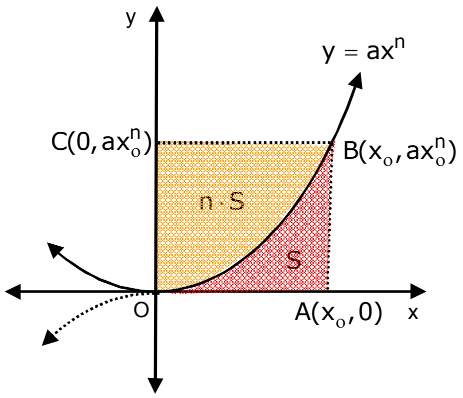
Pratik Bilgi-1 (İntegralsiz Alan Bulma)

$y = ax^n$ eğrisi ile $x = x_o$ ve $y = 0$ doğruları-nın sınırladığı alan S ise, $y = ax^n$ eğrisi ile $x = 0$ ve $y = ax_o^n$ doğrularının sınırladığı alan $n \cdot S$ 'dir.



İspat

Şekildeki harflendirmelere göre,

$$S = \int_0^{x_o} ax^n \cdot dx \Rightarrow S = \left.\frac{a \cdot x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{x_o}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a \cdot x_o^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow a \cdot x_o^n \cdot x_o = (n+1) \cdot S$$

$$\Rightarrow A(OABC) = (n+1) \cdot S$$

bulunur. $y = ax^n$ eğrisi ile $x = 0$ ve $y = ax_o^n$ doğrularının sınırladığı alanın $n \cdot S$ olduğu görülür.

O noktasının, eğrinin tepe noktası – ya da dönüm noktası - olduğu unutulmamalıdır.

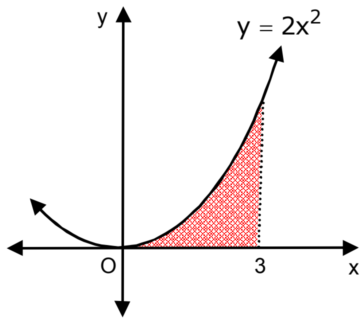
Sonuçlar

1. "Pratik Bilgi-1"in $y = a(x - r)^n + k$ türünden eğrilerde de geçerli olacağı açıktır.

2. "Pratik Bilgi-1" $x = a(y - k)^n + r$ türünden eğrilerde de geçerlidir.

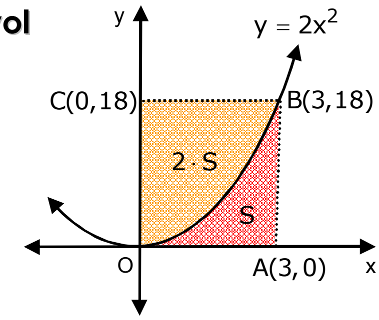
Uygulama-1.1

$y = 2x^2$ eğrisi ile $x = 3$ ve $y = 0$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm

1. yol



Şekli inceleyiniz.

$A(OABC) = 3 \cdot 18 \quad \Rightarrow \quad S = 18$ olur.

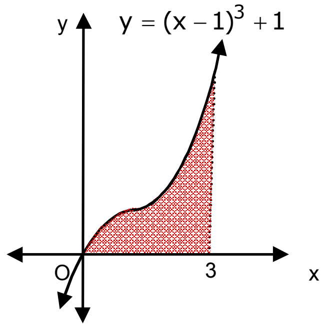
2. yol

$$S = \int_0^3 2x^2 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad S = \left.\frac{2 \cdot x^3}{3}\right]_0^3 \quad \Rightarrow \quad S = 18$$

Dikkat edilirse; problemin integral ile çözümü, pratik bilgi ile yaptığımız çözümden daha zor ya da daha uzun olmamıştır. Burada; "pratik bilgi", farklı bir çözüm yolu seçeneği getirmiştir.

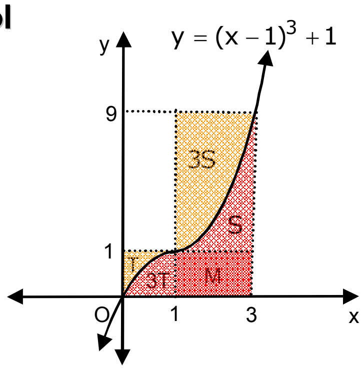
Uygulama-1.2

$y=(x-1)^3+1$ eğrisi ile $x=0$, $x=3$ ve $y=0$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm

1. yol



Şekli inceleyiniz.

$y=(x-1)^3+1$ eğrisi, $y=x^3$ eğrisinin $f:(x,y)\to(x+1,y+1)$ ötelenmesi ile elde edilir.

$y=x^3$ eğrisinin dönüm noktası (0,0) noktası;

$y=(x-1)^3+1$ eğrisinin dönüm noktası (1,1) noktasıdır.

$4T=1 \;\Rightarrow\; 3T=\frac{3}{4}$;

$M=2$ ve

$4S=16 \Rightarrow S=4$ olup

$3T+M+S=\frac{27}{4}$ bulunur.

2. yol

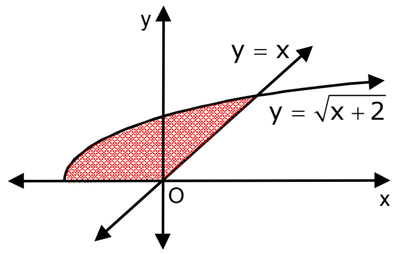
$$S=\int_0^3\left[(x-1)^3+1\right]\cdot dx \;\Rightarrow\; S=\left.\frac{(x-1)^4}{4}+x\right]_0^3$$

$$\Rightarrow\; S=\frac{27}{4}$$

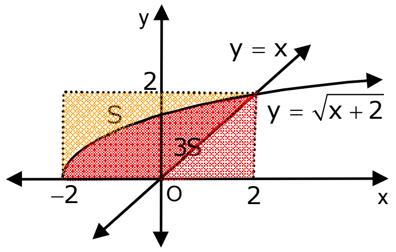
Burada da; ilk akla gelecek olan integral ile çözüm, pratik bilgi ile yaptığımız çözümden daha “pratik” gözükmektedir.

Uygulama-1.3

$y=\sqrt{x+2}$ eğrisi ile $y=x$ ve $y=0$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm



Şekli inceleyiniz.

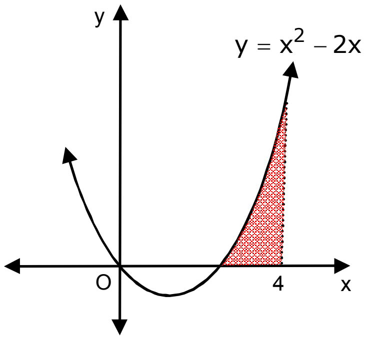
$y=\sqrt{x+2} \;\Rightarrow\; x=f(y)=y^2-2$ olup eğrinin, tepesi (-2,0) olan bir parabol yayı olduğu görülür.

$4\cdot S=4\cdot 2 \;\Rightarrow\; 3\cdot S=6$ olur.

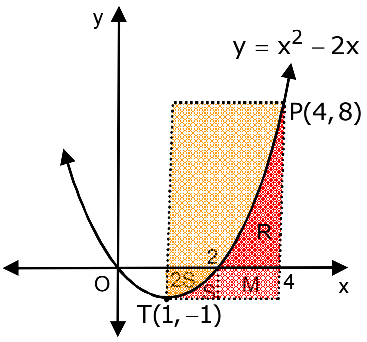
İstenen alan, 3S ile açık renkli üçgensel bölgenin alanının farkıdır: $6-\frac{2\cdot 2}{2}=4$

Uygulama-1.4

$y = x^2 - 2x$ eğrisi ile $x = 4$ ve $y = 0$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm



Şekli inceleyiniz.

$y = x^2 - 2x$ parabolünün tepe noktasının $T(1,-1)$ olduğu ve x eksenini başlangıç noktası ile (2,0) noktalarında kestiği bulunur. Büyük dikdörtgenin alanının 27 birimkare olduğu görülür.

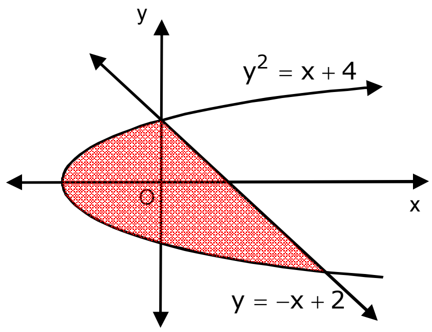
$S + M + R = \frac{27}{3}$, $S = \frac{1}{3}$ ve $M = 2$ olup

$R = \frac{20}{3}$ bulunur.

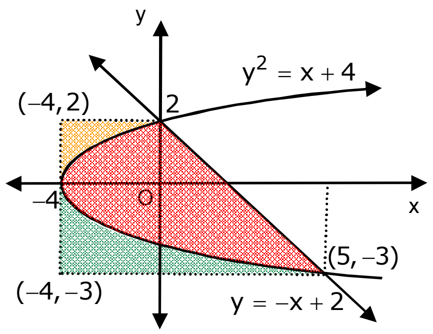
Pratik bilgiler, özümsenmiş matematiksel kavramların meyveleridirler. Matematiksel özlerinden koparıldıklarında tatsız, tuzsuz, yararsız kalakalırlar.

Uygulama-1.5

$y^2 = x + 4$ parabolü ile $y = -x + 2$ doğrusunun sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm



Şekli inceleyiniz.

Parabol ile doğrunun kesim noktaları $(0,2)$ ve $(5,-3)$ olarak bulunur.

İstenen alan = Yamuğun alanı
– Turuncu alan – Yeşil alan

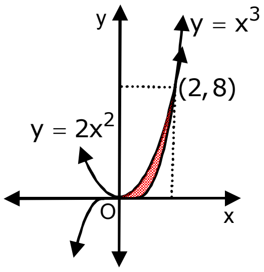
$\Rightarrow$ İstenen alan $= \frac{(4+9)\cdot 5}{2} - \frac{4\cdot 2}{3} - \frac{9\cdot 3}{3}$

$\Rightarrow$ İstenen alan $= \frac{125}{6}$ olur.

Uygulama-1.6

$y = 2x^2$ parabolü ile $y = x^3$ eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm



Şekli inceleyiniz.

$y=2x^2$ eğrisi ile $y=x^3$ eğrisi $(0,0)$ noktası; $(0,0)$ ve $(2,8)$ noktalarında kesişirler.

Eğrilerin sınırladığı alan, $y=2x^2$ eğrisinin altındaki alan ile $y=x^3$ eğrisinin altındaki alanın farkı olur.

$$\text{İstenen alan} = \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{2.8}{4}$$

$$\Rightarrow \text{İstenen alan} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

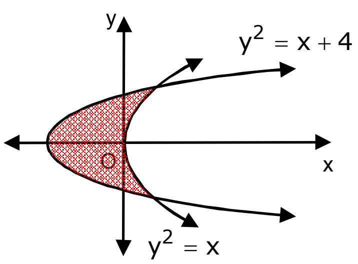
Matematiksel kavramı özümsemiş olan öğrenci, pratik bilginin tutsağı olmaz. Kendisi bilgiyi tutsak eder. Nerede, hangi yöntem uygun ise o yöntemi uygular.

Problem-1.1

$y=x^2-4x$ ile $y=-x^2-6x-8$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

Problem-1.2

$y^2=x$ ile $y^2=2x+4$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.



Pratik Bilgi-2 (Basit Kesirlere Ayırma)

Verilen bir kesir basit kesirlere ayrıldığında,
paydası 1. dereceden olan kesrin payındaki sayı,
o kesrin paydasının kökünün
verilen kesirde o paydanın atılmasıyla kalan kısımda
bilinmeyen yerine konularak bulunur.

Uygulama-2.1

$\dfrac{x^2-2x-1}{x^3-x}$ ifadesini basit kesirlere ayırınız.

Çözüm

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3-x} \equiv \frac{x^2-2x-1}{x(x-1)(x+1)} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x-1}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \qquad (2)$$

(2) özdeşliğinde iki tarafı x ile çarpalım:

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x+1)} \equiv A + \frac{B\cdot x}{x-1} + \frac{C\cdot x}{x+1}$$

$x=0$ konulursa, $A=1$ bulunur.

(2) özdeşliğinde iki tarafı $x-1$ ile çarpalım:

$$\frac{x^2-2x-1}{x(x+1)} \equiv \frac{A\cdot(x-1)}{x} + B + \frac{C\cdot(x-1)}{x+1}$$

$x=1$ konulursa, $B=-1$ bulunur.

(2) özdeşliğinde iki tarafı $x+1$ ile çarpalım:

$$\frac{x^2-2x-1}{x(x-1)} \equiv \frac{A\cdot(x+1)}{x} + \frac{B\cdot(x+1)}{(x-1)} + C$$

$x=-1$ konulursa, $C=1$ bulunur.

$$\frac{x^2-2x-1}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

elde edilir.

Yukarıda yaptığımız işlemleri, pratik bir yaklaşımla, şöyle ifade edebiliriz:

$$\frac{x^2-2x-1}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$ özdeşliğinde

A değerini bulmak için,

$$\frac{x^2-2x-1}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

özdeşliğin solunda, paydadaki x çarpanı dışında kalan ifadede $x=0$ konulur.

B değerini bulmak için,

$$\frac{x^2-2x-1}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

özdeşliğin solunda, paydadaki $x-1$ çarpanı dışında kalan ifadede $x=1$ konulur.

C değerini bulmak için,

$$\frac{x^2-2x-1}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

özdeşliğin solunda, paydadaki $x+1$ çarpanı dışında kalan ifadede $x=-1$ konulur.

Burada yaptığımız, polinomlardaki "Belirsiz Kat Sayılar Teoremi"ni daha kestirme bir yoldan uygulamaktır. Bunu uygularken, "Uygulama-2.1"in ilk çözümünü zihnimizde canlandırmalıyız. Örneğin; A değerini bulmak için özdeşliğin solunda x çarpanı dışında kalan ifadede x = 0 koymamızın ne anlama geldiğini bilmeliyiz. Ne yaptığımızı bilmemiz, yeni çözüm seçenekleri üretmemizde bize çok yardımcı olacaktır.

Bu yaklaşımla; paydaların daha yüksek dereceden olduğu durumlarda da, "Pratik Bilgi-2"yi uygulayabiliriz.

Uygulama-2.2

$\frac{x^2+2x-1}{x^3+x}$ ifadesini basit kesirlere ayırınız.

Çözüm

Paydayı çarpanlarına ayırıp verilen kesri basit kesirlerin toplamı olarak yazalım:

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3+x} \equiv \frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

A değerini bulmak için,

$$\frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

özdeşliğinin solunda, paydadaki x çarpanı dışında kalan ifadede $x=0$ konulur ve $A=-1$ bulunur.

B ve C değerlerini bulmak için,

$$\frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

özdeşliğinin solunda, paydadaki x^2+1 çarpanı dışında kalan ifadede $x^2=-1$ konulur.

$$\frac{2x-2}{x} \equiv Bx+C$$ elde edilir.

İki taraf x ile çarpılırsa,

$$\frac{2x-2}{x} \equiv Bx+C \;\Rightarrow\; 2x-2 \equiv Bx^2+Cx$$ olur.

Bu son özdeşlik, önceki özdeşlikte tüm x^2 ler yerine "-1" koyamamış olduğumuzu gösterir. Burada da $x^2=-1$ konulursa;

$$2x-2 \equiv Bx^2+Cx \;\Rightarrow\; 2x-2 \equiv -B+Cx$$
$$\Rightarrow B=2 \text{ ve } C=2$$

bulunur.

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3+x} \equiv \frac{-1}{x}+\frac{2x+2}{x^2+1}$$ elde edilir.

Açıklama: İşlemlerin tüm aşamalarını göstererek çözüm yapsaydık, şöyle olacaktı:

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3+x} \equiv \frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-1}{x(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow x^2+2x-1 \equiv A(x^2+1)+x\cdot(Bx+C)$$

$$\Rightarrow x^2+2x-1 \equiv A(x^2+1)+Bx^2+Cx)$$

Bu son özdeşlikte $x^2=-1$ konulursa,

$2x-2 \equiv -B+Cx \Rightarrow B=2$ ve $C=2$ bulunur.

Uygulama-2.3

$\dfrac{x-3}{(x^2-1)\cdot(x^2+x+1)}$ ifadesini basit kesirlere ayırınız.

Çözüm

$$\frac{x-3}{(x^2-1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$\equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Özdeşliğin sol yanında $x-1$ çarpanı dışındaki ifadede $x=1$ konulursa, $A=\frac{-1}{3}$ ve

$x+1$ çarpanı dışındaki ifadede $x=-1$ konulursa, $B=2$ bulunur.

x^2 yerine $-x-1$ konulursa;

$$\frac{x-3}{-x-1-1} \equiv Cx+D$$

$$\Rightarrow x-3 \equiv Cx(-x-2)+D(-x-2)$$

$$\Rightarrow x-3 \equiv -Cx^2+(-2C-D)x-2D$$

$$\Rightarrow x-3 \equiv -C(-x-1)+(-2C-D)x-2D$$

$$\Rightarrow x-3 \equiv (-C-D)x+C-2D$$

$$\Rightarrow -C-D \equiv 1 \text{ ve } C-2D=-3$$

$$\Rightarrow C=\frac{-5}{3} \text{ ve } D=\frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} \equiv \frac{-1}{3(x-1)}+\frac{2}{x+1}-\frac{5x-2}{3(x^2+x+1)}$$

elde edilir.

Uygulama-2.4

$\dfrac{4x^3-6x^2+3x-10}{(x-1)^2\cdot(x^2-4)}$ ifadesini basit kesirlere ayırınız.

Çözüm

$$\frac{4x^3-6x^2+3x-10}{(x-1)^2\cdot(x^2-4)} \equiv \frac{4x^3-6x^2+3x-10}{(x-1)^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{4x^3-6x^2+3x-10}{(x-1)^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$$

$$\equiv \frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}$$

Özdeşliğin sol yanında $(x-1)^2$ çarpanı dışındaki ifadede $x^2=2x-1$ konulursa,

$$\frac{4x(2x-1)-6(2x-1)+3x-10}{2x-1-4} \equiv Ax+B$$

$$\Rightarrow 8x^2-13x-4 \equiv (Ax+B)(2x-5)$$

$$\Rightarrow 8x^2-13x-4 \equiv 2Ax^2+(-5A+2B)x-5B$$

$$\Rightarrow 3x-12 \equiv (-A+2B)-2A-5B$$

$$\Rightarrow -A+2B=3 \text{ ve } -2A-5B=-12$$

$$\Rightarrow A=1 \text{ ve } B=2 \text{ bulunur.}$$

Özdeşliğin sol yanında $x-2$ çarpanı dışındaki ifadede $x=2$ konulursa, $C=1$ ve

$x+2$ çarpanı dışındaki ifadede $x=-2$ konulursa, $D=2$ bulunur.

$$\frac{4x^3-6x^2+3x-10}{(x-1)^2\cdot(x^2-4)} \equiv \frac{x+2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2}$$

$$\equiv \frac{(x-1)+3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2}$$

$$\equiv \frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2}$$

elde edilir.