

Doğrunun Düzlemdeki Dik İzdüşümü

Muharrem Şahin

Örnek-1

$$\ell: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+21}{-1} \text{ doğrusunun}$$

(E): $x + y - z - 4 = 0$ düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün denklemini yazınız.

Çözüm

ℓ doğrusunun (E) düzlemi üzerindeki dik izdüşümü, ℓ doğrusundan geçen ve (E) düzlemine dik olan (F) düzlemi ile (E) düzleminin arakesiti olur.

(F) düzlemi üzerinde değişen bir nokta

$P(x, y, z)$ olsun. ℓ doğrusu üzerinde hemen görülebilen bir nokta $A(0, 1, -2)$ olup bu nokta,

doğal olarak (F) düzleminin de üzerindedir.

Bu durumda $\overline{AP} = (x, y - 1, z + 2)$, ℓ doğrusunun $\vec{d} = (2, 1, -1)$ doğrultu vektörü ve (E) düzleminin $\vec{n} = (1, 1, -1)$ normal vektörü aynı düzlemde gösterilebileceğinden doğrusal bağımlı olurlar.

Buna göre; (F) düzleminin denklemi,

$$(F): \begin{vmatrix} x & y-1 & z+2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ve buradan (F): $y + z + 1 = 0$ olur.

(F): $y + z + 1 = 0$ ve (E): $x + y - z - 4 = 0$ düzlemlerinin arakesiti de;

$$\left. \begin{array}{l} y + z + 1 = 0 \\ x + y - z - 4 = 0 \end{array} \right\} \text{ sisteminin çözümü ile}$$

bulunur.

$z = k$ dersek $y = -k - 1$ ve $x = 2k + 5$ olur.

ℓ doğrusunun (E) düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün denklemi de, k çekilip

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

olarak bulunur.

Örnek-2

x ekseninin (E): $x + y - z - 4 = 0$ düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün denklemini yazınız.

Çözüm

x ekseninin (E) düzlemi üzerindeki dik izdüşümü, x ekseninden geçen ve (E) düzlemine dik olan (F) düzlemi ile (E) düzleminin arakesiti olur.

(F) düzlemi üzerinde değişen bir nokta

$P(x, y, z)$ olsun. x ekseninde hemen görülebilen bir nokta $O(0, 0, 0)$ olup bu nokta, (F) düzleminin de üzerindedir. Bu durumda $\overline{OP} = (x, y, z)$, x ekseninin $\vec{d} = (1, 0, 0)$ doğrultu vektörü ve (E) düzleminin $\vec{n} = (1, 1, -1)$ normal vektörü aynı düzlemde gösterilebileceğinden doğrusal bağımlı olurlar. Buna göre; (F) düzleminin denklemi,

$$(F): \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ve buradan (F): $y + z = 0$ olur.

(F): $y + z = 0$ ve (E): $x + y - z - 4 = 0$ düzlemlerinin arakesiti de;

$$\left. \begin{array}{l} y + z = 0 \\ x + y - z - 4 = 0 \end{array} \right\} \text{ sisteminin çözümü ile}$$

bulunur.

$z = k$ dersek $y = -k$ ve $x = 2k + 4$ olur.

x ekseninin (E) düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün denklemi de, k çekilip

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

olarak bulunur.

Örnek-3

$\vec{v} = (3, -4, 5)$ vektörünün (E): $x - y + z - 2 = 0$ düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün normu kaçtır?

Çözüm

\vec{v} vektörünün (E) düzlemi ile yaptığı açının ölçüsü α ise, \vec{v} vektörünün (E) düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün normu; $\|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$ olur.

\vec{v} vektörünün, (E) düzleminin $\vec{n} = (1, -1, 1)$ normali ile yaptığı açının ölçüsü β olsun.

$$(3, -4, 5) \cdot (1, -1, 1) = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \beta$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ olur.}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \text{ olduğundan } \cos \alpha = \frac{1}{5} \text{ olur.}$$

$$\|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha = 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{5} = \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$