k$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$f(x) = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 ve $f(x-a) = 0$ denkleminin kökleri x_1', x_2', x_3' olsun.

$x_1' - a = x_1$, $x_2' - a = x_2$, $x_3' - a = x_3$ olur.

$$x_1' + x_2' + x_3' = 3a + x_1 + x_2 + x_3$$
$$\Rightarrow x_1' + x_2' + x_3' = 3a + k \text{ bulunur.}$$

Problem – 6

$y = f(x)$, üçüncü dereceden bir fonksiyondur.
$f(x) = 0$ denkleminin köklerinin toplamı 4 ise $f(x-2) = 0$ denkleminin köklerinin toplamını bulunuz.

Çözüm

1. yol: $f(x) = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 ve $f(x-2) = 0$ denkleminin kökleri x_1', x_2', x_3' olsun.

$$x_1' + x_2' + x_3' = 3 \cdot 2 + 4 = 10 \text{ bulunur.}$$

2. yol: $f(x) = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, x_3 ve $f(x-2) = 0$ denkleminin kökleri x_1', x_2', x_3' olsun.

$x_1' - 2 = x_1$, $x_2' - 2 = x_2$, $x_3' - 2 = x_3$ olur.

$$x_1' + x_2' + x_3' = 3 \cdot 2 + x_1 + x_2 + x_3$$
$$\Rightarrow x_1' + x_2' + x_3' = 3 \cdot 2 + 4 = 10 \text{ bulunur.}$$

Uyarı!

Böyle bir problemi 1. yoldan çözebilmek için problemin sonucunu formül olarak öğrenciye vermek yanlışların büyüğüdür.

Problem – 7

$f(x+1) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{2,6\}$ olduğuna göre; $f(2x-3) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$f(x+1) = 0$ denkleminin kökleri 2 ve 6 ise $f(2x-3) = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

$2 + 1 = 2x_1 - 3 \Rightarrow x_1 = 3$;

$6 + 1 = 2x_2 - 3 \Rightarrow x_2 = 5$ bulunur.

$f(2x-3) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{3,5\}$ olur.

Uyarı!

Bir konuda sayısız değişik problem sorulabilir!
Bunlardan birini seçip formülleştirmenin hiçbir yararının olmayacağı, aksine çok büyük zararı olacağı örneklerle açıklanmaya çalışıldı!
Bu konuda, istenildiği kadar örnek sunulabilir!

Son Söz!

Özel problemlerin sonuçlarını
"formül" diye ezberletmeye çalışan
öğretmenlerimiz
öğrencilerinin zihinlerini
mühürlemeye çalıştıklarının
farkına varmalıdırlar!
Bir gerçek sınavda
öğrencinin ezberleri değil,
bilgileri,
bilgilerini kullanma becerileri sorgulanır!
Ezberleri ile
bir gerçek sınava giren öğrenci
çok büyük şok yaşar!
Bu acının sorumlusu
öğrencisini ezberlerle yönlendiren
öğretmenidir!
Yanlışı savunan öğretmenlerimizin
bu gerçeği göreceklerine inanıyorum!