

Problem

z ve w birer karmaşık sayı olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} z^2 &= 2 + 2w \\ w^2 &= -2i \end{aligned} \right\}$$

denklemlerini sağlayan z sayılarını bulunuz.

Çözüm

$$w^2 = -2i$$

$$\Rightarrow w^2 = 1^2 - 2i + i^2 = (1 - i)^2$$

$$\Rightarrow w_1 = -1 + i \text{ ve } w_2 = 1 - i$$

olur.

w_1 ve w_2 değerleri $z^2 = 2 + 2w$ denkleminde yerine konulursa,

$z^2 = 2i$ ve $z^2 = 4 - 2i$ denklemleri elde edilir.

$$z^2 = 2i = 1^2 + 2i + i^2 = (1 + i)^2$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 + i \text{ ve } z_2 = -1 - i$$

bulunur.

$z^2 = 4 - 2i$ denkleminin kökleri, bu kadar kolay gelmez.

$z = x + yi$ denilirse,

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 4 \\ x \cdot y &= -1 \end{aligned} \right\}$$

sistemi gelir. Bu da çözümlerse.

$$z_3 = -\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{5}}} \cdot i \text{ ve}$$

$$z_4 = \sqrt{2 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{5}}} \cdot i$$

elde edilir.

z_1, z_2, z_3, z_4 sayıları, aranan sayılardır.