POLINOM IFADELERIN IŞARETLERI

Bu bölümde $f(x) = ax + b$ iki terimlisi ile f(x) = ax^2 + bx + c üç terimlisinin, x in hangi değerleri için pozitif, hangi değerleri için negatif, hangi değerleri için sıfır olduğunu inceleyerek, elde edeceğimiz sonuçları eşitsizliklerin çözümünde kullanacağız.

■ $f(x) = ax + b$ IKI TERIMLISININ IŞARETI

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

❋ $x = -\dfrac{b}{a}$ için $f(x) = 0$ olur.

❋ $x > -\dfrac{b}{a}$ ise $x + \dfrac{b}{a} > 0$ olacağından;

$f(x) = ax + b = a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$ nın işareti a nın işareti ile aynı olur.

❋ $x < -\dfrac{b}{a}$ ise $x + \dfrac{b}{a} < 0$ olacağından;

$f(x) = ax + b = a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$ nın işareti a nın işaretinin tersi olur.

x in değerlerine göre, $f(x) = ax + b$ nin işaretleri tablodaki gibidir.

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
f(x) = ax + b	a nýn iþaretinin tersi	0	a nýn iþareti ile ayný

ÖRNEK : $f(x) = 2x - 3$ ün işaretini inceleyelim:

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$a = 2 > 0$

x	$-\infty$	3/2	$+\infty$
f(x) = 2x - 3	−	0	+

$f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunda, x yerine 3/2 den küçük hangi sayıyı koyarsak koyalım fonksiyonun değeri negatif bir sayı, 3/2 den büyük hangi sayıyı koyarsak koyalım fonksiyonun değeri pozitif bir sayı olacaktır.

Örneğin;
$f(1) = 2.1 - 3 = -1 < 0$
$f(2) = 2.2 - 3 = 1 > 0$ dır.

■ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ÜÇ TERIMLISININ IŞARETI

Üç terimliyi $f(x) = Ax^2 + C$ biçimine dönüştürelim:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

x in katsayısının yarısının karesini bir ekleyip bir de çıkarırsak;

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\cdot\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin bu son biçimi üç terimlinin işaretini incelememizi kolaylaştıcaktır.

I. $b^2 - 4ac < 0$ ise;

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0 \text{ ve } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

olacağından;

$f(x) = a\cdot\left[\left(x + \dfrac{b}{a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ nin işareti a nın işareti ile aynı olacaktır.

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x) = ax^2 + bx + c	a nýn iþareti ile ayný	

ÖRNEK: $f(x) = -3x^2 + 5x - 6$ üç terimlisinin işaretini inceleyelim:

$\Delta = 25 - 72 = -47 < 0$

$a = -3 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = -3x^2 + 5x - 6$	− − − − −	

$\forall x \in R$ için $f(x) < 0$ dır.

II. $b^2 - 4ac = 0$ ise;

$f(x) = a\cdot\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ biçimindedir.

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ için $f(x) = 0$ olup,

$\forall x \in R$ ve $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ için $f(x)$ in işareti a nın işareti ile aynı olur.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x) = ax²+ b + c	a nýn iþareti ile ayný	0	a nýn iþareti ile ayný

ÖRNEK: **$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ üç terimlisinin işaretini inceleyelim:**

$\Delta = 4^2 - 4.2.2 = 0$, $x_1 = x_2 = -1$

$a = 2 > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$	+	0	+

$\forall x \in R$ ve $x \neq -1$ için $f(x) > 0$ olur.

III. $b^2 - 4ac > 0$ ise;

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}\right)^2\right]$$

$$f(x) = a\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

$$f(x) = a\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Buradan görüldüğü gibi;

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirinden farklı gerçek kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere, $f(x) = ax^2 + bx + c$ üç terimlisi $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçiminde yazılabilir.

1. **$x < x_1 < x_2$ ise;**

$x - x_1 < 0$ ve $x - x_2 < 0$ olacağından

$(x - x_1)(x - x_2) > 0$ olup,

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ifadesinin işareti a nın işareti ile aynı olur.

2. **$x_1 < x < x_2$ ise;**

$x - x_1 > 0$ ve $x - x_2 < 0$ olacağından

$(x - x_1)(x - x_2) < 0$ olup,

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ifadesinin işareti a nın işaretinin tersi olur.

3. **$x_1 < x_2 < x$ ise;**

$x - x_1 > 0$ ve $x - x_2 > 0$ olacağından

$(x - x_1)(x - x_2) > 0$ olup

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ifadesinin işareti a nın işareti ile aynı olur.

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
f(x) = ax²+ bx + c	a nýn iþareti ile ayný	0	a nýn iþareti-nin tersi	0	a nýn iþareti ile ayný

ÖRNEK: **$f(x) = x^2 - 2x - 8$ üç terimlisinin işaretini inceleyelim:**

$\Delta = 4 + 32 = 36 > 0,$ $x_1 = -2,$ $x_2 = 4$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 2x - 8$	+	0	−	0	+

■ P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere; $f(x) = P(x) \cdot Q(x)$ ifadesinin işaretini belirlemek için P(x) ve Q(x) çarpanlarının işaretleri bulunur. P(x) ve Q(x) in işaretleri aynı tabloda alt alta yazılıp çarpılır.

ÖRNEK : **$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3)$ ifadesinin işaretini inceleyelim:**

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$, $x_4 = 3$

x	$-\infty$	-2		-1		2		3	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	−		−	0	+		+
$x^2 - 2x - 3$	+		+	0	−		−	0	+
f(x)	+	0	−	0	+	0	−	0	+

■ $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin işareti $Q(x) \neq 0$ ise $P(x) \cdot Q(x)$ çarpımı ile aynıdır. $Q(x) = 0$ denkleminin kökleri $f(x)$ ifadesini tanımsız yapar. Bu durum tabloda || işareti ile gösterilir.

ÖRNEK : **$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{1 - x^2}$ ifadesinin işaretini inceleyelim:**

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_1=-1\,,\ x_2=4$

$1-x^2=0 \Rightarrow x_3=-1\,,\ x_4=1$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
x^2-3x-4		+	0	−		−	0	+	
$1-x^2$		−	0	+	0	−		−	
f(x)		−	‖	−	‖	+	0	−	

❑ EŞITSIZLIKLER

$f(x)>0\ ;\quad f(x)\ge 0;$
$f(x)<0\ ;\quad f(x)\le 0$

biçimindeki açık önermelere **eşitsizlik**, eşitsizliği doğrulayan x gerçek sayılarının kümesine **eşitsizliğin çözüm kümesi**, çözüm kümesini bulma işlemine de **eşitsizliği çözme** denir.

Bu konuda çözeceğimiz eşitsizliklerde f(x), polinom ifadelerin veya bunların rasyonel kuvvetlerinin toplamı, çarpımı veya bölümü biçiminde olacaktır.

Eşitsizliğin çözümü için önce f(x) in işaretleri belirlenir; sonra işaret tablosundan eşitsizliği doğrulayan gerçek sayılar kümesi saptanır.

ÖRNEKLER :

1. $3-5x>0$ **eşitsizliğini çözelim:**

1. yol: $3-5x=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{5}\ ,\ a=-5$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
3 - 5x		+	0	−	

Tablodan görüldüğü gibi $x<\dfrac{3}{5}$ ise $3-5x>0$ dır.

$$Ç=\left\{x:\ x<\frac{3}{5},\ x\in R\right\}$$

2. yol: $3-5x>0 \Rightarrow -5x>-3 \Rightarrow x<\dfrac{3}{5}$

$$Ç=\left\{x:\ x<\frac{3}{5},\ x\in R\right\}$$

2. $6-5x-x^2\le 0$ **eşitsizliğini çözelim:**

$6-5x-x^2=0 \Rightarrow x^2+5x-6=0$ ve
$x_1=-6\ ,\ x_2=1\ ,\ a=-1<0$

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
6 - 5x - x^2		−	0	+	0	−	

$$Ç=\{x:\ (x\le -6)\vee(x\ge 1)\ ,\ x\in R\}$$

3. $f(x)=(x^2-1)(x^2-4x-5)\le 0$ **eşitsizliğini çözelim:**

$x^2-1=0 \Rightarrow x_1=-1\,,\ x_2=1$

$x^2-4x-5=0 \Rightarrow x_3=-1\,,\ x_4=5$

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+		+	
x^2-4x-5		+	0	−		−	0	+	
f(x)		+	0	+	0	−	0	+	

$$Ç=\{x:\ (x=-1)\vee(1\le x\le 5)\ ,\ x\in R\}$$

4. $f(x)=\dfrac{(9-x^2)(x^2+2x-3)}{x^3(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)}\ge 0$ **eşitsizliğini çözelim:**

$9-x^2=0 \Rightarrow x_1=-3\,,\ x_2=3$

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_3=1\,,\ x_4=-3$

$x^3=0 \Rightarrow x_5=x_6=x_7=0$

$x^2-4x+4=0 \Rightarrow x_8=x_9=2$

$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_{10}=1\,,\ x_{11}=3$

x	$-\infty$		-3		0		1		2		3		$+\infty$
$9-x^2$		−	0	+		+		+		+	0	−	
x^2+2x-3		+	0	−		−	0	+		+		+	
x^3		−		−	0	+		+		+		+	
x^2-4x+4		+		+		+		+	0	+		+	
x^2-4x+3		+		+		+	0	−		−	0	+	
f(x)		+	0	+	‖	−	‖	−	‖	−	‖	−	

$$Ç=\{x:\ x<0,\ x\in R\}$$

PRATIK KURAL:

P(x), Q(x) ve R(x) birer polinom olmak üzere;
$f(x)=\dfrac{P(x)\cdot Q(x)}{R(x)}$ **biçimindeki ifadelerin işaretini belirlemek için $P(x)=0$, $Q(x)=0$, ve $R(x)=0$ denklemlerinin kökleri küçükten büyüğe doğru tabloya yerleştirilir. P(x), Q(x) ve R(x) polinomlarının en büyük dereceli terimlerinin işaretlerinin çarpımı tabloda en büyük kökün sağına yazılır. Sola doğru her tek katlı köke rastlandığında işaret değiştirerek, çift katlı köklerde işaret değiştirmeden devam edilerek tablonun işaretleri tamamlanır.**

5. $f(x)=\dfrac{(x^2-4)(x^2-3x-10)(6-2x)}{(x^2-2x-15)(5-x)}\le 0$ **eşitsizliğini çözelim:**

$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2\,,\ x_2=2$

$x^2-3x-10=0 \Rightarrow x_3=-2\,,\ x_4=5$

$6-2x=0 \Rightarrow x_5=3$

$x^2-2x-15=0 \Rightarrow x_6=-3\ ,\ \ x_7=5$

$5-x=0 \Rightarrow x_8=5$

(-2) iki kez elde edildiğinden çift katlı kök, (5) üç kez elde edildiğinden tek katlı kök, (-3), (2) ve (3) birer kez elde edildiğinden tek katlı köklerdir.

Payın her çarpanındaki en büyük dereceli terimler (x^2), (x^2) ve $(-2x)$; paydanın her çarpanındaki en büyük dereceli terimler (x^2) ve $(-x)$ olup bunların katsayılarının işaretlerinin çarpımı $(+)(+)(-)(+)(-)=(+)$ dır.

Tabloyu düzenleyelim:

x	$-\infty$		-3		-2		2		3		5		$+\infty$
f(x)		+	‖	−	0	−	0	+	0	−	‖	+	

Paydanın köklerine || konduğuna dikkat ediniz. f(x) te x yerine -3 ve 5 değerleri konulamaz.

$Ç=\{x:\ \ (-3<x\le 2)\vee(3\le x<5),\ \ x\in R\}$

6. $\dfrac{1}{x^2-2x-3}\ge\dfrac{1}{5}$ **eşitsizliğini çözelim:**

Önce sağdaki terim eşitsizliğin sol tarafına geçirilerek sağ taraf sıfır yapılmalı, sonra paydalar eşitlenmelidir.

$$\frac{1}{x^2-2x-3}-\frac{1}{5}\ge 0 \Rightarrow \frac{5-x^2+2x+3}{5\cdot(x^2-2x-3)}\ge 0$$

paydaki kısaltmalar yapılarak eşitsizlik,

$f(x)=\dfrac{-x^2+2x+8}{5\cdot(x^2-2x-3)}\ge 0$ biçimine getirilir.

$-x^2+2x+8=0 \Rightarrow x_1=-2\ ,\ \ x_2=4$

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_3=-1\ ,\ \ x_4=3$

x	$-\infty$		-2		-1		3		4		$+\infty$
f(x)		−	0	+	‖	−	‖	+	0	−	

$Ç=\{x:\ \ (-2\le x<-1)\vee(3<x\le 4),\ \ x\in R\}$

UYARI:

1) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=R(x)$ **denkleminde** $Q(x)\ne 0$ **ise iki taraf** $Q(x)$ **ile çarpılabilir.** $P(x)=Q(x)\cdot R(x)$ **olur.**

2) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<R(x)$ **eşitsizliğinde** $Q(x)>0$ **ise iki taraf** $Q(x)$ **ile çarpıldığında,** $P(x)<Q(x)\cdot R(x)$ **olur.**

3) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<R(x)$ **eşitsizliğinde** $Q(x)<0$ **ise iki taraf** $Q(x)$ **ile çarpıldığında,** $P(x)>Q(x)\cdot R(x)$ **olur.**

4) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<R(x)$ **eşitsizliğinde** $Q(x)$ **in işareti belirsiz ise iki taraf** $Q(x)$ **ile çarpılamaz.**

7. $\dfrac{2x}{x^2-5}\le\dfrac{1}{x-3}$ **eşitsizliğini çözelim:**

$$\frac{2x}{x^2-5}-\frac{1}{x-3}\le 0 \Rightarrow \frac{2x^2-6x-x^2+5}{(x^2-5)(x-3)}\le 0$$

$$f(x)=\frac{x^2-6x+5}{(x^2-5)(x-3)}\le 0$$

$x^2-5=0 \Rightarrow x_3=-\sqrt{5}\ ,\ \ x_4=\sqrt{5}$

$x-3=0 \Rightarrow x_5=3$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		1		$\sqrt{5}$		3		5		$+\infty$
f(x)		−	‖	+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	

$Ç=\{x:\ \ (x<-\sqrt{5})\vee(1\le x<\sqrt{5})\vee(3<x\le 5),\ \ x\in R\}$

❑ EŞITSIZLIK SISTEMLERI

Aynı zamanda gerçeklenen birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme **eşitsizlik sistemi** denir. Eşitsizlik sisteminin **çözüm kümesi,** sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin **kesişimidir.**

ÖRNEKLER:

1. $\left.\begin{matrix}3x-5\le 0\\ 2x+1>0\end{matrix}\right\}$ **sistemini çözelim:**

$3x-5\le 0 \Rightarrow 3x\le 5 \Rightarrow x\le\dfrac{5}{3}$ ①

$2x+1>0 \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$ ②

① ve ② nin kesişimi $-\dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{5}{3}$ tür.

$$Ç=\left\{x:\ -\frac{1}{2}<x\le\frac{5}{3}\ ,\ \ x\in R\right\}$$

2. $\left.\begin{matrix}x^2-2x-8<0\\ 2x-3\ge 0\end{matrix}\right\}$ **sistemini çözelim:**

$f(x)=x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_1=-2\ ,\ \ x_2=4$

$g(x)=2x-3=0 \Rightarrow x_3=\dfrac{3}{2}$

f(x) ve g(x) in işaretlerini aynı tabloda gösterelim:

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
f(x)		+	0	−		−	0	+	
g(x)		−		−	0	+		+	
						çözüm			

$f(x)<0$ ve $g(x)\ge 0$ eşitsizliklerini sağlamayan aralıklar tarandığında eşitsizliğin çözümü taranmamış sütunlar olarak karşımıza çıkar.

$$Ç = \left\{ x : \frac{3}{2} \le x < 4 \ , \ x \in R \right\}$$

3. $\mathbf{0 < \dfrac{3x+1}{5-4x} \le 2}$ **sistemini çözelim:**

Sistemi,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x+1}{5-4x} > 0 \\ \dfrac{3x+1}{5-4x} \le 2 \end{array}\right\} \text{ biçiminde yazabiliriz.}$$

② numaralı eşitsizliğin sağ tarafını sıfır yapıp paydaları eşitlersek;

$$\frac{3x+1}{5-4x} - 2 \le 0 \ \Rightarrow \ \frac{3x+1-10+8x}{5-4x} \le 0 \ \Rightarrow \ \frac{11x-9}{5-4x} \le 0$$

elde edilir. Böylece sistem;

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{3x+1}{5-4x} > 0 \\ g(x) = \dfrac{11x-9}{5-4x} \le 0 \end{array}\right\} \text{ biçimine dönüþür.}$$

$f(x)$ ve $g(x)$in işaretlerini ayrı ayrı belirleyelim:

$3x+1=0 \ \Rightarrow \ x_1 = -\dfrac{1}{3}$

$5-4x=0 \ \Rightarrow \ x_2 = \dfrac{5}{4}$

$11x-9=0 \ \Rightarrow \ x_3 = \dfrac{9}{11}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
f(x)	$-$	$+$	$+$	$-$	
g(x)	$-$	$-$	$+$	$-$	

çözüm

$$Ç = \left\{ x : -\frac{1}{3} < x \le \frac{9}{11}, \ x \in R \right\}$$

4. $$\left.\begin{array}{l} \mathbf{1 + \dfrac{4}{x^2-x-6} > 0} \\ \mathbf{\dfrac{x^2+x-6}{x+1} \le 0} \end{array}\right\} \textbf{ sistemini çözelim:}$$

Ilk eşitsizliğin paydalarını eşitleyip kısaltmaları yaparsak ;

$$1 + \frac{4}{x^2-x-6} > 0 \ \Rightarrow \ \frac{x^2-x-6+4}{x^2-x-6} > 0 \ \Rightarrow \ \frac{x^2-x-2}{x^2-x-6} > 0$$

elde edilir. Böylece sistem;

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-x-6} > 0 \\ g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x+1} \le 0 \end{array}\right\} \text{ biçimine dönüþür.}$$

$f(x)$ ve $g(x)$in işaretlerini ayrı ayrı belirleyip tabloda gösterelim:

$x^2-x-2=0 \ \Rightarrow \ x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$

$x^2-x-6=0 \ \Rightarrow \ x_3 = -2 \ , \ x_4 = 3$

$x^2+x-6=0 \ \Rightarrow \ x_5 = -3 \ , \ x_6 = 2$

$x+1=0 \ \Rightarrow \ x_7 = -1$

①

x	$-\infty$	-3	-2	-1	2	3	$+\infty$
f(x)	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	
g(x)	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	

çözüm çözüm

②

$$Ç = \{ x : (x \le -3) \vee (-1 < x < 2), \ x \in R \}$$

5. $\mathbf{x^2 - 2mx + 2m + 3 > 0}$ **eşitsizliğini, x in her değerinin sağlaması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesinde $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ iken $f(x)$in işaretinin a nın işareti ile aynı olduğunu biliyoruz. Öyleyse; $\forall x, \ f(x) > 0$ önermesinin doğru olması için;

$$\left.\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{array}\right\} \text{ olmalýdýr.}$$

$a = 1 > 0$ olduğundan, $\Delta < 0$ olması yeterlidir.

$$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = m^2 - 2m - 3 < 0$$

m	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Δ'	$+$	$-$	$+$	

$$-1 < m < 3$$

6. $\mathbf{(m-2)x^2 - 2mx + 5m - 6 < 0}$ **eşitsizliğini, x in her değerinin sağlaması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesinde $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ iken $f(x)$in işareti ile a nın işareti aynı olduğundan, $\Delta < 0$ ve $a < 0$ olmalıdır.

① $\Delta' = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = m^2 - (m-2)(5m-6) < 0$

② $a = m - 2 < 0$

$\Delta' = m^2 - 5m^2 + 16m - 12 < 0$

$\Delta' = -4m^2 + 16m - 12 < 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
Δ'	$-$	$+$	$+$	$-$	
a	$-$	$-$	$+$	$+$	

$m < 1$ olmalıdır.

❑ ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki eşitsizlikleri ve eşitsizlik sistemlerini çözünüz.

1. $3-5x \le 2x+3$

2. $\dfrac{2x+3}{2} \ge \dfrac{3x-5}{3}$

3. $x+2 < \dfrac{2x-3}{2}$

4. $2x^2-3x-5<0$

5. $6-7x-3x^2 \le 0$

6. $\dfrac{3-2x}{x-4} \ge 0$

7. $\dfrac{x}{4-3x-x^2} \le 0$

8. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-x+6} < 0$

9. $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+x-12} < 0$

10. $(x-1)(x-2)(x-3)^2 \le 0$

11. $x^4+5x^2+4 \le 0$

12. $x^4+3x^2-4 \le 0$

13. $x^4-10x^2+9<0$

14. $\dfrac{3}{1-x} \ge 1$

15. $\dfrac{x-4}{x+4} \le 1$

16. $\dfrac{2-x}{2+x} \le 1$

17. $\dfrac{5x-2}{x+2} < 2$

18. $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-6} \le 0$

19. $\dfrac{3x+2}{(x+2)^2} < \dfrac{1}{2}$

20. $\dfrac{2}{x+2} \le \dfrac{1}{x}$

21. $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{5}{x+2} \ge 3$

22. $-2x^3(x^2-4)(3+x) \ge 0$

23. $(x^2-x+2)(x-2)^2(4-x) \le 0$

24. $(x^2-x-2)^3(x+2)^5 \le 0$

25. $\dfrac{x^3}{(x^2-1)^2(x^2+1)} \le 0$

26. $(x^2+3x-2)^2 < (x^2+2x+2)^2$

27. $\dfrac{(x^2-x-2)(4-x^2)}{(x^2+5x+4)(x^2+4)} \ge 0$

28. $\dfrac{5x+5}{x^2-4} \le \dfrac{8}{x-1}$

29. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2} \ge \dfrac{3}{x}$

30. $(x^2+2x)(x^2+2x-2) \le 3$

31. $\left.\begin{array}{l} 2x^2-3x+1>0 \\ x^2-3x+2 \le 0 \end{array}\right\}$

32. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-4}{3} \le \dfrac{4}{x} \\ \dfrac{1}{x} < x \end{array}\right\}$

33. $\left.\begin{array}{l} x^2-x-2 \ge 0 \\ 0 < x^2+5x \le 6 \end{array}\right\}$

34. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x+1} < 2 \\ \dfrac{x-1}{x+1} > 1 \\ x^2-4 \le 0 \end{array}\right\}$

35. $\left.\begin{array}{l} (2x+1)^2 > 4(x-1)^2 \\ (2x-1)^2 \le (3x+1)^2 \end{array}\right\}$

36. $\left.\begin{array}{l} (2x-x-1)^2 \ge (x^2+x-2)^2 \\ (x^2+2x-1)^2 < (x^2+3x+4)^2 \end{array}\right\}$

❑ ÇÖZÜMLER; ÇÖZÜM YOLLARI

1. $3-5x \le 2x+3 \Rightarrow -7x \le 0 \Rightarrow x \ge 0$

$Ç = \{x : x \ge 0, x \in R\}$

2. $\dfrac{2x+3}{2} \ge \dfrac{3x-5}{3}$

Iki tarafı 6 ile çarparsak;

$3(2x+3) \ge 2(3x-5) \Rightarrow 9 \ge -10$

$Ç = \{x : x \in R\}$

3. $x+2 < \dfrac{2x-3}{2} \Rightarrow 2x+4 < 2x-3 \Rightarrow 4 < -3$

$Ç = \varnothing$

4. $Ç=\left\{x:\ -1<x<\dfrac{5}{2}\ ,\ x\in R\right\}$

5. $Ç=\left\{x:\ (x\le -3)\vee(x\ge \dfrac{2}{3})\ ,\ x\in R\right\}$

6. $f(x)=\dfrac{3-2x}{x-4}\ge 0$

$3-2x=0\ \Rightarrow\ x_1=\dfrac{3}{2}\ ;\quad x-4=0\ \Rightarrow\ x_2=4$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		4	$+\infty$
f(x)	$-$	o	$+$	‖	$-$

$Ç=\left\{x:\ \dfrac{3}{2}\le x<4\ ,\ x\in R\right\}$

7. $Ç=\{x:\ (-4<x\le 0)\vee(x>1)\ ,\ x\in R\}$

8. $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{x^2-x+6}<0$

$x^2-x-12=0\ \Rightarrow\ x_1=-3\ ,\ x_2=4$

$x^2-x+6=0\ \Rightarrow\ \Delta<0\ ,$ gerçek kök yok.

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
f(x)	$+$	o	$-$	o	$+$

$Ç=\{x:\ -3<x<4\ ,\ x\in R\}$

9. $Ç=\{x:\ (-4<x<-3)\vee(-3<x<3)\ ,\ x\in R\}$

10. $Ç=\{x:\ (1\le x\le 2)\vee(x=3)\ ,\ x\in R\}$

11. $x^4+5x^2+4\le 0$

Kökleri bulmak için $x^2=t$ dönüşümü yapalım:

$t^2+5t+4=0\ \Rightarrow\ t_1=-1\ ,\ t_2=-4$

$x^2=-1\ \Rightarrow$ gerçek kök yok.

$x^2=-4\ \Rightarrow$ gerçek kök yok.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^4+5x^2+4	+ + + + +	

$Ç=\varnothing$

12. $x^4+3x^2-4\le 0$

Kökleri bulmak için $x^2=t$ dönüşümü yapalım:

$t^2+3t-4=0\ \Rightarrow\ t_1=1\ ,\ t_2=-4$

$x^2=-4\ \Rightarrow$ gerçek kök yok.

$x^2=1\ \Rightarrow\ x_1=-1\ ,\ x_2=1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x^4+3x^2-4	$+$	o	$-$	o	$+$

$Ç=\{x:\ -1\le x\le 1\ ,\ x\in R\}$

13. $Ç=\{x:\ (-3<x<-1)\vee(1<x<3)\ ,\ x\in R\}$

14. $\dfrac{3}{1-x}\ge 1$

Sağ tarafı sıfır yapıp paydaları eşitlersek ;

$\dfrac{3}{1-x}-1\ge 0\ \Rightarrow\ \dfrac{3-1+x}{1-x}\ge 0\ \Rightarrow\ \dfrac{2+x}{1-x}\ge 0$

eşitsizlik, $f(x)=\dfrac{2+x}{1-x}\ge 0$ biçimine girer.

$2+x=0\ \Rightarrow\ x_1=-2\ ;\quad 1-x=0\ \Rightarrow\ x_2=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
f(x)	$-$	o	$+$	‖	$-$

$Ç=\{x:\ -2\le x<1\ ,\ x\in R\}$

15. $Ç=\{x:\ x>-4\ ,\ x\in R\}$

16. $Ç=\{x:\ (x<-2)\vee(x\ge 0)\ ,\ x\in R\}$

17. $Ç=\{x:\ -2<x<2\ ,\ x\in R\}$

18. $Ç=\{x:\ (-5\le x<-2)\vee(2\le x<3)\ ,\ x\in R\}$

19. $\dfrac{3x+2}{(x+2)^2}<\dfrac{1}{2}$

Eşitsizliğin sağ tarafını sola geçirip paydaları eşitleyelim :

$\dfrac{3x+2}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{2}<0\ \Rightarrow\ \dfrac{6x+4-x^2-4x-4}{2(x+2)^2}<0$

Eşitsizlik, $f(x)=\dfrac{-x^2+2x}{2(x+2)^2}<0$ biçimine girer.

$-x^2+2x=0\ \Rightarrow\ x_1=0\ ,\ x_2=2$

$2(x+2)^2=0\ \Rightarrow\ x_3=x_4=-2$

x	$-\infty$	(çift) -2		0		2	$+\infty$
f(x)	$-$	‖	$-$	o	$+$	o	$-$

$Ç=\{x:\ (x<-2)\vee(-2<x<0)\vee(x>2)\ ,\ x\in R\}$

20. $Ç=\{x:\ (x<-2)\vee(0<x\le 2)\ ,\ x\in R\}$

21. $Ç=\{x:\ (-2<x\le -1)\vee(1<x\le 3)\ ,\ x\in R\}$

22. $Ç=\{x:\ (-3\le x\le -2)\vee(0\le x\le 2)\ ,\ x\in R\}$

23. $Ç=\{x:\ (x=2)\vee(x\ge 4)\ ,\ x\in R\}$

24. $(x^2-x-2)^3(x+2)^5\le 0$

Üsler tek olduğundan, $(x^2-x-2)^3$ nün işareti x^2-x-2 ile, $(x+2)^5$ in işareti $x+2$ ile aynıdır.

Öyleyse eşitsizlik, $f(x)=(x^2-x-2)(x+2)\le 0$ eşitsizliğine denktir.

$x^2-x-2=0\ \Rightarrow\ x_1=-1\ ,\ x_2=2$

$x+2=0\ \Rightarrow\ x_3=-2$

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
f(x)		$-$		$+$		$-$		$+$	

$Ç=\{x:\ (x\le -2)\vee(-1\le x\le 2)\ ,\ x\in R\}$

25. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x^2-1)^2(x^2+1)}\le 0$

$x^3=0\ \Rightarrow\ x_1=x_2=x_3=0$ Tek katlı kök

$(x^2-1)^2=0\ \Rightarrow\ (x-1)^2(x+1)^2=0$

$\Rightarrow\ x_4=x_5=1$ (çift) , $x_6=x_7=-1$ (çift)

$x^2+1=0\ \Rightarrow$ gerçek kök yok.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)		$-$	‖	$-$		$+$	‖	$+$	

$Ç=\{x:\ (x\le 0)\wedge(x\ne -1)\ ,\ x\in R\}$

26. $(x^2+3x-2)^2<(x^2+2x+2)^2$

Eşitsizliğin sağ tarafını sola geçirip ifadeyi iki kare farkı gibi çarpanlara ayıralım:

$(x^2+3x-2)^2-(x^2+2x+2)^2<0$

$\Rightarrow\ (x^2+3x-2+x^2+2x+2)(x^2+3x-2-x^2-2x-2)<0$

Eşitsizlik,

$f(x)=(2x^2+5x)(x-4)<0$ biçimine dönüşür.

$2x^2+5x=0\ \Rightarrow\ x_1=0\ ,\ x_2=-\dfrac{5}{2}$

$x-4=0\ \Rightarrow\ x_3=4$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		0		4		$+\infty$
f(x)		$-$		$+$		$-$		$+$	

$Ç=\left\{x:\ (x<-\dfrac{5}{2})\vee(0<x<4)\ ,\ x\in R\right\}$

27. $Ç=\{x:\ (-4<x\le -2)\vee(x=2)\ ,\ x\in R\}$

28. $\dfrac{5x+5}{x^2-4}\le\dfrac{8}{x-1}$

Sağ tarafı sola geçirip paydaları eşitleyelim :

$\dfrac{5x+5}{x^2-4}-\dfrac{8}{x-1}\le 0\ \Rightarrow\ \dfrac{5x^2-5-8x^2+32}{(x^2-4)(x-1)}\le 0$

Eşitsizlik,

$f(x)=\dfrac{-3x^2+27}{(x^2-4)(x-1)}\le 0$ biçimine dönüşür.

$-3x^2+27=0\ \Rightarrow\ x_1=-3\ ,\ x_2=3$

$x^2-4=0\ \Rightarrow\ x_3=-2\ ,\ x_4=2$

$x-1=0\ \Rightarrow\ x_5=1$

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		3		$+\infty$
f(x)		$+$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$		$-$	

$Ç=\{x:\ (-3\le x<-2)\vee(1<x<2)\vee(x\ge 3)\ ,\ x\in R\}$

29. $Ç=\{x:\ (-2<x<0)\vee(1<x\le 2)\ ,\ x\in R\}$

30. $(x^2+2x)(x^2+2x-2)\le 3$

$\Rightarrow\ f(x)=(x^2+2x)(x^2+2x-2)-3\le 0$

Kökleri bulmak için $x^2+2x=t$ dönüşümü yapalım:

$t(t-2)-3=0$

$t^2-2t-3=0\ \Rightarrow\ t_1=-1\ ,\ t_2=3$

$x^2+2x=-1\ \Rightarrow\ x^2+2x+1=0\ \Rightarrow\ x_1=x_2=-1$

$x^2+2x=3\ \Rightarrow\ x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow\ x_3=1\ ,\ x_4=-3$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
f(x)		$+$		$-$		$-$		$+$	

$Ç=\{x:\ -3\le x\le 1\ ,\ x\in R\}$

31. $Ç=\{x:\ 1<x\le 2\ ,\ x\in R\}$

32. $Ç=\{x:\ 1<x\le 6\ ,\ x\in R\}$

33. $\left.\begin{array}{l} x^2-x-2\ge 0 \\ 0<x^2+5x\le 6 \end{array}\right\}$ sistemi

$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2-x-2\ge 0 \\ \text{II.} & x^2+5x>0 \\ \text{III.} & x^2+5x-6\le 0 \end{array}\right\}$ sistemine denktir.

$x^2-x-2=0\ \Rightarrow\ x_1=-1\ ,\ x_2=2$

$x^2+5x=0\ \Rightarrow\ x_3=0\ ,\ x_4=-5$

$x^2+5x-6=0\ \Rightarrow\ x_5=1\ ,\ x_6=-6$

x	$-\infty$		-6		-5		-1		0		1		2		$+\infty$
I.		$+$		$+$		$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	
II.		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
III.		$+$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
				çözüm											

$Ç=\{x:\ -6\le x<-5\ ,\ x\in R\}$

34. $Ç=\{x:\ -2\le x<-1\ ,\ x\in R\}$

35. Eşitsizliklerin sağ taraflarını sola geçirip, iki kare farkı gibi çarpanlara ayırınız.

$Ç=\left\{x:\ x>\dfrac{1}{4}\ ,\ x\in R\right\}$

36. $Ç=\left\{x:\ (-5<x<-\dfrac{3}{2})\vee(x\ge 1)\ ,\ x\in R\right\}$

❑ MUTLAK DEĞERLI DENKLEMLER VE EŞITSIZLIKLER

a bir gerçek sayı olmak üzere, **-a** ve **a** sayılarından negatif olmayanına **a nın mutlak değeri** denildiğini;

Mutlak değer tanımının

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ ise} \\ -a, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde de yapılabileceğini;

Her a ve b gerçek sayısı için,

① $|a| \geq 0$
② $|a| = |-a|$
③ $-|a| \leq a \leq |a|$
④ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
⑤ $b \neq 0$ için $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
⑥ $|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$
⑦ $|a| = |b| \Rightarrow (a = b)$ veya $(a = -b)$
⑧ $|a^2| = |a|^2 = a^2$
⑨ $|a^n| = |a|^n$

olduğunu Matematik 1 derslerinizden hatırlayınız.

Bir gerçek sayının mutlak değerinin **negatif olmadığını** bir kez daha vurgulayalım. $a < 0$ iken $|a| = -a$ olması mutlak değerin negatif de olabileceği biçiminde yorumlanmamalıdır. $a < 0$ iken $-a > 0$ olacağı açıktır.

Örneğin; $a = -5$ iken,
$|a| = |-5| = -(-5) = 5 = -a$ dır.

❈ Bu bölümde mutlak değerli ifadeler içeren denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulacağız.

Yalnız bir mutlak değerli ifade bulunduran, mutlak değerli ifade dışındaki terimleri bilinmeyen içermeyen denklem ve eşitsizliklerin pratik çözümleri, aşağıdaki gibi yapılır.

■ $|x| = a$ DENKLEMININ ÇÖZÜMÜ

$a \in R^+ \cup \{0\}$ için
$|x| = a \Rightarrow x = -a$ veya $x = a$ dır.

Ispat :

$x \geq 0$ ise $|x| = x = a$ ①

$x < 0$ ise $|x| = -x = a \Rightarrow x = -a$ ②

Öyleyse,
$\forall x \in R$ için $|x| = a \Rightarrow x = -a$ veya $x = a$ açık önermesi doğrudur.

ÖRNEKLER:

1. **$|x| = 7$ denklemini çözelim:**

$|x| = 7 \Rightarrow x = -7$ veya $x = 7$ dir.
$Ç = \{-7,\ 7\}$

2. **$|2x - 3| = 5$ denklemini çözelim:**

$2x - 3 = -5$ veya $2x - 3 = 5$
$\Rightarrow 2x = -2$ veya $2x = 8$
$\Rightarrow x = -1$ veya $x = 4$
$Ç = \{-1,\ 4\}$

3. **$|3x - 5| = -4$ denklemini çözelim:**

$\forall x \in R$ için $|3x - 5| \geq 0$ olacağından denklemi hiçbir gerçek sayı sağlamaz.
$Ç = \varnothing$

■ $|x| \leq a$ EŞITSIZLIĞININ ÇÖZÜMÜ

$a \in R^+ \cup \{0\}$ için
$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ dır.

Ispat :

$x \geq 0$ ise $|x| = x$ olacağından,
$|x| \leq a \Rightarrow 0 \leq x \leq a$ dır. ①
$x < 0$ ise $|x| = -x$ olacağından,
$|x| \leq a \Rightarrow -x \leq a \Rightarrow -a \leq x < 0$ dır. ②

① ve ② den;
$\forall x \in R$ için $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ açık önermesi doğrudur.

ÖRNEKLER:

1. **$|3x - 1| \leq 4$ eşitsizliğini çözelim:**

$|3x-1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 3x - 1 \leq 4$
$\Rightarrow -3 \leq 3x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{5}{3}$

$Ç = \left\{x :\ -1 \leq x \leq \frac{5}{3},\ x \in R\right\}$

2. **$|5 - 2x| < 7$ eşitsizliğini çözelim:**

$|5 - 2x| < 7 \Rightarrow -7 \leq 5 - 2x < 7$
$\Rightarrow -12 < -2x < 2 \Rightarrow 6 > x > -1$
$Ç = \{x :\ -1 \leq x \leq 6,\ x \in R\}$

■ $|x| \geq a$ EŞITSIZLIĞININ ÇÖZÜMÜ

$a \in R^+ \cup \{0\}$ için
$|x| \geq a \Rightarrow (x \leq -a)$ veya $(x \geq a)$ dır.

Ispat :

$x \geq 0$ için $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$

$x < 0$ için $|x| \geq a \Rightarrow -x \geq a \Rightarrow x \leq -a$

Öyleyse,

$\forall x \in R$ için $|x| \geq a \Rightarrow (x \leq -a)$ veya $(x \geq a)$ açık önermesi doğrudur.

ÖRNEKLER:

1. $|7-5x| > 3$ **eşitsizliğini çözelim:**

$|7-5x| > 3 \Rightarrow (7-5x < -3)$ veya $(7-5x > 3)$

$\Rightarrow (-5x < -10)$ veya $(-5x > -4)$

$\Rightarrow (x > 2)$ veya $(x < \frac{4}{5})$

$$Ç = \left\{ x: \ (x < \frac{4}{5}) \text{ veya } (x > 2), \ x \in R \right\}$$

2. $|6x-15| \geq -4$ **eşitsizliğini çözelim:**

$\forall x \in R$ için $|6x-15| > 0$ olacağından her x gerçek sayısı eşitsizliği sağlar.

$$Ç = \{x: \ x \in R\}$$

■ **MUTLAK DEĞERLI DENKLEM VE EŞITSIZLIKLERIN GENEL ÇÖZÜM YOLU**

Denklem veya eşitsizlikte, mutlak değerli ifadelerin dışında bilinmeyen içeren terim varsa veya birden fazla mutlak değerli ifade varsa çözüm için şu yol izlenir :

Önce mutlak değerli ifadelerin kökleri bulunur. Bu köklerin sayı eksenini ayırdığı aralıklarda, mutlak değer içindeki ifadelerin işaretleri belirlenir.

Mutlak değer içindeki ifadeler, işaretlerine göre mutlak değerden kurtarılarak her aralıkta çözüm yapılır. Bulunan çözümle, içinde işlem yapılan aralığın kesişimi o aralıktaki çözümdür.

Son olarak, ayrı ayrı aralıklarda bulunan çözüm kümelerinin bileşimi alınarak denklem veya eşitsizliğin çözüm kümesi elde edilir.

ÖRNEKLER:

1. $|x-2| + 3x + 6 = 0$ **denklemini çözelim:**

Mutlak değer içindeki ifadenin kökünü bulalım:

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

1. $x < 2$ ise $x-2 < 0$ olacağından

$|x-2| = -(x-2) = -x+2$ dir.

Bu durumda denklem,

$-x+2+3x+6=0$ biçimine dönüşür ve çözümü $x=-4$ olarak bulunur.

$-4 < 2$ olduğundan (-4) denklemin bir köküdür.

2. $x \geq 2$ ise $x-2 \geq 0$ olacağından

$|x-2| = x-2$ dir.

Bu durumda denklem,

$x-2+3x+6=0$ biçimine dönüşür ve çözümü $x=-1$ olarak bulunur.

$-1 \geq 2$ yanlış olduğundan (-1) denklemin kökü değildir.

Öyleyse; $Ç = \{-4\}$ tür.

❋ Bu işlemler, bir tablo içinde yapılırsa hem dağınıklık önlenmiş hem de hata yapma olasılığı azaltılmış olur.

Belli bir aralıkta, mutlak değer içindeki ifadenin mutlak değer dışına nasıl çıkarılacağını kolayca bulmak için x yerine o aralıkta her hangi bir sayı konur. Ifadenin o sayı için değeri pozitif ise ifade olduğu gibi, negatif ise ifadenin (-1) ile çarpımı mutlak değer dışına çıkarılır.

Şimdi, $|x-2| + 3x + 6 = 0$ denklemini bu açıklamaya göre çözelim :

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x < 2$ ise (2)	$x \geq 2$ ise
$x-2$ ifadesinde x yerine 2 den küçük bir sayı, örneğin 0 konursa $0-2=-2<0$ olacağından $\|x-2\| = -x+2$ olur. Denklemde yerine konursa; $-x+2+3x+6=0$ $\Rightarrow 2x+8=0$ $\Rightarrow x=-4$ (-4), içinde işlem yaptığımız aralığın elemanıdır. (-4) denklemin köküdür.	$x-2$ ifadesinde x yerine 2 den büyük bir sayı, örneğin 3 konursa $3-2=1>0$ olacağından $\|x-2\| = x-2$ olur. Denklemde yerine konursa; $x-2+3x+6=0$ $\Rightarrow 4x+4=0 \Rightarrow x=-1$ (-1), içinde işlem yaptığımız aralığın elemanı değildir. (-1) denklemin kökü değildir.

$$Ç = \{-4\}$$

2. $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ **denklemini çözelim:**

$x < 0$ ise (0)	$x \geq 0$ ise

$\lvert x\rvert=-x$ olup denklem, $x^2+2x-3=0$ biçimindedir. $x_1=-3$, $x_2=1$ $x_2=1$, bu aralığın elemanı değildir. $x_1=-3$, bu aralığın elemanı olup denklemin de köküdür.	$\lvert x\rvert=x$ olup denklem, $x^2-2x-3=0$ biçimindedir. $x_3=-1$, $x_4=3$ $x_3=-1$, bu aralığın elemanı değildir. $x_4=3$, bu aralığın elemanı olup denklemin de köküdür.

$$Ç=\{-3,3\}$$

3. $\mathbf{x^2-\lvert 3x-2\rvert=0}$ **denklemini çözelim:**

$3x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$

$x<\dfrac{2}{3}$ ise	$\dfrac{2}{3}$ $\quad$ $x\geq\dfrac{2}{3}$ ise
$\lvert 3x-2\rvert=-3x+2$ olup denklem, $x^2+3x-2=0$ biçimindedir. $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ Kökler $x<\dfrac{2}{3}$ koşuluna uyduğundan verilen denklemin de kökleridir. $Ç_1=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$	$\lvert 3x-2\rvert=3x-2$ olup denklem, $x^2-3x+2=0$ biçimindedir. $x_3=1$, $x_4=2$ Kökler $x\geq\dfrac{2}{3}$ koşuluna uyduğundan verilen denklemin de kökleridir. $Ç_2=\{1,\ 2\}$

$$Ç=Ç_1\cup Ç_2\ ;\quad Ç=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2},\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2},\ 1\ ,\ 2\right\}$$

4. $\mathbf{\lvert x^2-x-1\rvert=\lvert x^2-3x+3\rvert}$ **denklemini çözelim:**

$\lvert a\rvert=\lvert b\rvert \Rightarrow a=b$ veya $a=-b$ olduğunu hatırlayınız.

Öyleyse;

① $x^2-x-1=x^2-3x+3$ ve

② $x^2-x-1=-x^2+3x-3$

denklemlerinin çözüm kümelerinin bileşimi verilen denklemin çözümü olacaktır.

① $x^2-x-1=x^2-3x+3 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$
$Ç_1=\{2\}$

② $x^2-x-1=-x^2+3x-3 \Rightarrow 2x^2-4x+2=0$
$(x-1)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=1$; $\qquad Ç_2=\{1\}$

$Ç=Ç_1\cup Ç_2$, $\qquad$ **Ç =** $\{1,2\}$

5. $\mathbf{\lvert x-2\rvert\leq\lvert 2x-5\rvert}$ **eşitsizliğini çözelim:**

Iki taraf da negatif olmadığından eşitsizliğin iki tarafının karesi alınırsa eşitsizlik bozulmaz.
$(0\leq a\leq b$ ise $a^2\leq b^2)$

$x^2-4x+4\leq 4x^2-20x+25$
$f(x)=-3x^2+16x-21\leq 0$

Sol tarafın kökleri $7/3$ ve 3 tür.

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		3		$+\infty$
f(x)		–	0	+	0	–	

$$Ç=\left\{x:\ x\leq\frac{7}{3}\ \text{ veya }\ x\geq 3\right\}$$

6. $\mathbf{3<\lvert 2x+1\rvert\leq 7}$ **eşitsizliğini çözelim:**

$2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

$x<-\dfrac{1}{2}$ ise	$-\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $x\geq-\dfrac{1}{2}$ ise
$\lvert 2x+1\rvert=-2x-1$ $3<-2x-1\leq 7$ $-4\leq x<-2$ $Ç_1=[-4,-2)$	$\lvert 2x+1\rvert=2x+1$ $3<2x+1\leq 7$ $1<x\leq 3$ $Ç_2=(1,3]$

$Ç=Ç_1\cup Ç_2$, $\qquad$ **Ç =** $[-4,-2)\cup(1,3]$

7. $\mathbf{\lvert x-2\rvert+\lvert x+1\rvert+3x-6=0}$ **denklemini çözelim:**

Mutlak değer içindeki ifadelerin kökleri,

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ ve $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ dir.

$x<-1$ ise	-1 $\quad$ $-1\leq x<2$ ise	2 $\quad$ $x\geq 2$ ise
$\lvert x-2\rvert=-x+2$ ve $\lvert x+1\rvert=-x-1$ olup denklem $-x+2-x-1+3x-6=0$ biçimindedir. Buradan $x=5$ bulunur. $5\notin(-\infty,\ -1)$ $Ç_1=\varnothing$	$\lvert x-2\rvert=-x+2$ ve $\lvert x+1\rvert=x+1$ olup denklem $-x+2+x+1+3x-6=0$ biçimindedir. Buradan $x=1$ bulunur. $1\in[-1,\ 2)$ $Ç_2=\{1\}$	$\lvert x-2\rvert=x-2$ ve $\lvert x+1\rvert=x+1$ olup denklem $x-2+x+1+3x-6=0$ biçimindedir. Buradan $x=7/5$ bulunur. $7/5\notin[2,\ +\infty)$ $Ç_3=\varnothing$

$$Ç=Ç_1\cup Ç_2\cup Ç_3 \Rightarrow Ç=\{1\}$$

8. $|2x-1| \le |x+1| + x - 1$ **eşitsizliğini çözelim:**

Mutlak değer içindeki ifadelerin kökleri,

$2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ve $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ dir.

$x<-1$ ise	$-1 \le x < 1/2$ ise	$x \ge 1/2$ ise
$\lvert 2x-1\rvert = -2x+1$, $\lvert x+1\rvert = -x-1$ $-2x+1 \le -x-1+x-1$ $\Rightarrow -2x \le -3 \Rightarrow x \ge \dfrac{3}{2}$ Bulunan çözümle bu aralığın kesişimi $(-\infty, -1)\cap[3/2, +\infty)=\varnothing$ $Ç_1=\varnothing$	$\lvert 2x-1\rvert = -2x+1$, $\lvert x+1\rvert = x+1$ $-2x+1 \le x+1+x-1$ $\Rightarrow -4x \le -1 \Rightarrow x \ge \dfrac{1}{4}$ Bulunan çözümle bu aralığın kesişimi $[-1, 1/2)\cap[1/4, +\infty)=[1/4, 1/2)$ $Ç_2=[1/4, 1/2)$	$\lvert 2x-1\rvert = 2x-1$, $\lvert x+1\rvert = x+1$ $2x-1 \le x+1+x-1 \Rightarrow 0 \le 1$ Bu sonuç, bu aralıktaki her x değerinin eşitsizliği sağladığını gösterir. $Ç_3=[1/2, +\infty)$

$$Ç=Ç_1\cup Ç_2\cup Ç_3 \Rightarrow Ç=\varnothing\cup[1/4, 1/2)\cup[1/2, +\infty) \Rightarrow Ç=[1/4, +\infty)$$

9. $|x^2-4| + 3x = 0$ **denklemini çözelim:**

Mutlak değer içindeki ifadenin kökleri,

$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2$ ve $x_2=2$ dir.

$x<-2$ ise	$-2 \le x < 2$ ise	$x \ge 2$ ise
$\lvert x^2-4\rvert = x^2-4$ $x^2+3x-4=0$ $x_1=-4$, $x_2=1$ $Ç_1=\{-4\}$	$\lvert x^2-4\rvert = -x^2+4$ $-x^2+3x+4=0$ $x_3=-1$, $x_4=4$ $Ç_2=\{-1\}$	$\lvert x^2-4\rvert = x^2-4$, $x^2+3x-4=0$ $x_5=1$, $x_6=-4$, $Ç_3=\varnothing$ $x \ge 2$ için eşitsizliğin sol tarafı daima pozitif olacağından bu aralıkta çözümün $\varnothing$ olacağı açıktır.

$$Ç=Ç_1\cup Ç_2\cup Ç_3 \Rightarrow Ç=\{-4,-1\}$$

10. $\left|2x-|x-3|\right|=6$ **denklemini çözelim:**

$|x|=a \Rightarrow x=-a$ veya $x=a$ olduğunu hatırlayınız !

Öyleyse ;

① $2x-|x-3|=-6$ ve

② $2x-|x-3|=6$

denklemlerinin çözüm kümelerinin bileşimi verilen denklemin çözüm kümesi olacaktır.

① $2x-|x-3|=-6$

$x<3$ ise	$x\geq 3$ ise
$\|x-3\|=-x+3$	$\|x-3\|=x-3$
$2x+x-3=-6$ $x=-1$ $Ç_1=\{-1\}$	$2x-x+3=-6$ $x=-9$ $Ç_2=\varnothing$

$Ç_1'=\{-1\}$

② $2x-|x-3|=6$

$x<3$ ise	$x\geq 3$ ise
$2x+x-3=6$ $x=3$ $Ç_1=\varnothing$	$2x-x+3=6$ $x=3$ $Ç_2=\{3\}$

$Ç_2'=\{3\}$

Verilen denklemin çözüm kümesi ;

$Ç=Ç_1'\cup Ç_2'$, $Ç=\{-1,3\}$

11. $\left|2-|x-1|\right|=x+1$ **denklemini çözelim:**

Içiçe mutlak değerli ifadelerde önce içteki mutlak değer işareti kaldırılır.

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x<1$ ise	$x\geq 1$ ise
$\|x-1\|=-x+1$ $\|2+x-1\|=x+1$ $\Rightarrow \|x+1\|=x+1$ $\Rightarrow x\geq -1$	$\|x-1\|=x-1$ $\|2-x+1\|=x+1$ $\Rightarrow \|3-x\|=x+1$
$Ç_1=\{x:\ -1\leq x<1\}$	$1\leq x<3$: $3-x=x+1$, $x=1$, $Ç_2=\{1\}$; $x\geq 3$: $x-3=x+1$, $-3=1$, $Ç_3=\varnothing$

$Ç=Ç_1\cup Ç_2\cup Ç_3$, $Ç=\{x:\ -1\leq x\leq 1,\ x\in R\}$

12. $\left|x^2-3x+2\right|-2|x-1|=0$ **denklemini çözelim:**

Denklemin sol tarafı çarpanlarına ayrılıp her çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenebilir.

$|x-1|\cdot|x-2|-2|x-1|=0$

$\Rightarrow |x-1|\cdot(|x-2|-2)=0$

$|x-1|=0 \Rightarrow x_1=1$

$|x-2|-2=0 \Rightarrow |x-2|=2$

$\Rightarrow x-2=-2$ veya $x-2=2$

$\Rightarrow x_2=0$, $x_3=4$

$Ç=\{0,1,4\}$

13. $|x+2|-\left|x^2-2x-8\right|\geq 0$ eşitsizliğini çözelim:

$|x+2|-|x+2|\cdot|x-4|\geq 0$

$\Rightarrow |x+2|\cdot(1-|x-4|)\geq 0$

$\forall x$ için $|x+2|\geq 0$ olduğundan eşitsizliğin gerçeklenmesi için $1-|x-4|\geq 0$ olmalıdır.

$\Rightarrow |x-4|\leq 1$

$\Rightarrow -1\leq x-4\leq 1$

$\Rightarrow 3\leq x\leq 5$

$Ç=\{x:\ 3\leq x\leq 5\}$

❑ ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

1. $|3x-5|=-1$

2. $|7-x|\geq -5$

3. $|2x-3|=5$

4. $|3x-1|\leq 8$

5. $|5-2x|<3$

6. $|5x+4|>6$

7. $|x-2|+2x+4=0$

8. $\left|x^2-3x-2\right|=2$

9. $\left|x^2-1\right|\leq 8$

10. $|x-3|=|x|+1$

11. $|x-2|-|x|=4$

12. $|x-2|=|x|+2$

13. $|x-3|=|x|-1$

14. $1<|3x-2|\leq 4$

15. $x^2-|x-2|-4=0$

16. $x^2 - 3|x| - 4 \leq 0$

17. $|x^2 + 2x| = x^2 - 4$

18. $|x^2 - 4| - 2|x + 2| = 0$

19. $\dfrac{x^2 - x - 6}{|x| + 2} \leq 0$

20. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{|x + 1|} \leq 0$

21. $\left|\dfrac{x}{x + 2}\right| \leq 1$

22. $\left|\dfrac{2x - 3}{x + 1}\right| > 2$

23. $\left|\dfrac{3x}{x^2 + 2}\right| \geq 1$

24. $\dfrac{|2 - x|}{x + 2} \geq 1$

25. $\dfrac{|x| + 2}{|x - 2|} \geq 2$

26. $\dfrac{|x - 1| + 2x}{x} < 3$

27. $\left|\dfrac{x}{x^2 - 2}\right| \geq 1$

28. $\dfrac{x^2 + 2|x| - 3}{x + 1} \geq 2x$

29. $\dfrac{|x + 2|}{x^2 - x - 6} \geq \dfrac{1}{2}$

30. $\dfrac{x^2 - |x| - 2}{9 - x^2} \geq 0$

31. $|2x - |x - 4|| \leq x$