Alıştırmalar ve Problemler – 1

1. a, c, d, f, i, j maddelerindeki ifadeler birer önermedir. Diğerleri önerme değildir.

2. a. 1 b. 1 c. 0 d. 1 e. 1 f. 0
g. 0 h. 1 i. 0 j. 1 k. 0

l. $(p \veebar q') \wedge (q \veebar r)$ önermesinde

$p \equiv q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ verilmiştir.

$(p \veebar q') \wedge (q \veebar r) \equiv (1 \veebar 1') \wedge (1 \veebar 0) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$ olur.

Önermenin sözel karşılığı şöyle olabilir:
"2, 5'ten küçüktür ya da 9, 2'den büyük değildir.
ve
9, 2'den büyüktür ya da 5 ile 9 birbirine eşittir."

3. a. Hakan çalışmayacak ve sınıfını geçecek.
b. Akın veya Ferit okula gitmedi.
c. 23 sayısı asal değildir ve çifttir. (0)
d. $3^3 \neq 9$ veya $2^4 \leq 8$ (1)
e. $8 \geq 5$ ve Okan uzun boylu değildir.
f. Gülse bisiklet ve bilgisayar aldı.

4. a. 0 b. 0 c. 1 d. 1 e. 0 f. 1
g. 0 h. 1 i. 0 j. 1 k. 1 l. 1
m. 1 n. 1 o. 0 p. 0 r. 0 s. 0
t. 0 u. 1 v. 0 y. 1 z. 0

5. a. $p' \wedge (q' \vee r')$ b. $p' \veebar q \equiv p \veebar q'$
c. $p' \vee (q' \wedge r)$ d. $(p' \vee q) \wedge r$
e. $p \wedge q' \wedge r$ f. $p' \vee q \vee r$
g. $(p \vee q') \wedge r$ h. $(p \veebar q) \wedge r'$
i. $r' \veebar (p \veebar q)$ j. $(p \veebar q) \vee (q \veebar r')$
k. $(p' \vee r) \wedge (q' \vee r)$ l. $(q \wedge r) \vee p' \vee r'$

6. a. p b. 0 c. 1 d. p e. 0 f. 1
g. p' h. p i. 1

7. a. $p \wedge q$ b. 0 c. $p \veebar q$ d. $p \vee q$
e. q' f. 1 g. $p \vee q'$ h. p'
i. p j. $p \vee q$ k. 0 l. $p' \wedge q$
m. 1 n. 1 o. $p \veebar q'$ p. $p' \wedge q'$
r. $p \veebar q'$ s. $p \vee q'$ t. p u. $p \vee q$
v. q y. $p' \vee q$ z. 0

...

p maddesindeki, $(p \veebar q') \wedge (q \veebar r)$ önermesi üzerinde çalışalım:

$r \equiv 1$ ise
$(p \veebar q') \wedge (q \veebar r) \equiv (p \veebar q') \wedge (q \veebar 1) \equiv (p \veebar q') \wedge q'$ olur.

Bu önerme sadeleştirilebilir.

I. yol

$$(p \veebar q') \wedge q' \equiv [(p' \wedge q') \vee (p \wedge q)] \wedge q'$$
$$\equiv (p' \wedge q' \wedge q') \vee (p \wedge q \wedge q')$$
$$\equiv p' \wedge q'$$

II. yol

$q \equiv 1$ ise $(p \veebar q') \wedge q' \equiv 0$;
$q \equiv 0$ ise $(p \veebar q') \wedge q' \equiv p'$ olduğu görülür.
Bu da; $(p \veebar q') \wedge q' \equiv p' \wedge q'$ olduğunu gösterir.

8. a. $p \wedge q$ b. p c. $p \veebar q$ d. $p \vee q$
e. q f. q' g. $p \vee q'$ h. 0
i. p' j. p k. 0 l. 1
m. $p' \wedge q'$ n. $p' \veebar q$ o. $p \veebar q$ p. $p \wedge q$
r. $p \veebar q$ s. $p' \vee q$ t. $p' \veebar q$ u. $p' \vee q$
v. q' y. 1 z. $p \wedge q'$

...

t maddesindeki, $(r' \wedge q) \veebar (r \veebar p)'$ önermesi üzerinde çalışalım:

$r \equiv 0$ ise

$(r' \wedge q) \veebar (r \veebar p)' \equiv (1 \wedge q) \veebar (0 \veebar p)' \equiv q \veebar p'$ olur.

9. **a.** p **b.** 0 **c.** 0 **d.** p **e.** 0 **f.** 1
g. 1 **h.** 0 **i.** 1 **j.** p **k.** p **l.** p'
m. 1 **n.** 1 **o.** p **p.** 0 **r.** p **s.** 1
t. 1 **u.** 1 **v.** 1 **y.** 1 **z.** 0

10. **a.** $p \wedge q$ **b.** $p \wedge q'$ **c.** $p \veebar q$ **d.** $p \vee q$
e. 0 **f.** 1 **g.** $p \vee q'$ **h.** $p' \wedge q$
i. $p' \veebar q$ **j.** $p \vee q$ **k.** q **l.** $p' \vee q'$
m. $p' \vee q$ **n.** $p' \vee q$ **o.** p **p.** 0
r. p **s.** $p \veebar q'$ **t.** $p' \veebar q$ **u.** $p' \vee q$
v. $p \vee q'$ **y.** 1 **z.** $p \wedge q'$

...

s maddesindeki $(p \veebar q') \vee (p' \veebar r)$ önermesi üzerinde çalışalım:

$q \equiv r$ ise

$(p \veebar q') \vee (p' \veebar r) \equiv (p \veebar q') \vee (p' \veebar q) \equiv p \veebar q'$ olur.

11. **a.** $p \wedge (p' \vee q) \equiv (p \wedge p') \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$

b. $q \vee (p \wedge q') \equiv (q \vee p) \wedge (q \vee q') \equiv p \vee q$

c. $[(p \vee q') \wedge p'] \vee q \equiv p' \vee q$

d. $[p \vee (p \wedge q')] \wedge (p \vee q') \equiv p$

e. $(p \wedge q)' \vee (p \vee r) \equiv p' \vee q' \vee p \vee r$
$\equiv p' \vee p \vee q' \vee r \equiv 1$

f. $(p \wedge q)' \wedge (p' \vee q) \equiv (p' \vee q') \wedge (p' \vee q)$
$\equiv p' \vee (q' \wedge q) \equiv p' \vee 0 \equiv p'$

g. $(p' \wedge q) \veebar (p \veebar q') \equiv p \Rightarrow q$

h. $(p \wedge q)' \veebar (p \vee q) \equiv p \veebar q'$

i. $(p \wedge q') \vee \left[(p \wedge q)' \vee q'\right]$
$\equiv (p \wedge q') \vee p' \vee q' \vee q'$
$\equiv [(p \vee p') \wedge (q' \vee p')] \vee q'$
$\equiv q' \vee p' \vee q' \equiv p' \vee q'$

j. $p \vee \left[(p \wedge q)' \wedge (p \vee q)'\right]$
$\equiv p \vee [(p' \vee q') \wedge (p' \wedge q')]$
$\equiv (p \vee p' \vee q') \wedge (p \vee p') \wedge (p \vee q') \equiv p \vee q'$

k. $(p' \veebar q) \vee p \equiv (p' \wedge q') \vee (p \wedge q) \vee p$
$\equiv (p' \wedge q') \vee (p \wedge q) \vee p$
$\equiv (p' \wedge q') \vee p \equiv p \vee q'$

l. $p \veebar (p \vee q) \equiv [p' \wedge (p \vee q)] \vee [p \wedge (p' \wedge q')] \equiv p' \wedge q$

m. $(p \veebar q') \wedge (p' \veebar q) \equiv (p \veebar q') \wedge (p \veebar q') \equiv p \veebar q'$

n. $(p \wedge q') \veebar (p' \wedge q)$
$\equiv [(p' \vee q) \wedge (p' \wedge q)] \vee [(p \wedge q') \wedge (p \vee q')]$
$\equiv (p' \wedge q) \vee (p \wedge q') \equiv p \veebar q$

o. $p \veebar (p \veebar q) \equiv q$

Açıklayalım:

$q \equiv 1$ ise $p \veebar (p \veebar q) \equiv 1$; $q \equiv 0$ ise $p \veebar (p \veebar q) \equiv 0$ olur. $p \veebar (p \veebar q) \equiv q$ olduğu görülür.

p. $(p' \veebar q) \veebar q' \equiv p$

Açıklayalım:

$p \equiv 1$ ise $(p' \veebar q) \veebar q' \equiv 1$; $p \equiv 0$ ise $(p' \veebar q) \veebar q' \equiv 0$ olur. $(p' \veebar q) \veebar q' \equiv p$ olduğu görülür.

12. **a.** $p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge 1) \vee (p \wedge q)$
$\equiv p \wedge (1 \vee q) \equiv p \wedge 1 \equiv p$

b. $(p \vee q) \wedge q \equiv (p \vee q) \wedge (0 \vee q) \equiv (p \wedge 0) \vee q \equiv q$

c. $[(p \vee q') \wedge p'] \vee q$
$\equiv [(p \wedge p') \vee (q' \wedge p')] \vee q$
$\equiv (q' \wedge p') \vee q \equiv (q' \vee q) \wedge (p' \vee q) \equiv p' \vee q$

d. $[p \vee (p \wedge q')] \wedge (p \vee q')$
$\equiv (p \vee p) \wedge (p \vee q') \wedge (p \vee q')$
$\equiv p \wedge (p \vee q') \equiv (p \vee 0) \wedge (p \vee q')$
$\equiv p \vee (0 \wedge q') \equiv p$

e. $(p \vee q) \wedge [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q')]$

$\equiv [(p \vee q) \wedge p \wedge q] \vee [(p \vee q) \wedge (p' \wedge q')]$

$\equiv (p \wedge q) \vee [(p \vee q) \vee (p \vee q)'] \equiv p \wedge q$

f. $(p \wedge q) \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q')$

$\equiv [(p \vee p') \wedge q] \vee (p' \wedge q')$

$\equiv q \vee (p' \wedge q') \equiv (q \vee p') \wedge (q \vee q') \equiv p' \vee q'$

g. $(p \vee q) \veebar (p \wedge q)$

$\equiv (p \vee q) \veebar (p \wedge q)$

$\equiv [(p' \wedge q') \wedge (p \wedge q)] \vee [(p \vee q) \wedge (p' \vee q')]$

$\equiv [(p \vee q) \wedge p'] \vee [(p \vee q) \wedge p']$

$\equiv (p' \wedge q) \vee (p \wedge q') \equiv p \veebar q$

h. $(p \vee q) \wedge (p \veebar q)$

$\equiv (p \vee q) \wedge [(p' \wedge q) \vee (p \wedge q')]$

$\equiv [(p \vee q) \wedge (p' \wedge q)] \vee [(p \vee q) \wedge (p \wedge q')]$

$\equiv (p' \wedge q) \vee (p \wedge q') \equiv p \veebar q$

i. $(p' \wedge q) \veebar (p \veebar q') \equiv p' \vee q$

Yalnız bağlaçların özellikleri ile çalışılırsa, işlemler çok uzar. Kısa yolu seçelim:

$p \equiv 1$ için;

$(p' \wedge q) \veebar (p \veebar q') \equiv p' \vee q$

$\Rightarrow (0 \wedge q) \veebar (1 \veebar q') \equiv 0 \vee q$

$\Rightarrow 0 \veebar q \equiv 0 \vee q$

$\Rightarrow q \equiv q$ olur.

$p \equiv 0$ için;

$(p' \wedge q) \veebar (p \veebar q') \equiv p' \vee q$

$\Rightarrow (1 \wedge q) \veebar (0 \veebar q') \equiv 1 \vee q$

$\Rightarrow q \veebar q' \equiv 1$

$\Rightarrow 1 \equiv 1$ olur.

p'nin her doğruluk değeri için sağlandığına göre; denklik doğrudur.

j. $(p \wedge q)' \veebar (p \vee q) \equiv p \veebar q'$

denkliğinin doğruluğunu, istediğiniz yollarla siz gösteriniz.

13. $(p \vee q)' \vee (q' \wedge r)' \equiv 0$

$\Rightarrow [(p \vee q \equiv 1) \wedge (q' \wedge r \equiv 1)]$

$\Rightarrow q \equiv 0$ ve $p \equiv r \equiv 1$ bulunur.

14. $(p \wedge q')' \vee r' \equiv 0$

$\Rightarrow p \equiv r \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ bulunur.

a. 1	**b.** 1	**c.** 1	**d.** 0
e. 0	**f.** 1	**g.** 0	**h.** 1

15. $(p \vee q')' \wedge r \equiv 1$

$\Rightarrow p \equiv 0$ ve $q \equiv r \equiv 1$ bulunur.

a. 0	**b.** 0	**c.** 1	**d.** 0
e. 0	**f.** 1	**g.** 1	**h.** 1

16. $(p \vee q) \wedge (q \wedge r) \equiv 1$

$\Rightarrow q \equiv r \equiv 1$ bulunur.

a. p	**b.** 0	**c.** p'	**d.** 0
e. 0	**f.** p'	**g.** 1	**h.** 1

17. $p \vee (p \wedge q' \wedge r) \equiv 0$

$\Rightarrow p \equiv 0$ bulunur.

a. q'	**b.** $q' \wedge r$	**c.** r	**d.** 0
e. $q' \wedge r$	**f.** $q' \veebar r$	**g.** r	**h.** 1

18. **a.** $p \vee (p \wedge q)' \equiv p \vee p' \vee q' \equiv 1$

b. $(p \vee q) \vee (p \wedge q)' \equiv p \vee q \vee p' \vee q' \equiv 1$

c. $(p' \vee q) \vee (p \wedge q') \equiv p' \vee [(q \vee p) \wedge (q \vee q')]$

$\equiv p' \vee q \vee p \equiv 1$

d. $p \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q') \equiv p \vee [p' \wedge (q \vee q')]$

$\equiv p \vee p' \equiv 1$

e. $(p \wedge q) \vee (p' \wedge q) \vee q' \equiv [(p \vee p') \wedge q] \vee q'$

$\equiv q \vee q' \equiv 1$

f. $[(p \vee q) \wedge p']' \vee q \equiv (p \vee q)' \vee (p \vee q) \equiv 1$

g. $p\vee\left[(p'\vee q)\wedge(p\wedge q)'\right]\equiv p\vee\left[(p'\vee q)\wedge(p'\vee q')\right]$
$\equiv p\vee\left[p'\vee(q\wedge q')\right]\equiv p\vee p'\equiv 1$

h. $(p\veebar q)\vee(p'\veebar q)\equiv(p\veebar q)\vee(p\veebar q)'\equiv 1$

i. $(p\wedge q')\veebar(p'\vee q)\equiv(p\wedge q')\veebar(p\wedge q')'\equiv 1$

19. a. $(p\wedge q')\wedge(p\vee q)'\equiv p\wedge q'\wedge p'\wedge q'\equiv 0$

b. $p\wedge(p'\vee q)\wedge(p\wedge q)'$
$\equiv\left[(p\wedge p')\vee(p\wedge q)\right]\wedge(p\wedge q)'$
$\equiv(p\wedge q)\wedge(p\wedge q)'\equiv 0$

c. $p\wedge q'\wedge(p'\vee q)\equiv(p\wedge q')\wedge(p\wedge q')'\equiv 0$

d. $(p'\vee q)\wedge(q'\vee r)\wedge(p\wedge r')$
$\equiv p\wedge(p'\vee q)\wedge(q'\vee r)\wedge r'$
$\equiv\left[(p\wedge p')\vee(p\wedge q)\right]\wedge\left[(q'\wedge r')\vee(r\wedge r')\right]$
$\equiv p\wedge q\wedge q'\wedge r'\equiv 0$

e. $(p\veebar q)\wedge(p'\veebar q)\equiv(p\veebar q)\wedge(p\veebar q)'\equiv 0$

f. $\left[p\veebar(p'\wedge q)\right]\wedge(p'\wedge q')$
$\equiv\left\{\left[p'\wedge(p'\wedge q)\right]\vee\left[p\wedge(p\vee q')\right]\right\}\wedge(p'\wedge q')$
$\equiv\left[(p'\wedge q)\vee p\right]\wedge(p'\wedge q')$
$\equiv\left[(p'\vee p)\vee(q\vee p)\right]\wedge(p\vee q)'$
$\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee q)'\equiv 0$

20. a. 1 **b.** p' **c.** 1 **d.** p' **e.** p **f.** 1
g. 1 **h.** 0 **i.** p' **j.** p **k.** p' **l.** p'

21. $(p\wedge q)\Rightarrow(q'\vee r)\equiv 0$
$\rightarrow\ (p\wedge q\equiv 1)\wedge(q'\vee r\equiv 0)$
$\rightarrow\ p\equiv q\equiv 1$ ve $r\equiv 0$ bulunur.

a. 1 **b.** 1 **c.** 0 **d.** 0 **e.** 1 **f.** 0

22. $(p'\Rightarrow q)\Rightarrow(q'\Rightarrow r')\equiv 0$
$\rightarrow\ p'\Rightarrow q\equiv 1$ ve $q'\Rightarrow r'\equiv 0$
$\rightarrow\ p\equiv r\equiv 1$ ve $q\equiv 0$ bulunur.

a. 1 **b.** 1 **c.** 0 **d.** 1 **e.** 1 **f.** 0

23. $(p\vee q')\Rightarrow(q\vee r')\equiv 0$
$\rightarrow\ p\vee q'\equiv 1$ ve $q\vee r'\equiv 0$
$\rightarrow\ q\equiv 0$ ve $r\equiv 1$ bulunur.

a. 1 **b.** 1 **c.** p' **d.** p **e.** 1 **f.** 0

24. $\left[p\vee(q\wedge r)\right]\Rightarrow p'\equiv 0$ olduğunda, $p\equiv 1$ olur.

a. 1 **b.** $q\vee r$ **c.** $q\Leftrightarrow r$ **d.** $q'\vee r$ **e.** $q\vee r$

f. $(p\Leftrightarrow r)\veebar\left[(p\vee q)\wedge(q\Rightarrow r)\right]$ önermesinde p yerine $p\equiv 1$ değerini koyalım:

$(p\Leftrightarrow r)\veebar\left[(p\vee q)\wedge(q\Rightarrow r)\right]$
$\equiv(1\Leftrightarrow r)\veebar\left[(1\vee q)\wedge(q\Rightarrow r)\right]$
$\equiv r\veebar(q'\vee r)$
$\equiv\left[r'\wedge(q'\vee r)\right]\vee\left[r\wedge(q\wedge r')\right]$
$\equiv r'\wedge q'$ olur.

25. $\left[p\vee(q\wedge r)\right]\Rightarrow(p\wedge r)\equiv 1$ ise $p\wedge r\equiv 1$ ve bunun sonucu olarak $p\equiv r\equiv 1$ olabilir.
Bu durumda, $(q\wedge r)\Rightarrow p\equiv 1$ olur.

$\left[p\vee(q\wedge r)\right]\Rightarrow(p\wedge r)\equiv 1$ olduğunda $p\wedge r\equiv 0$ ve $p\vee(q\wedge r)\equiv 0$ da olabilir.
Bu denklikler, $p\equiv q\equiv 0$ veya $p\equiv r\equiv 0$ denkliklerini gerektirir.
Bu durumda da, $(q\wedge r)\Rightarrow p\equiv 1$ olur.

26. $\left[p\vee(q\wedge r)\right]\Rightarrow(p\wedge r)\equiv 1$ ise $p\wedge r\equiv 1$ ve bunun sonucu olarak $p\equiv r\equiv 1$ olabilir.

Bu durumda, q önermesinin doğruluk değeri belirsiz olacağından $p\Rightarrow(q\wedge r)$ önermesinin doğruluk değeri de **belirsiz** olur.

$p\wedge r\equiv 0$ durumunda da aynı belirsizlik gelir.
Bu durumda belli bir değerin gelmesinin de, bir anlamı olmayacaktı.

27. a. $q \Rightarrow p$: *"Kalın giyiniyorsan hava soğuktur."*

b. $p' \Rightarrow q'$: *"Hava soğuk değilse kalın giyinmezsin."*

c. $q' \Rightarrow p'$: *"Kalın giyinmiyorsan hava soğuk değildir."*

d. $p \wedge q'$: *"Hava soğuktur ve kalın giyinmezsin."*

28. a. Doğruluk değeri 0'dır.
Olumsuzu, "$(3<5)\wedge(-3\geq -5)$" olur.

b. Doğruluk değeri 1'dir.
Olumsuzu, *"Ankara Türkiye'dedir ve Roma İtalya'da değildir."* olur.

c. Doğruluk değeri 1'dir.
Olumsuzu, "$\left(-2^4=16\right)\wedge\left(-3^3\neq -27\right)$" olur.

d. Doğruluk değeri 1'dir.
Olumsuzu, "$(2<5)\wedge(4\geq 25)$" olur.

29. a. $\left[(p\wedge q)'\wedge q'\right]\Rightarrow p \equiv \underbrace{(p\wedge q)\vee q}_{q}\vee p \equiv p\vee q$

b. $(p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$

$\equiv \underbrace{(p'\vee q)\wedge q}_{q}\Rightarrow p$

$\equiv q\Rightarrow p \equiv p\vee q'$

c. $(p\vee q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$

$\equiv (p\vee q)'\vee\left[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\right]$

$\equiv (p'\wedge q')\vee\left[(p'\vee q)\wedge(q'\vee p)\right]$

$\equiv (p'\wedge q')\vee\left\{\left[(p'\vee q)\wedge q'\right]\vee\left[(p'\vee q)\wedge p\right]\right\}$

$\equiv (p'\wedge q')$

$\quad\vee\left[(p'\wedge q')\vee(q\wedge q')\vee(p'\wedge p)\vee(q\wedge p)\right]$

$\equiv (p'\wedge q')\vee(p'\wedge q')\vee(p\wedge q)$

$\equiv (p'\wedge q')\vee(p\wedge q)$

$\equiv \left[(p'\wedge q')\vee p\right]\wedge\left[(p'\wedge q')\vee q\right]$

$\equiv (p'\vee p)\wedge(q'\vee p)\wedge(p'\vee q)\wedge(q'\vee q)$

$\equiv (q'\vee p)\wedge(p'\vee q)\equiv(q\Rightarrow p)\wedge(p\Rightarrow q)$

$\equiv p\Leftrightarrow q$

d. $\left[(p\wedge q')\Rightarrow p\right]\Rightarrow\left[(p\Rightarrow q)\vee q\right]$

$\equiv (p'\vee q\vee p)\Rightarrow\left[(p'\vee q)\vee q\right]$

$\equiv 0\Rightarrow\left[(p'\vee q)\wedge q\right]\equiv 1$

30. a. $p\Rightarrow(p\vee q)\equiv p'\vee p\vee q\equiv 1$

b. $(p\wedge q)'\wedge q\Rightarrow p'\equiv(p\wedge q)\vee q'\vee p'$

$\equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge q)'\equiv 1$

c. $(p'\Rightarrow q')\wedge q\Rightarrow p\equiv(p\vee q')\wedge q\Rightarrow p$

$\equiv (p'\wedge q)\vee q'\vee p\equiv(p'\wedge q)\vee(p'\wedge q)'\equiv 1$

d. $(p\wedge q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$ önermesi ancak
$p\wedge q\equiv 1$ ve $p\Leftrightarrow q\equiv 0$ iken yanlış olur.
$p\wedge q\equiv 1$ iken $p\equiv q\equiv 1$ ve $p\Leftrightarrow q\equiv 1$
olacağından, $(p\wedge q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)\equiv 1$ bulunur.

e. $A\equiv\left[(p\vee q)\Rightarrow r\right]\vee\left[(p\wedge q)\Rightarrow r'\right]$ önermesinde
$r\equiv 1$ iken,
$A\equiv\left[(p\vee q)\Rightarrow 1\right]\vee\left[(p\wedge q)\Rightarrow 0\right]\equiv 1$;
$r\equiv 0$ iken,
$A\equiv\left[(p\vee q)\Rightarrow 0\right]\vee\left[(p\wedge q)\Rightarrow 1\right]\equiv 1$
olduğundan, $A\equiv 1$ olup totolojidir.

f. $A\equiv\left[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\right]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ önermesinin yanlış olması, ancak
$p\Rightarrow r\equiv 0$ iken söz konusudur.
$p\Rightarrow r\equiv 0\Rightarrow(p\equiv 1$ ve $r\equiv 0)$ olup
$A\equiv\left[(1\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow 0)\right]\Rightarrow(1\Rightarrow 0)$

$\equiv(q\wedge q')\Rightarrow 0$

$\equiv 0\Rightarrow 0$

$\equiv 1$ olur.

O hâlde, A önermesi bir totolojidir.

31. a. $(p\vee q)\Rightarrow(p'\wedge q')\equiv(p\vee q)'\vee(p'\wedge q')$

$\equiv(p'\wedge q')\vee(p'\wedge q')$

$\equiv p'\wedge q'$ Çelişme değil.

b. $(p\Rightarrow q)\wedge p'\Rightarrow q'\equiv(p'\vee q)\wedge p'\Rightarrow q'$

$\equiv p'\Rightarrow q'$

$\equiv p\vee q'$ Çelişme değil.

c.

p	q	q'	$p\wedge q'$	$p\Leftrightarrow q$	$(p\wedge q')\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0

Önerme çelişme değildir.

Siz de, işlem özelliklerini kullanarak, bunu gösteriniz.

d. $\left[p\Rightarrow(p\vee q)\right]\Rightarrow\left[(p\wedge q)\wedge(p\Rightarrow q')\right]$

$$\equiv(p'\vee p\vee q)\Rightarrow\left[(p\wedge q)\wedge(p'\vee q')\right]$$
$$\equiv 1\Rightarrow\left[(p\wedge q)\wedge(p\wedge q)'\right]$$
$$\equiv 1\Rightarrow 0\equiv 0$$

Verilen önerme bir çelişmedir.

e. $(p'\vee q)\Rightarrow(p\veebar q)$ önermesi $p\veebar q\equiv 1$ iken doğrudur. Çelişme değildir.

f. $\left[(p\Rightarrow q)\veebar p\right]\Rightarrow q$ önermesi $q\equiv 1$ iken doğrudur. Çelişme değildir.

32. a. $P\Rightarrow Q$

$\equiv\left[(p\vee q)\Rightarrow q\right]\Rightarrow(p\Rightarrow q)$ önermesinde $p\Rightarrow q\equiv 0$ iken $p\equiv 1$ ve $q\equiv 0$'dır.

Bu durumda,
$(p\vee q\Rightarrow q)\equiv(1\vee 0\Rightarrow 0)\equiv 0$ olacağından
$(P\Rightarrow Q)\equiv 1$ olur.

$p\Rightarrow q\equiv 1$ iken zaten $P\Rightarrow Q\equiv 1$ olacağından, $P\Rightarrow Q$ önermesi totolojidir.

O hâlde; P, Q'yu gerektirir.

b. $P\Rightarrow Q$

$$\equiv\left[(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\right]\Rightarrow\left[p\Rightarrow(q\wedge r)\right]$$
$$\equiv\left[p\Rightarrow(q\wedge r)\right]\Rightarrow\left[p\Rightarrow(q\wedge r)\right]$$

($\Rightarrow$'nin $\wedge$ üzerine soldan dağılma öz.)

$P\Rightarrow Q$ totolojidir.

O hâlde; P, Q'yu gerektirir.

c ve **d**'yi siz çözünüz.

33. Önceki çözümlerden yararlanarak, siz yapınız.

34. Önceki çözümlerden yararlanarak, siz yapınız.

35. **p: *"Erdem doğru beslenir."***
q: *"Erdem spor yapar."*
r: *"Erdem sağlıklıdır."*
olarak sembolleştirilirse;

A : $(p\wedge q)\Rightarrow r$

B : $p\wedge q'$

C : r' olur.

$A\wedge B$ önermesinin **C**'yi gerektirmesi demek, **$A\wedge B\Rightarrow C$** önermesinin totoloji olması demektir.

$A\wedge B\Rightarrow C\equiv(p\wedge q\Rightarrow r)\wedge(p\wedge q')\Rightarrow r'$

$r'\equiv 0$ iken $r\equiv 1$ ve
$(p\wedge q\Rightarrow r)\wedge(p\wedge q')$
$$\equiv(p\wedge q\Rightarrow 1)\wedge(p\wedge q')$$
$$\equiv 1\wedge(p\wedge q')\equiv p\wedge q' \text{ olur.}$$

$p\wedge q'\equiv 1$ olduğunda $A\wedge B\Rightarrow C\equiv 0$ olacağından $A\wedge B\Rightarrow C$ önermesi bir totoloji değildir.
$A\wedge B$ önermesi C'yi gerektirmez.
A ve B önermelerinden,
"*Erdem sağlıklı değildir.*" sonucu çıkarılamaz.

36. **A : *"Gürbüz spor yapmazsa kilo veremez."***
B : *"Gürbüz spor yapıyor."*
C : *"Gürbüz kilo verecek."*

p : *"Gürbüz spor yapıyor."*
q : *"Gürbüz kilo verecek."*
sembolleştirmeleri ile,

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A: p'\Rightarrow q'}\\ \mathbf{B: p}\\ \mathbf{C: q}\end{array}\right\}\text{ olur.}$$

$A\wedge B\Rightarrow C\equiv(p'\Rightarrow q')\wedge p\Rightarrow q$
$$\equiv(p\vee q')\wedge p\Rightarrow q$$
$$\equiv p\Rightarrow q$$

olup $A\wedge B\Rightarrow C$ önermesi totoloji değildir.
A ve B önermelerinden
"***Gürbüz kilo verecek.***" sonucu çıkarılamaz.

37. A: ***"Bertrand Russell iyi bir mantıkçı ise iyi bir filozoftur. "***

B: ***"Bertrand Russell iyi bir filozoftur."***

C: ***"Bertrand Russell iyi bir mantıkçıdır."***

p : *"Bertrand Russell iyi bir mantıkçıdır."*

q : *"Bertrand Russell iyi bir filozoftur."*

sembolleştirmeleri ile,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A: \ p \Rightarrow q} \\ \mathbf{B: \ q} \\ \mathbf{C: \ p} \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \Rightarrow C &\equiv \left[(p \Rightarrow q) \wedge p\right] \Rightarrow p \\ &\equiv \left[(p' \vee q) \wedge p\right] \Rightarrow p \\ &\equiv q \Rightarrow p\end{aligned}$$

olup $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi totoloji değildir.

A ve B önermeleri

"***Bertrand Russell iyi bir mantıkçıdır***."

sonucunu gerektirmez.

38. A: ***"Savaş ya da Barış kazanır."***

B: ***"Savaş kazanamaz."***

C: ***"Barış kazanır."***

p : *"Savaş kazanır."*

q : *"Barış kazanır."*

sembolleştirmeleri ile,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A: \ p \veebar q} \\ \mathbf{B: \ p'} \\ \mathbf{C: \ q} \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv \left[(p \veebar q) \wedge p'\right] \Rightarrow q$$

$q \equiv 0$ iken $(p \veebar q) \wedge p' \equiv 0$ olup $(A \wedge B) \Rightarrow C$ totolojidir.

$A \wedge B$ önermesi C önermesini gerektirir.

39. A: ***"Ali iyi bir öğrenci ise derslerine çalışır."***

B: ***"Ali çok televizyon seyrederse derslerine çalışamaz."***

p : *"Ali iyi bir öğrencidir."*

q : *"Ali derslerine çalışır."*

r : *"Ali çok televizyon seyreder."*

sembolleştirmelerini yapalım.

a. C: ***"Ali iyi bir öğrenci ise çok televizyon seyretmez."*** olsun.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A: \ p \Rightarrow q} \\ \mathbf{B: \ r \Rightarrow q'} \\ \mathbf{C: \ p \Rightarrow r'} \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

$A \wedge B$ önermesi C önermesini gerektirir mi?

$$\begin{aligned}&(A \wedge B) \Rightarrow C \\ &\equiv \underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q')}_{?} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r')}_{0}\end{aligned}$$

$p \Rightarrow r' \equiv 0$ iken $p \equiv r \equiv 1$ ve

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') &\equiv (1 \Rightarrow q) \wedge (1 \Rightarrow q') \\ &\equiv q' \wedge q \equiv 0 \quad \text{olur.}\end{aligned}$$

$(A \wedge B) \Rightarrow C$ totolojidir.

A ve B öncüllerinden,

"***Ali iyi bir öğrenci ise çok televizyon seyretmez***." sonucunu çıkarmak geçerlidir.

b. D: ***"Ali iyi bir öğrenci değilse çok televizyon seyrediyordur."*** olsun.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A: \ p \Rightarrow q} \\ \mathbf{B: \ r \Rightarrow q'} \\ \mathbf{D: \ p' \Rightarrow r} \end{array}\right\}$$

$A \wedge B$ önermesi D önermesini gerektirir mi?

$$(A \wedge B) \Rightarrow D \equiv \underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q')}_{?} \Rightarrow \underbrace{(p' \Rightarrow r)}_{0}$$

$p' \Rightarrow r \equiv 0$ iken $p \equiv r \equiv 0$ ve

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') \equiv (0 \Rightarrow q) \wedge (0 \Rightarrow q') \equiv 1$$

olup $(A \wedge B) \Rightarrow D$ önermesi yanlış olur.

$(A \wedge B) \Rightarrow D$ totoloji olmadığından $A \wedge B$ önermesi D önermesini gerektirmez.

A ve B önermelerinden,

"***Ali iyi bir öğrenci değilse çok televizyon seyrediyordur***." sonucunun çıkarılması doğru değildir.

c. E: ***"Ali çok televizyon seyrediyorsa iyi bir öğrenci değildir."*** olsun.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A: \ p \Rightarrow q} \\ \mathbf{B: \ r \Rightarrow q'} \\ \mathbf{E: \ r \Rightarrow p'} \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

$A \wedge B$ önermesi E önermesini gerektirir mi?

$$(A \wedge B) \Rightarrow E \equiv \underbrace{[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q')]}_{?} \Rightarrow \underbrace{(r \Rightarrow p')}_{0}$$

$r \Rightarrow p' \equiv 0$ iken $p \equiv r \equiv 1$ ve

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') \equiv (1 \Rightarrow q) \wedge (1 \Rightarrow q') \equiv 0$

olur. Buna göre; $(A \wedge B) \Rightarrow E$ önermesi p, q ve r önermelerinin her doğruluk değeri için doğru olup totolojidir.

A ve B öncüllerinden, "***Ali çok televizyon seyrediyorsa, iyi bir öğrenci değildir.***" sonucunu çıkarmak geçerlidir.

d. **F: *"Ali çok televizyon seyretmiyorsa iyi bir öğrencidir."*** olsun.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A:\ p \Rightarrow q} \\ \mathbf{B:\ r \Rightarrow q'} \\ \mathbf{F:\ r' \Rightarrow p} \end{array}\right\} \text{ olur.}$$

$A \wedge B$ önermesi F önermesini gerektirir mi?

$$(A \wedge B) \Rightarrow F \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q')] \Rightarrow (r' \Rightarrow p)$$

$r' \Rightarrow p \equiv 0$ iken $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') \equiv 1$ olur.

$(A \wedge B) \Rightarrow F$ önermesi totoloji değildir.

A ve B önermeleri,
"***Ali çok televizyon seyretmiyorsa iyi bir öğrencidir.***" önermesini gerektirmez.

40. **A:*"Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır."*** önermesinin bileşenleri

p : *"Yağmur yağmıştır."*

q : *"Çamaşırlar ıslanmıştır."* önermeleridir.

a. **B : *"Yağmur yağmıştır."***
C : *"Çamaşırlar ıslanmıştır."*

$\mathbf{A:\ p \Rightarrow q}$

$\mathbf{B:\ p}$

$\mathbf{C:\ q}$

$A \wedge B$ önermesi C'yi gerektirir mi?

$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

$q \equiv 0$ iken $(p \Rightarrow q) \wedge p \equiv 0$ olur. (Neden?)

$(A \wedge B) \Rightarrow C$ önermesi totolojidir.

Öyleyse; $A \wedge B$ önermesi C'yi gerektirir.

b. **B : *"Çamaşırlar ıslanmıştır."***
C : *"Yağmur yağmıştır."*

$\mathbf{A:\ p \Rightarrow q}$

$\mathbf{B:\ q}$

$\mathbf{C:\ p}$

$A \wedge B$ önermesi C'yi gerektirir mi?

$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

$p \equiv 0$ iken $(p \Rightarrow q) \wedge q \equiv q$ olur. (Neden?)

$(A \wedge B) \Rightarrow C$ önermesi totoloji değildir.

Öyleyse; $A \wedge B$ önermesi C'yi gerektirmez.

c. **B : *"Çamaşırlar ıslanmamıştır."***
C : *"Yağmur yağmamıştır."*

$\mathbf{A:\ p \Rightarrow q}$

$\mathbf{B:\ q'}$

$\mathbf{C:\ p'}$

$A \wedge B$ önermesi C'yi gerektirir mi?

$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p'$

$p \equiv 0$ iken $(p \Rightarrow q) \wedge q' \equiv 0$ olur. (Neden?)

$(A \wedge B) \Rightarrow C$ önermesi totolojidir.

Öyleyse; $A \wedge B$ önermesi C'yi gerektirir.

d. **B : *"Yağmur yağmamıştır."***

C : *"Çamaşırlar ıslanmamıştır."*

$\mathbf{A:\ p \Rightarrow q}$

$\mathbf{B:\ p'}$

$\mathbf{C:\ q'}$

$A \wedge B$ önermesi C'yi gerektirir mi?

$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge p'] \Rightarrow q'$

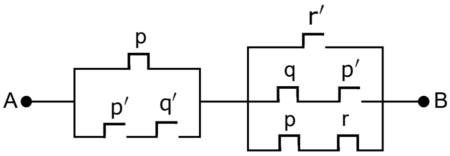
$q' \equiv 0$ iken $(p \Rightarrow q) \wedge p' \equiv p'$ olur. (Neden?)

$(A \wedge B) \Rightarrow C$ önermesi totoloji değildir.

Öyleyse; $A \wedge B$ önermesi C'yi gerektirmez.

Siz de, $(A \wedge B) \Rightarrow C$ önermelerinin totoloji olup olmadıklarını, bu önermeleri en sade biçimlerine dönüştürerek gösteriniz.

41.



[AB] devre parçasında; **p** ve **p′** anahtarları P düğmesi ile, **q** ve **q′** anahtarları Q düğmesi ile, **r** ve **r′** anahtarları da R düğmesi ile yönetilmektedir.

a. [AB] devre parçası, şekildeki durumda, p ve $p \wedge r$ üzerinden akım geçirir.

b. [AB] devre parçasına karşılık gelen önerme,

$D: \left[p \vee (p' \wedge q')\right] \wedge \left[r' \vee (q \wedge p') \vee (p \wedge r)\right]$ olur.

$D \equiv \left[1 \vee (0 \wedge 0)\right] \wedge \left[0 \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1)\right] \equiv 1$ olup

akımın geçeceği, önermenin doğruluk değeri ile de doğrulanır.

c. Şekildeki durumda akım geçer.

Bu durumda iken Q düğmesine basılırsa, akım geçer.

Bu durumda iken R düğmesine basılırsa, akım geçer.

Bu durumda iken Q ve R düğmelerine basılırsa, akım geçer.

Bu durumda iken P, Q ve R düğmelerine basılırsa, akım geçer.

Bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulmada, elektrik devresinin sağladığı kolaylığı vurgulamak istedik. Devreye karşılık gelen önermenin doğruluk değerleri, doğruluk tablosu ile de bulunabilirdi.

42. a. $p \wedge (p' \vee q) \equiv p \wedge q$

Verilen bileşik önermeye karşılık gelen devre parçası, p ve q anahtarlarının seri bağlanması ile tamamlanabilir.

b. $(p \wedge q') \vee q \equiv p \vee q$

c. $(p \wedge q)' \vee (p \vee r) \equiv 1$

Bu önermeye karşılık gelen anahtar sistemi ile "açma-kapama" işlemi yapılamaz. Bu parça akımı hep geçirir.

d. $(p \wedge q)' \wedge (p' \vee q) \equiv \left(p' \vee q'\right) \wedge (p' \vee q) \equiv p'$

q önermesine karşılık getirilecek anahtarların, sisteme hiç katkısı olmaz.

e. $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge (p' \vee q')$

İki devre de kurulabilir. Siz Kurunuz.

f. $p \vee \left[(p \wedge q)' \wedge (p \vee q)'\right] \equiv p \vee \left[(p' \vee q') \wedge p' \wedge q'\right]$

$\equiv p \vee q'$

İki devre de kurulabilir. Ancak; çok anahtarlı devredeki anahtar çokluğu gereksizdir.

g. $(p' \veebar q) \vee p \equiv (p' \wedge q') \vee (p \wedge q) \vee p \equiv p \vee q'$

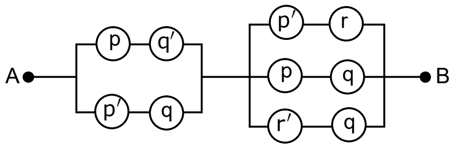
h. $p \Rightarrow \left[q \Rightarrow (q \wedge r)\right] \equiv p' \vee q' \vee r$

i. $(p \veebar q') \wedge (p' \veebar q) \equiv (p \wedge q) \vee (p' \wedge q')$

j. $(p \wedge q') \veebar (p' \wedge q) \equiv (p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$

$\equiv (p \vee q) \wedge (p' \vee q')$

43.



[AB] devre parçasına karşılık gelen önerme,

$D: \left[(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)\right] \wedge \left[(p \wedge r') \vee (p \wedge q) \vee (r' \wedge q)\right]$

olur.

[AB] devre parçası incelenirse, akımın geçebilmesi için $p \equiv 0$ ve $q \equiv 1$ olması gerektiği görülür.

Akım $r \equiv 0$ ise paralel kolların birinden, $r \equiv 1$ ise diğerinden B'ye ulaşır.

p q r değerleri 0 1 0 ya da 0 1 1 iken devre parçasından akım geçer

Alıştırmalar ve Problemler – 2

1. a. 1 b. 0 c. 0 d. 0

2. a. 1 b. 1 c. 0 d. 0

3. a. $Ç=\varnothing$ b. $Ç=\{3\}$ c. $Ç=\{3,\ 4,\ 5,\ ...\}$

   d. $Ç=\{(-1,-3),(-3,-1),(-1,3),(1,-3),(1,3),(3,1),(-3,1),(3,-1)\}$

   e. $Ç=\{(-2,-2),(-1,-2),(0,-2),(1,-2),(2,-2),(-2,2),(-1,2),(0,2),(1,2),(2,2)\}$

   f. $Ç=\left\{\frac{5}{2},-5\right\}$

4. a. $E=\{x \mid x \text{ bir hayvandır.}\}$
   p(x) : x iki ayaklıdır.
   $\exists x,\ p(x)$

   b. $E=\{x \mid x \text{ bir taşıttır.}\}$
   p(x) : x tekerleklidir.
   $\forall x,\ p(x)$

   c. $E=\{x \mid x \text{ bir öğrencidir.}\}$
   p(x) : x tembeldir.
   $\forall x,\ p'(x)$

   d. $E=\{x \mid x \text{ bir insandır.}\}$
   p(x) : x karanlıktan korkar.
   $[\forall x, p(x)]'$

   e. $E=\{x \mid x \text{ bir horozdur.}\}$
   p(x) : x öter.
   $[\forall x, p(x)]'$

   f. $E=\{x \mid x \text{ bir öğrencidir.}\}$
   p(x) : x dikkatlidir.
   $\forall x,\ p'(x)$

   g. $E=\{x \mid x \text{ bir dikdörtgendir.}\}$
   p(x) : x karedir.
   $\exists x,\ p'(x)$

   h. $E=\{x \mid x \text{ bir köpektir.}\}$
   p(x) : x ısırır.
   $\exists x,\ p'(x)$

5. a. *Hiçbir hayvan iki ayaklı değildir.*
   b. *Bazı taşıtlar tekerlekli değildir.*
   c. *Bazı öğrenciler tembeldir.*
   d. *Her insan karanlıktan korkar.*
   e. *Her horoz öter.*
   f. *Bazı öğrenciler dikkatlidir.*
   g. *Her dikdörtgen karedir.*
   h. *Her köpek ısırır.*

6. a. 1 b. 0 c. 1 d. 0 e. 1
   f. 0 g. 1 h. 1 i. 0 j. 1

7. a. $\forall x \in R,\ x-2 \geq x+1$

   b. $\exists x \in R,\ x^2 < x$

   c. $\exists x \in N,\ \frac{x+2}{x+2} \neq 1$

   d. $\exists x \in R,\ \frac{2x-1}{2x-1} \neq 1$

   e. $(\forall x \in N,\ x^2 = x) \wedge (\exists x \in R,\ x^2 = 3)$

   f. $(\forall x \in R,\ x^2 \geq 1) \vee (\exists x \in N,\ x^2 \leq 0)$

   g. $(\exists x \in R,\ x \text{ asaldır.}) \wedge (\forall x \in R,\ x \text{ çift değildir.})$

   h. $\forall x \in R,\ (x \text{ asal değildir.}) \vee (x \text{ çifttir.})$

   i. $\exists x \in R,\ (x^2 \leq 1) \vee (x > 1)$

   j. $\exists x \in R,\ (x \text{ tektir.}) \Leftrightarrow (x+1 \text{ tektir.})$

8. a. $\exists x,\ p'(x)$ b. $\forall x,\ p'(x)$

   c. $\exists y,\ p(y)$ d. $\forall z,\ p(z)$

   e. $[\exists x,\ p'(x)] \vee [\exists y,\ g'(y)]$

   f. $[\forall x,\ p'(x)] \wedge [\exists x,\ q'(x)]$

   g. $[\forall x,\ p(x)] \wedge [\forall y,\ g'(y)]$

   h. $[\exists x,\ p(x)] \Leftrightarrow [\exists x,\ q'(x)]$

   i. $\exists x,\ [p'(x) \vee q'(x)]$ j. $\forall x,\ [p'(x) \wedge q'(x)]$

   k. $\exists x,\ [p(x) \vee q'(x)]$ l. $\forall x,\ [p'(x) \Leftrightarrow q(x)]$

   m. $\exists x,\ \forall y,\ p'(x,y)$

   n. $\forall x,\ \exists y,\ [p'(x,y) \wedge q'(x,y)]$

   o. $[\forall x,\ p(x)] \wedge [\exists x,\ g(x)] \wedge [\forall x,\ r'(x)]$

9. Verilen önerme yanlıştır.

Verilen önermenin karşıt tersi,

$(\exists x \in Z,\ x^2+1 \text{ tektir.}) \Rightarrow (\forall x \in Z,\ x^2 \text{ çifttir.})$

olur.

10. a. Verilen önerme yanlıştır.

Verilen önermenin tersi,

$(\forall x \in N,\ \ x \geq 1) \Rightarrow (\exists x \in Z,\ x^2 \leq 0)$

olur. Önermenin tersi doğrudur.

b. Verilen önerme doğrudur.

Verilen önermenin tersi,

$(\forall x \in Z,\ \ x \text{ çifttir.}) \Rightarrow (\forall x \in Z,\ x^2 \text{ çifttir.})$

olur. Önermenin tersi de doğrudur.

c. $C:\ (x \text{ asaldır.}) \Rightarrow (\exists x \in R,\ \ x \text{ çifttir.})$

$E = \{x | x \text{ bir gerçel sayıdır.}\}$ evrensel kümesinde

"p(x) : x asaldır." açık önermesi ile

" $q\ :\ (\exists x \in R,\ \ x \text{ çifttir.})$ " önermesi verilmiştir.

E evrensel kümesinde, p(x) açık önermesi doğru da olabilir, yanlış da olabilir.

q önermesi ise, p(x) açık önermesinin doğruluk değerine bağlı olmaksızın doğru bir önermedir.

Öyleyse; C önermesi doğrudur.

Verilen önermenin tersi,

$(x \text{ asal değildir.}) \Rightarrow (\forall x \in R,\ \ x \text{ tektir.})$ olur.

Bu bir açık önermedir.

d. $D:\ (x > 1) \Rightarrow (\forall x \in R,\ \ x^2 > 1)$

$E = \{x | x \text{ bir gerçel sayıdır.}\}$ evrensel kümesinde D önermesinin açık önerme olduğunu görünüz.

Verilen önermenin tersi,

$(x \leq 1) \Rightarrow (\exists x \in R,\ \ x^2 \leq 1)$ olur.

Bu önermenin doğru olduğunu görünüz.

Dikkat ediniz!

Koşullu önerme yanlış ise, tersi doğru olur.
Koşullu önerme doğru ise; tersi doğru da, yanlış da, açık önerme de olabilir.

11. a. $E = \{x | x = 5k,\ k \in N\}$

p(x) : x asaldır.

denirse, verilen önerme

$A:\ "\exists x \in E,\ \ p(x)"$ olur.

A önermesinin olumsuzu, sembolik olarak

$A':\ "\forall x \in E,\ \ p'(x)"$

ve sözel olarak

"5 ile bölünebilen doğal sayılardan hiçbiri asal değildir." olur.

b. $E = R$ olmak üzere, verilen önermenin sembolik biçimi

$B:\ "\forall x \in R,\ \exists y \in R,\ \ y = |x| \geq 0"$ olur.

B önermesinin olumsuzu, sembolik olarak

$B':\ "\exists x \in R,\ \forall y \in R,\ \ y = |x| < 0"$

ve sözel olarak

"En az bir gerçel sayının mutlak değeri, her negatif gerçel sayıdır." olur.

c. $E = \{x | x \text{ bir öğrencidir.}\}$

p(x) : x çalışır.

q(x) : x sınıfını geçer.

denirse, verilen önermenin sembolik biçimi

$C:\ "[\forall x,\ p(x)] \wedge [\exists y,\ q(y)]"$ olur.

C önermesinin olumsuzu, sembolik olarak

$C':\ "[\exists x,\ p'(x)] \vee [\forall y,\ q'(y)]"$

ve sözel olarak

"Bazı öğrenciler çalışmaz veya hiçbir öğrenci sınıfını geçemez." olur.

d. $E = \{x |\ x, \text{ öğrencidir ya da öğretmendir.}\}$

p(x) : "x, her öğretmenine saygı duyar."

denirse, verilen önermenin sembolik biçimi

$D:\ "\forall x,\ \ p(x)"$ olur.

D önermesinin olumsuzu, sembolik olarak

$D':\ "\exists x,\ p'(x)"$

ve sözel olarak

"Bazı öğrenciler bazı öğretmenlerine saygı duymaz." olur.

12. a. $E=\{x|x \text{ bir güzeldir.}\}$

p(x) : “x’in en az bir kusuru vardır.”
denirse, verilen önermenin sembolik biçimi
A: “$\forall x$, p(x)” olur.

A önermesinin olumsuzu, sembolik olarak
A': "$\exists x,\ p'(x)$"
ve sözel olarak
“Bazı güzellerin hiçbir kusuru yoktur.” olur.

b. Verilen önermenin sembolik biçimi,
B: "$\exists x\in R,\ \exists y\in R,\ x=y^2$" olur.

B önermesinin olumsuzu, sembolik olarak
B': "$\forall x\in R,\ \forall y\in R,\ x\neq y^2$"
ve sözel olarak
“Her x gerçel sayısı için, $x=y^2$ eşitliğini sağlayan hiçbir y gerçel sayısı yoktur.”
olur.

Bunun anlamı tam olarak şudur:
“ $x=y^2$ eşitliğini sağlayan hiçbir (x,y) gerçel sayı ikilisi yoktur.”

c. $E=\{x|x \text{ bir insandır.}\}$
p(x) : “x her sorununu çözebilir.”
denirse, verilen önermenin sembolik biçimi
C: "$\exists x,\ p(x)$" olur.

C önermesinin olumsuzu, sembolik olarak
C': "$\forall x,\ p'(x)$" olur.
Olumsuz önermenin sözel karşılığı “Her insan bazı sorunlarını çözemez.” biçiminde verilirse; bu, önermenin olumlusu ile aynı anlama gelir.
C' önermesinin sözel karşılığı tam olarak,
“Bazı insanların her sorununu çözebileceği, doğru değildir.” biçiminde verilebilir.

d. $E=\{x|x \text{ bir insandır.}\}$
p(x) : “x, her hayvana eziyet eder.”
denirse, verilen önermenin sembolik biçimi
D: "$\exists x,\ p(x)$" olur.

Önermenin olumsuzunu ve sözel karşılığını siz yazınız.

13. $p:\ x-1=0$
$q:\ x+2=0$
$r:\ (x-1)(x+2)=0$;

$(x-1)(x+2)=0\ \equiv\ (x-1=0)\vee(x+2=0)$
denkliğini görünüz.

Buna göre; aşağıdaki sembolik önermelerde “r” yerine “$p\vee q$” konulabilir.

a. $(p\wedge q)\Rightarrow r\ \equiv\ (p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q)\ \equiv\ 1$

b. $(p\vee q)\Rightarrow r\ \equiv\ (p\vee q)\Rightarrow(p\vee q)\ \equiv\ 1$

c. $(p\veebar q)\Rightarrow r\ \equiv\ (p\veebar q)\Rightarrow(p\vee q)\ \equiv\ (p\vee q)$

d. $r\Rightarrow(p\wedge q)\ \equiv\ (p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)\ \equiv\ (p\veebar q')$

e. $r\Rightarrow(p\vee q)\ \equiv\ (p\vee q)\Rightarrow(p\vee q)\ \equiv\ 1$

f. $r\Rightarrow(p\veebar q)\equiv\ (p\vee q)\Rightarrow(p\veebar q)\ \equiv\ (p'\wedge q')$

g. $p\Rightarrow r\ \equiv\ p\Rightarrow(p\vee q)\ \equiv\ 1$

h. $r\Rightarrow q\ \equiv\ (p\vee q)\Rightarrow q\ \equiv\ (p'\vee q)$

i. $p\Rightarrow(q\veebar r)\equiv\ p\Rightarrow[q\veebar(p\vee q)]\ \equiv\ p'\vee q'$

Yazdığımız denklikleri siz de, en kısa yollarla göstermeye çalışınız.

Verdiğimiz denkliklere göre; a, b, e, g, maddelerindeki önermeler birer gerektirmedir. Diğerleri birer açık önermedir.

14. *p : x tek sayıdır.*
q : y tek sayıdır.
r : $x+y$ *tek sayıdır.*
s : $x\cdot y$ *tek sayıdır.*
t : x^y *tek sayıdır.*
u: $2x+y$ *tek sayıdır.*

açık önermeleri verildiğine göre;

a. $(p\wedge q)\Rightarrow u$ **b.** $(p\vee q)\Rightarrow s$ **c.** $(p\veebar q)\Rightarrow r$

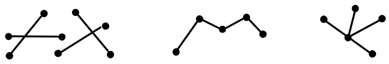
d. $t\Rightarrow(p\wedge q)$ **e.** $r\Rightarrow(p\vee q)$ **f.** $r\Rightarrow(p\veebar q)$

önermelerinden a, c ve f önermelerinin birer gerektirme olduğunu gösteriniz.

Bunu matematiksel çıkarımlarla veya $s\equiv p\veebar q$ gibi sembolleştirmelerle yapabilirsiniz.

Alıştırmalar ve Problemler – 3

1. a. Verilen tanımdan, aşağıdaki şekiller anlaşılabilir.



"*Her hangi üçü doğrusal olmayan düzlemsel A, B, C, D noktalarının belirttiği* $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ *doğru parçalarının birleşimine* ***dörtgen*** *denir.*"

b. "*Doğrusal olmayan üç noktanın belirttiği doğru parçalarının birleşimine* ***üçgen*** *denir.*"

c. "$n \in Z$ *olmak üzere,* $2n+1$ *biçimindeki bir sayıya* ***tek sayı*** *denir.*"

d. "*Matematikte, doğru olan ve doğruluğunun ispatlanması gereken önermeye* ***teorem*** *denir.*"

2. a. p: "*ABC bir dik üçgendir.*"

q: "*ABC üçgeninin dik kenarlarının uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.*"

$p \Rightarrow q$: "*ABC bir dik üçgen ise ABC üçgeninin dik kenarlarının uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.*"

p, hipotez; q, hüküm; $p \Rightarrow q$, teorem

b. $p \Rightarrow q$: "*a bir doğal sayıdır.*"

ise

"$a^2 \geq a$"dır.

c. $p \Rightarrow q$: "ABC bir dik üçgendir."

ise

"ABC üçgeninin alanı dik kenarlarının uzunluklarının çarpımının yarısına eşittir."

d. $p \Rightarrow q$: "*a çift doğal sayıdır veya b çift doğal sayıdır.*"

ise

"$a \cdot b$ *çift doğal sayıdır.*"

3. a. "$n \in N^+;\ 2^{n-1} \leq n!$"

$p(n)$: "$2^{n-1} \leq n!$"

$p(1)$: "$2^{1-1} \leq 1!$"; $p(1)$ doğrudur.

$p(k)$: "$2^{k-1} \leq k!$" doğru ise

$p(k+1)$ doğru mu?

$p(k+1)$'in doğru olması

$p(k+1)$: "$2^k \leq (k+1)!$"

önermesinin doğru olmasını gerektirir.

$k > 1$ için $2 < k+1$ olur.

$p(k)$ ile $2 < k+1$ taraf tarafa çarpılır.

$$\begin{array}{rl} & 2^{k-1} \leq k! \\ \text{x} & \quad 2 < k+1 \\ \hline & 2^k < (k+1)! \end{array}$$

$p(k+1)$ doğrudur. $D = N^+$'dır.

b. "$n \in N^+;\ \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$"

$p(n)$: "$\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$"

$p(1)$: $\dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{1+1}$; $p(1)$ doğrudur.

$p(k)$ doğru ise $p(k+1)$ doğru mu?

$p(k)$: "$\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{k\cdot(k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$"

$p(k)$ doğru iken $p(k+1)$ de doğru ise,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

açık önermesi doğru olacaktır.

$p(k)$'da iki tarafa $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ ekleyelim:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

$p(k+1)$ doğrudur. $D = N^+$'dır.

c. $"n \in N^+;\ 1+2^1+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1"$

$p(n)$: $"1+2^1+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1"$

$p(1)$: $2^{1-1}=2^1-1$; $p(1)$ doğrudur.

$p(k)$ doğru ise $p(k+1)$ doğru mu?

$p(k)$: $"1+2^1+2^2+...+2^{k-1}=2^k-1"$

$p(k)$ doğru ise doğru mu?

$p(k)$ doğru iken $p(k+1)$ de doğru ise,

$1+2^1+2^2+...+2^{k-1}+2^k=2^{k+1}-1$

açık önermesi doğru olacaktır.

$p(k)$ eşitliğinde iki tarafa 2^k ekleyelim:

$$\begin{aligned}1+2^1+2^2+...+2^{k-1}+2^k &= 2^k-1+2^k\\ &= 2\cdot 2^k-1\\ &= 2^{k+1}-1\end{aligned}$$

$p(k+1)$ doğrudur. $D=N^+$'dır.

d. $"n \in N^+;\ 1+4+7+...+(3n-2)=\frac{3n^2-n}{2}"$

$p(n)$: $"1+4+7+...+(3n-2)=\frac{3n^2-n}{2}"$

$p(1)$: $"(3\cdot 1-2)=\frac{3\cdot 1^2-1}{2}"$; $p(1)$ doğrudur.

$p(k)$ doğru ise $p(k+1)$ doğru mu?

$p(k)$: $"1+4+7+...+(3k-2)=\frac{3k^2-k}{2}"$

$p(k)$ doğru iken $p(k+1)$ de doğru ise,

$1+4+7+...+(3k+1)=\frac{3(k+1)^2-(k+1)}{2}$

açık önermesi doğru olacaktır.

$p(k)$ eşitliğinde iki tarafa $3k+1$ ekleyelim:

$$\begin{aligned}&1+4+7+...+(3k-2)+(3k+1)\\ &=\frac{3k^2-k}{2}+3k+1=\frac{3k^2+5k+2}{2}\\ &=\frac{3(k+1)^2-(k+1)}{2}\end{aligned}$$

$p(k+1)$ doğrudur. $D=N^+$'dır.

4. a. "$x=7$ ise $23-2x=9$'dur."

I. yol: Doğrudan ispat yöntemi ile;

$$\begin{aligned}x=7 &\Rightarrow -2x=-14\\ &\Rightarrow 23-2x=23-14\\ &\Rightarrow 23-2x=9\end{aligned}$$

II. yol: Çelişki yöntemi ile;

$p \Rightarrow q$ önermesinin $p \wedge q'$ önermesi ile çelişmesinden yararlanacağız.

$$\begin{aligned}p\wedge q' &\equiv "(x=7)\wedge(23-2x=9)'"\\ &\equiv "(x=7)\wedge(-2x=-14)'"\\ &\equiv "(x=7)\wedge(x=7)'"\equiv 0\end{aligned}$$

$p\wedge q'\equiv 0$ olduğundan $p\Rightarrow q\equiv 1$ olur.

III. yol: Olmayana ergi yöntemi ile;

$p\Rightarrow q\equiv q'\Rightarrow p'$

denkliğinden yararlanacağız.

$$\begin{aligned}q' \equiv "(23-2x=9)'" &\equiv "(-2x=-14)'"\\ &\equiv "(x=7)'"\\ &\equiv p'\end{aligned}$$

q' doğru olsaydı, p' doğru olurdu.

p doğru olduğuna göre, q doğrudur.

b. $4x-5=31 \Rightarrow 4x=36$

$\Rightarrow x=9$

Siz diğer yöntemlerle ispatlayınız.

c. "a tek sayı ve b tek sayı"

$\Rightarrow$ "$a=2n+1$ ve $b=2m+1$ $(n, m\in Z)$"
$\Rightarrow$ "$a+b=2n+1+2m+1$"
$\Rightarrow$ "$a+b=2\cdot(n+m+1)$"
$\Rightarrow$ "$a+b=2\cdot k$ $(k\in Z)$"
$\Rightarrow$ "$a+b$ çifttir."

d. "a ile b 3'ün tam katıdır. a, b∈Z"

$\Rightarrow$ "$a=3n$ ve $b=3m$ $(m, n\in Z)$"
$\Rightarrow$ "$a\cdot b=3n\cdot 3m$"
$\Rightarrow$ "$a\cdot b=9\cdot n\cdot m$"
$\Rightarrow$ "$a\cdot b=9\cdot k$ $(k\in Z)$"
$\Rightarrow$ "$a\cdot b$ 9'un tam katıdır."

5. a. $"x \neq 4" \Rightarrow "3x \neq 12"$
$\Rightarrow "3x-5 \neq 12-5"$
$\Rightarrow "3x-5 \neq 7"$

$"x \neq 4"$ olsaydı, $"3x-5 \neq 7"$ olacaktı.
$3x-5=7$ 'dir.
O hâlde, $"x=4"$tür.

Siz de diğer yöntemlerle ispatlayınız.

b. $"(5x+9 \neq 24)'" \Rightarrow "5x+9=24"$
$\Rightarrow "5x=15"$
$\Rightarrow "x=3"$

$"5x+9=24"$ olsaydı, $"x=3"$ olacaktı.
$"x=4"$ verilmiştir.
O hâlde, $"5x+9 \neq 24"$ tür.

c. $"(x \neq -2)'" \Rightarrow "x=-2"$
$\Rightarrow "-2x=4"$
$\Rightarrow "5-2x=9"$

$"x=-2"$ olsaydı, $"5-2x=9"$ olacaktı.
$"5-2x \neq 9"$ verilmiştir.
O hâlde, $"x \neq -2"$dir.

d. $"(x-2y \neq 2)'" \Rightarrow "x-2y=2"$
$\Rightarrow "(x-2y)^2=2^2"$
$\Rightarrow "x^2-4xy+4y^2=4"$

$"x-2y=2"$ olsaydı,
$"x^2-4xy+4y^2=4"$ olacaktı.
$"x^2-4xy+4y^2 \neq 4"$ verilmiştir.
O hâlde, $"x-2y \neq 2"$dir.

6. a. $"x=\frac{1}{2}" \Rightarrow "x^2=\frac{1}{4}"$ olup $"x^2<x"$'tir.

b. $"(-2)^2=2^2"$'dir. $"-2 \neq 2"$'dir.

c. $"(-3)+(5)=2"$