1. $x^2 + a.|x| + b = 0$ denkleminin;

a. 4 farklı ve gerçek kökünün olması için,
b. 3 farklı ve gerçek kökünün olması için,
c. 2 farklı ve gerçek kökünün olması için,
d. yalnız bir gerçek kökünün olması için,
e. gerçek kökünün olmaması için

a ve b hangi koşulları sağlamalıdır?

2. $\sqrt{x^2 - 2x + 8} - \sqrt{x^2 - 2x - 4} = 2$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

3. $\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x+1}} = 4$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

4. $\sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 14 - 8\sqrt{x-2}} = 2$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

5. $|x - 2|^2 - |x + 2| - 4 = 0$ denkleminin gerçek köklerinin toplamı kaçtır?

6. $(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 24$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

7. $\sqrt[3]{3 - x} + \sqrt{x - 2} = 1$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz. (TMOZ)

8. $16x^2 - (m^3 + n^3)x - 64 = 0$ denkleminin kökleri m ve n olduğuna göre, $m^2 + n^2$ toplamı kaçtır? (TMOZ)

9. $x^2 + 8x + m = 0$ denkleminin kökleri rasyonel olduğuna göre, m kaç değişik tam sayı değer alabilir?
m'nin pozitif değerleri kaç tanedir?

10. $\left|x^2 - 6\right|^2 - \left|2x^2 - 12\right| - 3 = 0$ denkleminin gerçek köklerinin çarpımı kaçtır? (TMOZ)

11. $\dfrac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2} - 2x} = 1$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

12. $\left.\begin{aligned} x^2 - xy - 2x + 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$ sisteminin R^2 deki çözüm kümesini bulunuz.

13. $\left.\begin{aligned} |x - y| + |y - 2| &= 6 \\ y &= |x - 1| - 2 \end{aligned}\right\}$ sisteminin R^2 deki çözüm kümesini bulunuz.

14. $\left.\begin{aligned} x^2 - 2x + y &= 5 \\ x^2 - |y + 1| &= -2 \end{aligned}\right\}$ sisteminin R^2 deki çözüm kümesini bulunuz.

15. $\dfrac{x^2 + |x| - 6}{|x| + 2} \le 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

16. I. $x^2 - x + m = 0$
II. $x^2 - 6x - 4m = 0$ $(m \ne 0)$
denklemleri veriliyor.
II. denklemin köklerinden biri I. denklemin köklerinden birinin 2 katına eşit olduğuna göre m kaçtır?

17. $\left.\begin{aligned} -1 \le x - y \le 4 \\ 0 \le x^2 - 2y \le 1 \end{aligned}\right\}$ sistemini, uygun bir x değeri ile birlikte sağlayan en büyük y değeri kaçtır?

18. $xy + x + y = 3m + 2$ eğrisi ile
$2xy - x - y = 4$ eğrisinin,
a. 4 farklı ortak noktaları varsa;
b. 2 farklı ortak noktaları varsa;
c. ortak noktaları yoksa
m hangi en geniş aralıkta değerler alabilir?

1. $x^2 + a.|x| + b = 0$ (1) denkleminin çözüm kümesinin eleman sayısını incelemek için $x \geq 0$ ve $x < 0$ durumları ayrı ayrı incelenebilir. Ancak; $|x| = t$ diyerek, $t^2 + at + b = 0$ (2) denkleminin çözüm kümesi üzerinde düşünmek daha kolay yorum yapabilmemize olanak verir.

a. (2) denkleminin pozitif ve farklı iki kökü varken (1) denkleminin 4 farklı kökü olur. $0 < t_1 < t_2$ koşulunun sağlanması için ;

$$\left.\begin{array}{r}\Delta > 0\\ t_1 \cdot t_2 = b > 0\\ t_1 + t_2 = -a > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}a^2 - 4b > 0\\ b > 0\\ a < 0\end{array}\right\}$$

olmalıdır. Bu durumda,

$|x| = t_1 \Rightarrow x_1 = -t_1,\ x_2 = t_1;$

$|x| = t_2 \Rightarrow x_3 = -t_2,\ x_4 = t_2$ olup

(1) denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{-t_1, t_1, -t_2, t_2\}$ olur.

b. (2) denkleminin köklerinden biri pozitif diğeri sıfır iken $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ olacağından (1) denkleminin 3 farklı kökü olur. $0 \leq t_1 < t_2$ koşulunun sağlanması için ;

$$\left.\begin{array}{r}t_1 \cdot t_2 = b = 0\\ t_1 + t_2 = -a > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}b = 0\\ a < 0\end{array}\right\}$$

olması yeter. Bu durumda, (1) denkleminin çözüm kümesi, $Ç = \{0, -t_2, t_2\}$ olur.

c. (2) denkleminin köklerinin ters işaretli olduğu ya da iki katlı pozitif kökünün olduğu durumlarda (1) denkleminin 2 farklı kökü olur.

I. $0 < t_1 = t_2$ koşulunun sağlanması için ;

$$\left.\begin{array}{r}\Delta = 0\\ t_1 + t_2 = -a > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}a^2 - 4b = 0\\ a < 0\end{array}\right\}$$

olmalıdır.

II. $t_1 < 0 < t_2$ koşulunun sağlanması için;

$t_1 \cdot t_2 < 0 \Rightarrow b < 0$ olması yeter.

Bu durumda, $Ç = \{-t_2, t_2\}$ olur.

d. (2) denkleminin köklerinden birinin sıfır diğerinin diğerinin negatif olması durumunda (1) denkleminin yalnız bir kökü olur.

$t_1 < 0 = t_2$ koşulunun sağlanması için ;

$$\left.\begin{array}{r}t_1 \cdot t_2 = b = 0\\ t_1 + t_2 = -a < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}b = 0\\ a > 0\end{array}\right\}$$

olması gerekir. Bu durumda, (1) denkleminin çözüm kümesi, $Ç = \{0\}$ olur.

e. (2) denkleminin köklerinin olmadığı ya da köklerinin negatif olduğu durumlarda (1) denkleminin gerçek kökü yoktur.

I. (2) denkleminin gerçek köklerinin olmaması için,

$$\Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4b < 0$$

olmalıdır.

II. $t_1 < t_2 < 0$ koşulunun sağlanması için ;

$$\left.\begin{array}{r}\Delta > 0\\ t_1 \cdot t_2 = b > 0\\ t_1 + t_2 = -a < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}a^2 - 4b > 0\\ b > 0\\ a > 0\end{array}\right\}$$

olması gerekir.

2. $\sqrt{x^2 - 2x + 8} - \sqrt{x^2 - 2x - 4} = 2$

! Bu tip sorularda değişken dönüştürürken, yalnız $x^2 - 2x$ 'e değil kök içindeki ifadelerden birinin tamamına t denilirse işlemler daha kısa olur.

$x^2 - 2x - 4 = t$ diyelim.

$\sqrt{t + 12} - \sqrt{t} = 2$

$\Rightarrow \sqrt{t + 12} = \sqrt{t} + 2$

$\Rightarrow t + 12 = t + 4 + 4\sqrt{t}$

$\Rightarrow \sqrt{t} = 2 \quad \Rightarrow t = 4$ bulunur.

$x^2 - 2x - 4 = 4 \Rightarrow Ç = \{-2, 4\}$ olur.

3. $\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x + 1}} = 4$

denkleminin çözümü,

$\sqrt{a + b \mp 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})^2} = \left|\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right|$

eşitliğinin bir uygulamasıdır.

! İfade kare kök dışına çıkarılırken mutlak değer unutulmamalıdır.

$\sqrt{\underbrace{x+2}_{x+1+1} - 2\sqrt{\underbrace{x+1}_{(x+1)\cdot 1}}} = \sqrt{(\sqrt{x+1} - 1)^2} = \left|\sqrt{x+1} - 1\right|$ ve

$$\begin{aligned}\sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x + 1}} &= \sqrt{\underbrace{x + 10}_{x+1+9} - 2\sqrt{\underbrace{9x + 9}_{(x+1)\cdot 9}}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{x + 1} - 3)^2}\\ &= \left|\sqrt{x + 1} - 3\right|\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınırsa,

$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=4$

$\Rightarrow \left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}-3\right|=4$ olur.

$\sqrt{x+1}=t$ dersek; denklem,

$|t-1|+|t-3|=4$ denklemine dönüşür.

I. $t<1$ ise;

$|t-1|+|t-3|=4 \Rightarrow -t+1-t+3=4$

$\Rightarrow t=0$ olur.

$\sqrt{x+1}=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow Ç_1=\{-1\}$ dir.

II. $1\le t<3$ ise;

$|t-1|+|t-3|=4 \Rightarrow t-1-t+3=4$

$\Rightarrow 2=4$

Eşitlik sağlanmaz. $Ç_2=\varnothing$ dir.

III. $t\ge 3$ ise;

$|t-1|+|t-3|=4 \Rightarrow t-1+t-3=4$

$\Rightarrow t=4$ olur.

$\sqrt{x+1}=4 \Rightarrow x=15 \Rightarrow Ç_3=\{15\}$ dir.

Denklemin gerçek sayılardaki en geniş çözüm kümesi,

$Ç=Ç_1\cup Ç_2\cup Ç_3 \Rightarrow Ç=\{-1,15\}$ olur.

4. $\sqrt{\underbrace{x+2}_{x-2+4}-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{\underbrace{x+14}_{x-2+16}-8\sqrt{x-2}}=2$

$\Rightarrow \left|\sqrt{x-2}-2\right|+\left|\sqrt{x-2}-4\right|=2$ olur.

$\sqrt{x-2}=t$ dersek; denklem,

$|t-2|+|t-4|=2$ denklemine dönüşür.

I. $t<2$ ise;

$|t-2|+|t-4|=2 \Rightarrow -t+2-t+4=2$

$\Rightarrow t=2$ olur.

Bu değer incelediğimiz aralıkta değildir. $Ç_1=\varnothing$ dir.

II. $2\le t<4$ ise;

$|t-2|+|t-4|=2 \Rightarrow t-2-t+4=2$

$\Rightarrow 2=2$

$[2,4)$ aralığındaki her t değeri denklemi sağlar.

$2\le \sqrt{x-2}<4 \Rightarrow 4\le x-2<16$

$\Rightarrow 6\le x<18 \Rightarrow Ç_2=[6,18)$ dır.

III. $t\ge 4$ ise;

$|t-2|+|t-4|=2 \Rightarrow t-2+t-4=2$

$\Rightarrow t=4$ olur.

$\sqrt{x-2}=4 \Rightarrow x=18 \Rightarrow Ç_3=\{18\}$ dir.

Denklemin gerçek sayılardaki çözüm kümesi,

$Ç=Ç_1\cup Ç_2\cup Ç_3$

$\Rightarrow Ç=\varnothing\cup[6,18)\cup\{18\} \Rightarrow Ç=[6,18]$ olur.

5. $|x-2|^2-|x+2|-4=0$ denkleminde, ilk terimde mutlak değer kullanılması gereksizdir.

! Bu tip sorularda $|x+2|$ yerine bir kere $-x-2$, bir kere $x+2$ konularak çözüm yapılması hatalara yol açar. Bunların hangi koşulla konulduğu dikkate alınmalıdır.

I. $x<-2$ ise;

$(x-2)^2-(-x-2)-4=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow x=1$ veya $x=2$ $\Rightarrow Ç_1=\varnothing$

II. $x\ge -2$ ise;

$(x-2)^2-(x+2)-4=0 \Rightarrow x^2-5x-2=0$

$\Rightarrow x=\frac{5-\sqrt{29}}{2}$ veya $x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$

İki değer de $x\ge -2$ aralığındadır.
Köklerin toplamı 5 olur.

6. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=24$

$\Rightarrow (x-2)(x-5)(x-3)(x-4)=24$

$\Rightarrow (x^2-7x+10)(x^2-7x+12)=24$

$x^2-7x+10=t$ dersek; denklem,

$t\cdot(t+2)=24$ denklemine dönüşür.

$\Rightarrow t^2+2t+10=4 \Rightarrow t=4$ veya $t=-6$ olur.

$x^2-7x+10=4 \Rightarrow x=1$ veya $x=6$;

$x^2-7x+10=-6 \Rightarrow x\in\varnothing$ dir.

$Ç=\{1,6\}$ olur.

7. $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt{x-2}=1$

$x-2=t$ dersek; denklem,

$\sqrt[3]{1-t}+\sqrt{t}=1$ denklemine dönüşür.

$\Rightarrow \sqrt[3]{1-t}=1-\sqrt{t}$

$\Rightarrow 1-t=1-3\sqrt{t}+3t-t\sqrt{t}$

$\Rightarrow 4t-3\sqrt{t}-t\sqrt{t}=0$

$\Rightarrow \sqrt{t}(4\sqrt{t}-3-t)=0$

! Burada eşitlik $\sqrt{t}$ ile kısaltılmamalıdır. Kısaltılırsa eşitliğin sağlandığı $\sqrt{t}=0$ durumu değerlendirilmemiş olur.

$\sqrt{t}(4\sqrt{t}-3-t)=0$

$\Rightarrow \sqrt{t}=0$ veya $t-4\sqrt{t}+3=0$

$\sqrt{t}=0 \;\Rightarrow\; x=2;$

$t-4\sqrt{t}+3=0$ ve $\sqrt{t}=p$

$\Rightarrow p^2-4p+3=0 \;\Rightarrow p=1$ veya $p=3$

$\Rightarrow t=1$ veya $t=9$

$\Rightarrow x=3$ veya $x=11$ bulunur.

$Ç=\{2,3,11\}$ olur.

8. $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\;\; x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

$\Rightarrow m+n=\dfrac{m^3+n^3}{16},\;\; m\cdot n=-4$

$\Rightarrow m+n=\dfrac{(m+n)(m^2-mn+n^2)}{16}$

! Burada eşitlik $m+n$ ile kısaltılmamalıdır. Kısaltılırsa eşitliğin sağlandığı $m+n=0$ durumu değerlendirilmemiş olur.

$m+n=\dfrac{(m+n)(m^2+n^2+4)}{16}$

$\Rightarrow m+n=0$ veya $m^2+n^2=12$ olur.

$m+n=0$ ve $m\cdot n=-4$

$\Rightarrow m^2+2mn+n^2=0 \Rightarrow m^2+n^2=8$ bulunur.

m^2+n^2 toplamı 8 ve 12 değerlerini alabilir.

9. $x^2+8x+m=0$ denkleminde,

$\Delta=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac \;\Rightarrow \Delta=16-m$ dir.

Kökleri veren formül göz önüne alınırsa, köklerin rasyonel sayı olması, Δ'nın karekökünün bir rasyonel sayı olmasını gerektirir. Bu koşulu sağlayan sınırsız sayıda $m\in Q$ bulunabilir. Yine sınırsız sayıda $m\in Z$ vardır $\Delta=16-m$ ifadesini tam kare yapan $m\in Z^+$ değerleri ise 0, 7, 12, 15, 16 olup beş tanedir.

10. $\left|x^2-6\right|^2-\left|2x^2-12\right|-3=0$

$\Rightarrow (x^2-6)^2-2\left|x^2-6\right|-3=0$

$\left|x^2-6\right|=t$ dersek; denklem,

$t^2-2t-3=0$ denklemine dönüşür.

$t^2-2t-3=0 \;\Rightarrow t=-1$ veya $t=3$ olur.

$\left|x^2-6\right|\neq-1$

$\left|x^2-6\right|=3 \;\Rightarrow x^2=3$ veya $x^2=9$

$\Rightarrow x=\mp\sqrt{3}$ veya $x=\mp3$ bulunur

$Ç=\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3},-3,3\right\}$ olur.

11. $\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}-2x}=1$

$\Rightarrow \sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}-2x$

$\Rightarrow \sqrt{x+3}=2x$

$\Rightarrow x+3=4x^2$ ve $2x\geq0$

$\Rightarrow 4x^2-x-3=0$ ve $x\geq0$

$\Rightarrow (x=1$ veya $x=\dfrac{-3}{4})$ ve $x\geq0$

$\Rightarrow x=1$ olur.

$x=1$ değeri, verilen denklemdeki $\sqrt{x-2}$ ifadesini gerçek sayı yapmaz.

$Ç=\varnothing$ olur.

12. $\left.\begin{aligned} x^2-xy-2x+2y&=0 \;(1)\\ x^2+y^2-x+y&=8 \;(2)\end{aligned}\right\}$

Yerine koyma yöntemini uygulayalım: (1) denkleminin sol yanı çarpanlarına ayrılabilir.

$x(x-y)-2(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(x-2)=0 \;\Rightarrow y=x$ veya $x=2$

I. $y=x$ değerini (2) de yerine koyalım.

$x^2+x^2-x+x=8 \;\Rightarrow x=-2$ veya $x=2$

$\Rightarrow Ç_1=\{(-2,-2),(2,2)\}$ olur.

II. $x=2$ değerini (2) de yerine koyalım.

$y^2+y-6=0 \;\Rightarrow y=-3$ veya $y=2$

$\Rightarrow Ç_2=\{(2,-3),(2,2)\}$ olur.

Denklemin R^2deki çözüm kümesi,

$Ç=Ç_1\cup Ç_2$

$\Rightarrow Ç=\{(-2,-2),(2,-3),(2,2)\}$ dir.

13. $\left.\begin{aligned} |x-y|+|y-2|&=6 \;\;(1)\\ y&=|x-1|-2 \;\;(2)\end{aligned}\right\}$

(2) deki y değerini (1) de yerine koyalım:

$\big|x+2-|x-1|\big|+\big||x-1|-4\big|=6$ bulunur.

I. $x<1$ ise;

$|x+2+x-1|+|-x-3|=6$ olur.

Buradaki kritik değerler -3 ve $\frac{-1}{2}$ dir.

a. $x < -3$ ise;

$-2x - 1 - x - 3 = 6 \Rightarrow x = -3$

$\Rightarrow Ç_1 = \varnothing$ dir.

b. $-3 \le x < \frac{-1}{2}$ ise;

$-2x - 1 + x + 3 = 6 \Rightarrow x = -4$

$\Rightarrow Ç_2 = \varnothing$ dir.

c. $\frac{-1}{2} \le x < 1$ ise;

$2x + 1 + x + 3 = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow Ç_3 = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{-5}{3}\right)\right\}$ dir.

II. $x \ge 1$ ise;

$|x + 2 - x + 1| + |x - 1 - 4| = 6$

$\Rightarrow |x - 5| = 3 \;\Rightarrow x = 2$ veya $x = 8$

$\Rightarrow Ç_4 = \{(2,-1),(8,5)\}$ dir.

Denklemin R^2 deki çözüm kümesi,

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 \cup Ç_4$

$\Rightarrow Ç = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{-5}{3}\right),(2,-1),(8,5)\right\}$ olur.

14. $\left.\begin{array}{l} x^2 - 2x + y = 5 \quad (1) \\ x^2 - |y+1| = -2 \quad (2) \end{array}\right\}$

y değeri (1) den çekilip (2) de ya da (2) den çekilip (1) de yerine konulabilir. Biz, mutlak değerin getireceği işlemlerden bir an önce kurtulmak için, (2) den y değerini çekelim:

$x^2 - |y + 1| = -2 \quad \Rightarrow |y + 1| = x^2 + 2$

I. $y < -1$ ise;

$-y - 1 = x^2 + 2 \quad \Rightarrow y = -x^2 - 3$ olur

Bu değeri (1) de yerine koyarsak;

$x^2 - 2x - x^2 - 3 = 5 \Rightarrow x = -4$ ve

$Ç_1 = \{(-4,-19)\}$ bulunur.

II. $y \ge -1$ ise;

$y + 1 = x^2 + 2 \quad \Rightarrow y = x^2 + 1$ olur.

(1) de yerine koyalım.

$x^2 - 2x + x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x = -1$ veya $x = 2$

$\Rightarrow Ç_2 = \{(-1,2),(2,5)\}$ olur.

Denklemin R^2 deki çözüm kümesi,

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$

$\Rightarrow Ç = \{(-4,-19),(-1,2),(2,5)\}$ bulunur.

15. Kesrin paydası pozitif olduğundan

$\frac{x^2 + |x| - 6}{|x| + 2} \le 0 \;\Rightarrow x^2 + |x| - 6 \le 0$ olur.

I. $x < 0$ ise;

$x^2 - x - 6 \le 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) \le 0$

$\Rightarrow -2 \le x \le 3$ ve $x<0 \;\Rightarrow Ç_1 = [-2, 0)$

II. $x \ge 0$ ise;

$x^2 + x - 6 \le 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) \le 0$

$\Rightarrow -3 \le x \le 2$ ve $x \ge 0 \;\Rightarrow Ç_2 = [0, 2]$

Eşitsizliğin R deki çözüm kümesi,

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \;\Rightarrow Ç = [-2, 2]$ olur.

16. I. $x^2 - x + m = 0$

II. $x^2 - 6x - 4m = 0 \;(m \ne 0)$

denklemleri verilmiştir.

I. denklemin köklerinden biri t, II. denklemin köklerinden biri 2t olsun.

$t^2 - t + m = 0 \qquad (3)$

$4t^2 - 12t - 4m = 0 \quad (4)$

(3) ve (4) iki bilinmeyenli bir denklem sistemi oluşturur.

Çözelim:

(3) ve (4) ü taraf tarafa toplarsak,

$2t^2 - 4t = 0 \;\Rightarrow t = 0$ veya $t = 2$

$t = 0$ için $m = 0$;

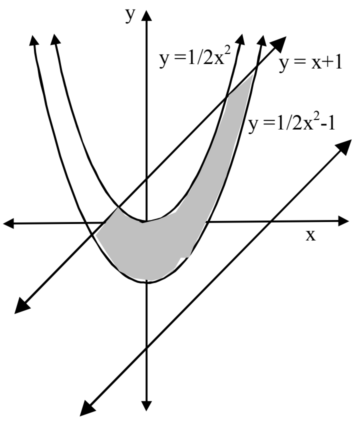
$t = 2$ için $m = -2$ bulunur.

17. $\left.\begin{array}{l} -1 \le x - y \le 4 \\ 0 \le x^2 - 2y \le 1 \end{array}\right\}$ sistemini, uygun bir x değeri ile birlikte sağlayan en büyük y değerini bulacağız.

Böyle 2. ya da daha yüksek dereceden terimler içeren eşitsizlik sistemlerinde, sistemi sağlayan sayı aralıklarını, eşitsizliklerin sadeleştirme, genişletme, toplama gibi özelliklerini kullanarak bulmaya çalışmak hatalara yol açabilir. Çözüm için, analitik düzlemde bu eşitsizliklere karşılık gelen kümelerden yararlanılmalıdır.

Eşitsizlikler y'ye göre düzenlenirse, analitik düzlemdeki küme daha kolay görülür:

$$\left.\begin{array}{l} -1 \le x - y \le 4 \\ 0 \le x^2 - 2y \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 4 \le y \le x + 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 1 \le y \le \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\}$$



Şekilden, istenen y değerinin $y = x + 1$ doğrusu ile $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ parabolünün kesim noktası olduğu görülür.

$$\frac{1}{2}x^2 - 1 = x + 1 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5},\ y = 2 + \sqrt{5}$$

18. Eğrilerin kesim noktaları, denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarıdır. Denklemlere dikkat edilirse, $x + y$ ve $x \cdot y$ değerlerinin kolayca bulunabileceği görülür. Bundan esinlenerek, eğrilerin (x, y) noktalarına karşılık gelen x ve y değerleri bir 2. derece denkleminin kökleri sayılırsa; bu denklemin köklerinin sayısı ile eğrilerin kesim noktalarının sayısı arasında bir bağlantı kurulmuş olur.

$$\left.\begin{array}{l} xy + x + y = 3m + 2 \\ 2xy - x - y = 4 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow x + y = 2m$ ve $xy = m + 2$

x ve y değerleri, $t^2 - 2mt + m + 2 = 0$ denkleminin kökleri sayılabilir. Denklemin t_1 ve t_2 kökleri için $t_1 = x$ ve $t_2 = y$ ya da $t_1 = y$ ve $t_2 = x$ yazılabileceğinden denklemin her bir kökü bir kesim noktasına karşılık gelir.

a. Öyleyse eğrilerin 4 farklı kesim noktaları olamaz.

b. Eğrilerin 2 farklı kesim noktalarının bulunması için denklemin iki farklı kökünün olması gerekir.
Buna göre; $\Delta > 0$ olmalıdır.
$\Delta = m^2 - m - 2 > 0 \Rightarrow m < -1$ veya $m > 2$ olması gerekir.

c. $-1 < m < 2$ ise $\Delta < 0$ olacağından eğriler kesişmez.

$m = 2$ ve $m = -1$ değerleri için de bir açıklama getirmek gerekir:
$m = 2$ için denklemin iki kat kökü olup eğrilerin, buna karşılık gelecek noktada teğet olacaklarını söyleyebiliriz. Bu noktanın koordinatları da kolayca bulunabilir. Sadace t li denkleme baka-rak $m = -1$ için de aynı şeylerin söylenebileceği düşünülebilir. Ancak; m türünden verilmiş denklemin, $m = -1$ için, kesişen iki doğruya karşılık geldiği görülür.

$xy + x + y = 3m + 2$ ve $m = -1$

$\Rightarrow xy + x + y + 1 = 0$

$\Rightarrow (x + 1) \cdot (y + 1) = 0$

Bu denklem $x = -1$ ve $y = -1$ doğrularının birlikte denklemidir.
Bu doğrularla diğer eğri, $(-1, -1)$ noktasında kesişirler