Problem

$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ denkleminin ZxZ'deki çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$$
$$\Rightarrow 4\cdot\left(x^2 + x\right) + 1 = 4\cdot\left(y^4 + y^3 + y^2 + y\right) + 1$$
$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$$

$y \notin \{-1,0,1,2\}$ ise,

$3y^2 + 4y + 1 > 0$ ve $y^2 - 2y > 0$'dır.

Buna göre;

$$\left(4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1\right) - \left(3y^2 + 4y + 1\right) = \left(2y^2 + y\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(2y^2 + y\right)^2 < (2x+1)^2 \qquad (1)$$

ve

$$\left(4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1\right) + \left(y^2 - 2y\right) = \left(2y^2 + y + 1\right)^2$$
$$\Rightarrow (2x+1)^2 < \left(2y^2 + y + 1\right)^2 \qquad (2)$$

olur.

(1) ve (2)'den,

$$\left(2y^2 + y\right)^2 < (2x+1)^2 < \left(2y^2 + y + 1\right)^2 \qquad (3)$$

elde edilir.

(3) eşitsizlik sistemi, $(2x+1)^2$ tam kare sayısının ardışık iki tam sayının kareleri arasında olduğunu gösterir.

Ardışık iki tam sayının karelerinin arasında başka bir tam sayının karesinin olamayacağı açıktır. Bu eşitsizliği sağlayan bir x tam sayısı yoktur.

Öyleyse; denklemin çözüm kümesini bulmak için $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ olduğu durumları incelemek yeterlidir.

Bu inceleme ile,

$$Ç = \{(0,-1),(-1,-1),(0,0),(-1,0),(5,2),(-6,2)\}$$

bulunur.

Not : Problem, bir olimpiyat sorusudur. Çözüm, "Riyaziyyatdan Olimpiada, İştirakçıları Üçün 200 Variant; Rafiq Quliev, Fuad Quarayev" kitabından alınmıştır.