❑ POLİNOM İFADELERİN İŞARETLERİ

Bu bölümde $f(x)=ax+b$ iki terimlisi ile $f(x) = ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin, x in hangi değerleri için pozitif, hangi değerleri için negatif, hangi değerleri için sıfır olduğunu inceleyerek, elde edeceğimiz sonuçları eşitsizliklerin çözümünde kullanacağız.

■ $f(x)=ax+b$ İKİ TERİMLİSİNİN İŞARETİ

$ax+b=0 \Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$

❋ $x=-\dfrac{b}{a}$ için $f(x)=0$ olur.

❋ $x>-\dfrac{b}{a}$ ise $x+\dfrac{b}{a}>0$ olacağından;

$f(x)=ax+b=a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$ nın işareti a nın işareti ile aynı olur.

❋ $x<-\dfrac{b}{a}$ ise $x+\dfrac{b}{a}<0$ olacağından;

$f(x)=ax+b=a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$ nın işareti a nın işaretinin tersi olur.

x in değerlerine göre, $f(x)=ax+b$ nin işaretleri tablodaki gibidir.

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
f(x) = ax + b	a nýn iþareti-nin tersi	0	a nýn iþareti ile ayný

ÖRNEK : $f(x)=2x-3$ ün işaretini inceleyelim:

$2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$

$a=2>0$

x	$-\infty$	3/2	$+\infty$
f(x) = 2x - 3	$-$	0	$+$

$f(x)=2x-3$ fonksiyonunda, x yerine 3/2 den küçük hangi sayıyı koyarsak koyalım fonksiyonun değeri negatif bir sayı, 3/2 den büyük hangi sayıyı koyarsak koyalım fonksiyonun değeri pozitif bir sayı olacaktır.

Örneğin;
$f(1)=2.1-3=-1<0$
$f(2)=2.2-3=1>0$ dır.

■ $f(x)=ax^2+bx+c$ ÜÇ TERİMLİSİNİN İŞARETİ

Üç terimliyi $f(x)=Ax^2+C$ biçimine dönüştürelim:

$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$

x in katsayısının yarısının karesini bir ekleyip bir de çıkarırsak;

$f(x)=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{c}{a}\right)$

$f(x)=a\cdot\left[\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

$f(x)=ax^2+bx+c$ üç terimlisinin bu son biçimi üç terimlinin işaretini incelememizi kolaylaştıcaktır.

I. $b^2-4ac<0$ ise;

$-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}>0$ ve $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}>0$

olacağından;

$f(x)=a\cdot\left[\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ nin işareti a nın işareti ile aynı olacaktır.

$\Delta=b^2-4ac<0$ ise işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	a nýn iþareti ile ayný

ÖRNEK: $f(x)=-3x^2+5x-6$ üç terimlisinin işaretini inceleyelim:

$\Delta=25-72=-47<0$

$a=-3<0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)=-3x^2+5x-6$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$

$\forall x\in R$ için $f(x)<0$ dır.

II. $b^2-4ac=0$ ise;

$f(x)=a\cdot\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ biçimindedir.

$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ için $f(x)=0$ olup,

$\forall x\in R$ ve $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ için $f(x)$ in işareti a nın işareti ile aynı olur.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x) = ax²+ b + c	a nýn iþareti ile ayný	0	a nýn iþareti ile ayný

ÖRNEK: $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ **üç terimlisinin işaretini inceleyelim:**

$\Delta = 4^2 - 4.2.2 = 0$, $x_1 = x_2 = -1$

$a = 2 > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$	$+$	0	$+$

$\forall x \in R$ ve $x \neq -1$ için $f(x) > 0$ olur.

III. $b^2 - 4ac > 0$ ise;

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}\right)^2\right]$$

$$f(x) = a\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

$$f(x) = a\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Buradan görüldüğü gibi;

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirinden farklı gerçek kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere, $f(x) = ax^2 + bx + c$ üç terimlisi $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçiminde yazılabilir.

1. $x < x_1 < x_2$ ise;

$x - x_1 < 0$ ve $x - x_2 < 0$ olacağından

$(x - x_1)(x - x_2) > 0$ olup,

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ifadesinin işareti a nın işareti ile aynı olur.

2. $x_1 < x < x_2$ ise;

$x - x_1 > 0$ ve $x - x_2 < 0$ olacağından

$(x - x_1)(x - x_2) < 0$ olup,

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ifadesinin işareti a nın işaretinin tersi olur.

3. $x_1 < x_2 < x$ ise;

$x - x_1 > 0$ ve $x - x_2 > 0$ olacağından

$(x - x_1)(x - x_2) > 0$ olup

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ifadesinin işareti a nın işareti ile aynı olur.

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
f(x) = ax²+ bx + c	a nýn iþareti ile ayný	0	a nýn iþaretinin tersi	0	a nýn iþareti ile ayný

ÖRNEK: $f(x) = x^2 - 2x - 8$ **üç terimlisinin işaretini inceleyelim:**

$\Delta = 4 + 32 = 36 > 0,$ $x_1 = -2,$ $x_2 = 4$

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 2x - 8$	$+$	0	$-$	0	$+$

■ P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere; $f(x) = P(x) \cdot Q(x)$ ifadesinin işaretini belirlemek için P(x) ve Q(x) çarpanlarının işaretleri bulunur. P(x) ve Q(x) in işaretleri aynı tabloda alt alta yazılıp çarpılır.

ÖRNEK : $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3)$ **ifadesinin işaretini inceleyelim:**

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$, $x_4 = 3$

x	$-\infty$	-2		-1		2		3	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x^2 - 2x - 3$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f(x)	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

■ $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinin işareti $Q(x) \neq 0$ ise $P(x) \cdot Q(x)$ çarpımı ile aynıdır. $Q(x) = 0$ denkleminin kökleri $f(x)$ ifadesini tanımsız yapar. Bu durum tabloda || işareti ile gösterilir.

ÖRNEK : $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{1-x^2}$ **ifadesinin işaretini inceleyelim:**

$x^2-3x-4=0 \;\Rightarrow\; x_1=-1\,,\; x_2=4$

$1-x^2=0 \;\Rightarrow\; x_3=-1\,,\; x_4=1$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
x^2-3x-4		+	0	−		−	0	+	
$1-x^2$		−	0	+	0	−		−	
f(x)		−	‖	−	‖	+	0	−	

❑ EŞİTSİZLİKLER

$f(x)>0$; $f(x)\geq 0$;
$f(x)<0$; $f(x)\leq 0$

biçimindeki açık önermelere **eşitsizlik**, eşitsizliği doğrulayan x gerçek sayılarının kümesine **eşitsizliğin çözüm kümesi**, çözüm kümesini bulma işlemine de **eşitsizliği çözme** denir.

Bu konuda çözeceğimiz eşitsizliklerde f(x), polinom ifadelerin veya bunların rasyonel kuvvetlerinin toplamı, çarpımı veya bölümü biçiminde olacaktır.

Eşitsizliğin çözümü için önce f(x) in işaretleri belirlenir; sonra işaret tablosundan eşitsizliği doğrulayan gerçek sayılar kümesi saptanır.

ÖRNEKLER :

1. $3-5x>0$ **eşitsizliğini çözelim:**

1. yol: $3-5x=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{3}{5}\,,\; a=-5$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
3 - 5x		+	0	−	

Tablodan görüldüğü gibi $x<\dfrac{3}{5}$ ise $3-5x>0$ dır.

$$Ç=\left\{x:\; x<\frac{3}{5},\; x\in R\right\}$$

2. yol: $3-5x>0 \;\Rightarrow\; -5x>-3 \;\Rightarrow\; x<\dfrac{3}{5}$

$$Ç=\left\{x:\; x<\frac{3}{5},\; x\in R\right\}$$

2. $6-5x-x^2\leq 0$ **eşitsizliğini çözelim:**

$6-5x-x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2+5x-6=0$ ve
$x_1=-6\,,\; x_2=1\,,\; a=-1<0$

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
6 - 5x - x^2		−	0	+	0	−	

$$Ç=\{x:\,(x\leq -6)\vee(x\geq 1)\,,\; x\in R\}$$

3. $f(x)=(x^2-1)(x^2-4x-5)\leq 0$ **eşitsizliğini çözelim:**

$x^2-1=0 \;\Rightarrow\; x_1=-1\,,\; x_2=1$

$x^2-4x-5=0 \;\Rightarrow\; x_3=-1\,,\; x_4=5$

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+		+	
x^2-4x-5		+	0	−		−	0	+	
f(x)		+	0	+	0	−	0	+	

$$Ç=\{x:\,(x=-1)\vee(1\leq x\leq 5)\,,\; x\in R\}$$

4. $f(x)=\dfrac{(9-x^2)(x^2+2x-3)}{x^3(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)}\geq 0$ **eşitsizliğini çözelim:**

$9-x^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=-3\,,\; x_2=3$

$x^2+2x-3=0 \;\Rightarrow\; x_3=1\,,\; x_4=-3$

$x^3=0 \;\Rightarrow\; x_5=x_6=x_7=0$

$x^2-4x+4=0 \;\Rightarrow\; x_8=x_9=2$

$x^2-4x+3=0 \;\Rightarrow\; x_{10}=1\,,\; x_{11}=3$

x	$-\infty$		-3		0		1		2		3		$+\infty$
$9-x^2$		−	0	+		+		+		+	0	−	
x^2+2x-3		+	0	−		−	0	+		+		+	
x^3		−		−	0	+		+		+		+	
x^2-4x+4		+		+		+		+	0	+		+	
x^2-4x+3		+		+		+	0	−		−	0	+	
f(x)		+	0	+	‖	−	‖	−	‖	−	‖	−	

$$Ç=\{x:\; x<0,\; x\in R\}$$

PRATİK KURAL:

P(x), Q(x) ve R(x) birer polinom olmak üzere;
$f(x)=\dfrac{P(x)\cdot Q(x)}{R(x)}$ **biçimindeki ifadelerin işaretini belirlemek için** $P(x)=0,\; Q(x)=0,$ **ve** $R(x)=0$ **denklemlerinin kökleri küçükten büyüğe doğru tabloya yerleştirilir. P(x), Q(x) ve R(x) polinomlarının en büyük dereceli terimlerinin işaretlerinin çarpımı tabloda en büyük kökün sağına yazılır. Sola doğru her tek katlı köke rastlandığında işaret değiştirerek, çift katlı köklerde işaret değiştirmeden devam edilerek tablonun işaretleri tamamlanır.**

5. $\mathbf{f(x)=\dfrac{(x^2-4)(x^2-3x-10)(6-2x)}{(x^2-2x-15)(5-x)}\leq 0}$ **eşitsizliğini çözelim:**

$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2\ ,\ x_2=2$

$x^2-3x-10=0 \Rightarrow x_3=-2\ ,\ x_4=5$

$6-2x=0 \Rightarrow x_5=3$

$x^2-2x-15=0 \Rightarrow x_6=-3\ ,\ x_7=5$

$5-x=0 \Rightarrow x_8=5$

(-2) iki kez elde edildiğinden çift katlı kök, (5) üç kez elde edildiğinden tek katlı kök, (-3), (2) ve (3) birer kez elde edildiğinden tek katlı köklerdir.

Payın her çarpanındaki en büyük dereceli terimler (x^2), (x^2) ve $(-2x)$; paydanın her çarpanındaki en büyük dereceli terimler (x^2) ve $(-x)$ olup bunların katsayılarının işaretlerinin çarpımı $(+)(+)(-)(+)(-)=(+)$ dır.

Tabloyu düzenleyelim:

x	$-\infty$		-3		-2		2		3		5		$+\infty$
f(x)		+	‖	−	○	−	○	+	○	−	‖	+	

Paydanın köklerine ‖ konduğuna dikkat ediniz. f(x) te x yerine -3 ve 5 değerleri konulamaz.

$Ç=\{x:\ (-3<x\leq 2)\vee(3\leq x<5),\ \ x\in R\}$

6. $\mathbf{\dfrac{1}{x^2-2x-3}\geq\dfrac{1}{5}}$ **eşitsizliğini çözelim:**

Önce sağdaki terim eşitsizliğin sol tarafına geçirilerek sağ taraf sıfır yapılmalı, sonra paydalar eşitlenmelidir.

$$\frac{1}{x^2-2x-3}-\frac{1}{5}\geq 0 \Rightarrow \frac{5-x^2+2x+3}{5\cdot(x^2-2x-3)}\geq 0$$

paydaki kısaltmalar yapılarak eşitsizlik,

$f(x)=\dfrac{-x^2+2x+8}{5\cdot(x^2-2x-3)}\geq 0$ biçimine getirilir.

$-x^2+2x+8=0 \Rightarrow x_1=-2\ ,\ x_2=4$

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_3=-1\ ,\ x_4=3$

x	$-\infty$		-2		-1		3		4		$+\infty$
f(x)		−	○	+	‖	−	‖	+	○	−	

$Ç=\{x:\ (-2\leq x<-1)\vee(3<x\leq 4),\ \ x\in R\}$

UYARI

1) $\mathbf{\dfrac{P(x)}{Q(x)}=R(x)}$ **denkleminde** $\mathbf{Q(x)\neq 0}$ **ise iki taraf** $\mathbf{Q(x)}$ **ile çarpılabilir.** $\mathbf{P(x)=Q(x)\cdot R(x)}$ **olur.**

2) $\mathbf{\dfrac{P(x)}{Q(x)}<R(x)}$ **eşitsizliğinde** $\mathbf{Q(x)>0}$ **ise iki taraf** $\mathbf{Q(x)}$ **ile çarpıldığında,** $\mathbf{P(x)<Q(x)\cdot R(x)}$ **olur.**

3) $\mathbf{\dfrac{P(x)}{Q(x)}<R(x)}$ **eşitsizliğinde** $\mathbf{Q(x)<0}$ **ise iki taraf** $\mathbf{Q(x)}$ **ile çarpıldığında,** $\mathbf{P(x)>Q(x)\cdot R(x)}$ **olur.**

4) $\mathbf{\dfrac{P(x)}{Q(x)}<R(x)}$ **eşitsizliğinde** $\mathbf{Q(x)}$ **in işareti belirsiz ise iki taraf** $\mathbf{Q(x)}$ **ile çarpılamaz.**

7. $\mathbf{\dfrac{2x}{x^2-5}\leq\dfrac{1}{x-3}}$ **eşitsizliğini çözelim:**

$$\frac{2x}{x^2-5}-\frac{1}{x-3}\leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2-6x-x^2+5}{(x^2-5)(x-3)}\leq 0$$

$$f(x)=\frac{x^2-6x+5}{(x^2-5)(x-3)}\leq 0$$

$x^2-5=0 \Rightarrow x_3=-\sqrt{5}\ ,\ x_4=\sqrt{5}$

$x-3=0 \Rightarrow x_5=3$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		1		$\sqrt{5}$		3		5		$+\infty$
f(x)		−	‖	+	○	−	‖	+	‖	−	○	+	

$Ç=\{x:\ (x<-\sqrt{5})\vee(1\leq x<\sqrt{5})\vee(3<x\leq 5),\ \ x\in R\}$

❑ EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

Aynı zamanda gerçeklenen birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme **eşitsizlik sistemi** denir. Eşitsizlik sisteminin **çözüm kümesi,** sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin **kesişimidir.**

ÖRNEKLER:

1. $\left.\begin{matrix}\mathbf{3x-5\leq 0}\\ \mathbf{2x+1>0}\end{matrix}\right\}$ **sistemini çözelim:**

$3x-5\leq 0 \Rightarrow 3x\leq 5 \Rightarrow x\leq\dfrac{5}{3}$ ①

$2x+1>0 \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$ ②

① ve ② nin kesişimi $-\dfrac{1}{2}<x\leq\dfrac{5}{3}$ tür.

$$Ç=\left\{x:\ -\frac{1}{2}<x\leq\frac{5}{3}\ ,\ \ x\in R\right\}$$

2. $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x^2-2x-8<0} \\ \mathbf{2x-3\geq 0} \end{array}\right\}$ **sistemini çözelim:**

$f(x)=x^2-2x-8=0 \;\Rightarrow\; x_1=-2\,,\; x_2=4$

$g(x)=2x-3=0 \;\Rightarrow\; x_3=\dfrac{3}{2}$

f(x) ve g(x) in işaretlerini aynı tabloda gösterelim:

x	$-\infty$ … -2	-2 … $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ … 4	4 … $+\infty$
f(x)	+	−	−	+
g(x)	−	−	+	+
			çözüm	

$f(x)<0$ ve $g(x)\geq 0$ eşitsizliklerini sağlamayan aralıklar tarandığında eşitsizliğin çözümü taranmamış sütunlar olarak karşımıza çıkar.

$$Ç=\left\{x:\ \frac{3}{2}\leq x<4\ ,\ \ x\in R\right\}$$

3. $\mathbf{0<\dfrac{3x+1}{5-4x}\leq 2}$ **sistemini çözelim:**

Sistemi,

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x+1}{5-4x}>0 \\ \dfrac{3x+1}{5-4x}\leq 2 \end{array}\right\}$ biçiminde yazabiliriz.

② numaralı eşitsizliğin sağ tarafını sıfır yapıp paydaları eşitlersek;

$$\frac{3x+1}{5-4x}-2\leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{3x+1-10+8x}{5-4x}\leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{11x-9}{5-4x}\leq 0$$

elde edilir. Böylece sistem;

$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{3x+1}{5-4x}>0 \\ g(x)=\dfrac{11x-9}{5-4x}\leq 0 \end{array}\right\}$ biçimine dönüþür.

$f(x)$ ve g(x)in işaretlerini ayrı ayrı belirleyelim:

$3x+1=0 \;\Rightarrow\; x_1=-\dfrac{1}{3}$

$5-4x=0 \;\Rightarrow\; x_2=\dfrac{5}{4}$

$11x-9=0 \;\Rightarrow\; x_3=\dfrac{9}{11}$

x	$-\infty$ … $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ … $\frac{9}{11}$	$\frac{9}{11}$ … $\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$ … $+\infty$
f(x)	−	+	+	−
g(x)	−	−	+	−
		çözüm		

$$Ç=\left\{x:\ -\frac{1}{3}<x\leq\frac{9}{11},\ \ x\in R\right\}$$

4. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{1+\dfrac{4}{x^2-x-6}>0} \\ \mathbf{\dfrac{x^2+x-6}{x+1}\leq 0} \end{array}\right\}$ **sistemini çözelim:**

Ilk eşitsizliğin paydalarını eşitleyip kısaltmaları yaparsak ;

$$1+\frac{4}{x^2-x-6}>0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-x-6+4}{x^2-x-6}>0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-x-2}{x^2-x-6}>0$$

elde edilir. Böylece sistem;

$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-x-6}>0 \\ g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+1}\leq 0 \end{array}\right\}$ biçimine dönüþür.

$f(x)$ ve g(x)in işaretlerini ayrı ayrı belirleyip tabloda gösterelim:

$x^2-x-2=0 \;\Rightarrow\; x_1=-1\,,\; x_2=2$

$x^2-x-6=0 \;\Rightarrow\; x_3=-2\,,\; x_4=3$

$x^2+x-6=0 \;\Rightarrow\; x_5=-3\,,\; x_6=2$

$x+1=0 \;\Rightarrow\; x_7=-1$

	x	$-\infty$ … -3	-3 … -2	-2 … -1	-1 … 2	2 … 3	3 … $+\infty$
①	f(x)	+	+	−	+	−	+
②	g(x)	−	+	+	−	+	+
		çözüm			çözüm		

$$Ç=\{x:\ (x\leq -3)\vee(-1<x<2),\ \ x\in R\}$$

5. $\mathbf{x^2-2mx+2m+3>0}$ **eşitsizliğini, x in her değerinin sağlaması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM :

$f(x)=ax^2+bx+c$ ifadesinde $\Delta=b^2-4ac<0$ iken $f(x)$in işaretinin a nın işareti ile aynı olduğunu biliyoruz. Öyleyse; $\forall x,\ f(x)>0$ önermesinin doğru olması için;

$\left.\begin{array}{l} \Delta<0 \\ a>0 \end{array}\right\}$ olmalýdýr.

$a=1>0$ olduğundan, $\Delta<0$ olması yeterlidir.

$$\Delta'=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=m^2-2m-3<0$$

m	$-\infty$ … -1	-1 … 3	3 … $+\infty$
Δ'	+	−	+

$$-1<m<3$$

6. $(m-2)x^2-2mx+5m-6<0$ **eşitsizliğini, x in her değerinin sağlaması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM:

$f(x)=ax^2+bx+c$ ifadesinde $\Delta=b^2-4ac<0$ iken $f(x)$in işareti ile a nın işareti aynı olduğundan, $\Delta<0$ ve $a<0$ olmalıdır.

① $\Delta'=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=m^2-(m-2)(5m-6)<0$

② $a=m-2<0$

$\Delta'=m^2-5m^2+16m-12<0$

$\Delta'=-4m^2+16m-12<0$, $m_1=1$, $m_2=3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
a		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

$m<1$ olmalıdır.

❑ ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki eşitsizlikleri ve eşitsizlik sistemlerini çözünüz.

1. $3-5x\le 2x+3$

2. $\dfrac{2x+3}{2}\ge\dfrac{3x-5}{3}$

3. $x+2<\dfrac{2x-3}{2}$

4. $2x^2-3x-5<0$

5. $6-7x-3x^2\le 0$

6. $\dfrac{3-2x}{x-4}\ge 0$

7. $\dfrac{x}{4-3x-x^2}\le 0$

8. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-x+6}<0$

9. $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+x-12}<0$

10. $(x-1)(x-2)(x-3)^2\le 0$

11. $x^4+5x^2+4\le 0$

12. $x^4+3x^2-4\le 0$

13. $x^4-10x^2+9<0$

14. $\dfrac{3}{1-x}\ge 1$

15. $\dfrac{x-4}{x+4}\le 1$

16. $\dfrac{2-x}{2+x}\le 1$

17. $\dfrac{5x-2}{x+2}<2$

18. $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-6}\le 0$

19. $\dfrac{3x+2}{(x+2)^2}<\dfrac{1}{2}$

20. $\dfrac{2}{x+2}\le\dfrac{1}{x}$

21. $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}\ge 3$

22. $-2x^3(x^2-4)(3+x)\ge 0$

23. $(x^2-x+2)(x-2)^2(4-x)\le 0$

24. $(x^2-x-2)^3(x+2)^5\le 0$

25. $\dfrac{x^3}{(x^2-1)^2(x^2+1)}\le 0$

26. $(x^2+3x-2)^2<(x^2+2x+2)^2$

27. $\dfrac{(x^2-x-2)(4-x^2)}{(x^2+5x+4)(x^2+4)}\ge 0$

28. $\dfrac{5x+5}{x^2-4}\le\dfrac{8}{x-1}$

29. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}\ge\dfrac{3}{x}$

30. $(x^2+2x)(x^2+2x-2)\le 3$

31. $\left.\begin{array}{l}2x^2-3x+1>0\\ x^2-3x+2\le 0\end{array}\right\}$

32. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-4}{3}\le\dfrac{4}{x}\\ \dfrac{1}{x}<x\end{array}\right\}$

33. $\left.\begin{array}{l}x^2-x-2\ge 0\\ 0<x^2+5x\le 6\end{array}\right\}$

34. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x+1} < 2 \\ \dfrac{x-1}{x+1} > 1 \\ x^2 - 4 \le 0 \end{array}\right\}$

35. $\left.\begin{array}{l} (2x+1)^2 > 4(x-1)^2 \\ (2x-1)^2 \le (3x+1)^2 \end{array}\right\}$

36. $\left.\begin{array}{l} (2x-x-1)^2 \ge (x^2+x-2)^2 \\ (x^2+2x-1)^2 < (x^2+3x+4)^2 \end{array}\right\}$

❑ ÇÖZÜMLER; ÇÖZÜM YOLLARI

1. $3-5x \le 2x+3 \Rightarrow -7x \le 0 \Rightarrow x \ge 0$

$Ç = \{x : \ x \ge 0, \ x \in R\}$

2. $\dfrac{2x+3}{2} \ge \dfrac{3x-5}{3}$

Iki tarafı 6 ile çarparsak;

$3(2x+3) \ge 2(3x-5) \Rightarrow 9 \ge -10$

$Ç = \{x : \ x \in R\}$

3. $x+2 < \dfrac{2x-3}{2} \Rightarrow 2x+4 < 2x-3 \Rightarrow 4 < -3$

$Ç = \varnothing$

4. $Ç = \left\{x : \ -1 < x < \dfrac{5}{2}, \ x \in R\right\}$

5. $Ç = \left\{x : \ (x \le -3) \vee (x \ge \dfrac{2}{3}), \ x \in R\right\}$

6. $f(x) = \dfrac{3-2x}{x-4} \ge 0$

$3-2x = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{3}{2}$; $x-4=0 \Rightarrow x_2 = 4$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
f(x)		−	o	+	‖	−	

$Ç = \left\{x : \ \dfrac{3}{2} \le x < 4, \ x \in R\right\}$

7. $Ç = \{x : \ (-4 < x \le 0) \vee (x > 1), \ x \in R\}$

8. $f(x) = \dfrac{x^2-x-12}{x^2-x+6} < 0$

$x^2-x-12 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, \ x_2 = 4$

$x^2-x+6 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$, gerçek kök yok.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
f(x)		+	o	−	o	+	

$Ç = \{x : \ -3 < x < 4, \ x \in R\}$

9. $Ç = \{x : \ (-4 < x < -3) \vee (-3 < x < 3), \ x \in R\}$

10. $Ç = \{x : \ (1 \le x \le 2) \vee (x = 3), \ x \in R\}$

11. $x^4 + 5x^2 + 4 \le 0$

Kökleri bulmak için $x^2 = t$ dönüşümü yapalım:

$t^2 + 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = -1, \ t_2 = -4$

$x^2 = -1 \Rightarrow$ gerçek kök yok.

$x^2 = -4 \Rightarrow$ gerçek kök yok.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^4+5x^2+4	+ + + + +	

$Ç = \varnothing$

12. $x^4 + 3x^2 - 4 \le 0$

Kökleri bulmak için $x^2 = t$ dönüşümü yapalım:

$t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, \ t_2 = -4$

$x^2 = -4 \Rightarrow$ gerçek kök yok.

$x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, \ x_2 = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^4+3x^2-4		+	●	−	●	+	

$Ç = \{x : \ -1 \le x \le 1, \ x \in R\}$

13. $Ç = \{x : \ (-3 < x < -1) \vee (1 < x < 3), \ x \in R\}$

14. $\dfrac{3}{1-x} \ge 1$

Sağ tarafı sıfır yapıp paydaları eşitlersek ;

$\dfrac{3}{1-x} - 1 \ge 0 \Rightarrow \dfrac{3-1+x}{1-x} \ge 0 \Rightarrow \dfrac{2+x}{1-x} \ge 0$

eşitsizlik, $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x} \ge 0$ biçimine girer.

$2+x = 0 \Rightarrow x_1 = -2$; $1-x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f(x)		−	●	+	‖	−	

$Ç = \{x : \ -2 \le x < 1, \ x \in R\}$

15. $Ç = \{x : \; x > -4 \;, \; x \in R\}$

16. $Ç = \{x : \; (x < -2) \vee (x \geq 0) \;, \; x \in R\}$

17. $Ç = \{x : \; -2 < x < 2 \;, \; x \in R\}$

18. $Ç = \{x : \; (-5 \leq x < -2) \vee (2 \leq x < 3) \;, \; x \in R\}$

19. $\dfrac{3x+2}{(x+2)^2} < \dfrac{1}{2}$

Eşitsizliğin sağ tarafını sola geçirip paydaları eşitleyelim :

$$\frac{3x+2}{(x+2)^2} - \frac{1}{2} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{6x+4-x^2-4x-4}{2(x+2)^2} < 0$$

Eşitsizlik, $f(x) = \dfrac{-x^2+2x}{2(x+2)^2} < 0$ biçimine girer.

$-x^2 + 2x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;, \; x_2 = 2$

$2(x+2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = x_4 = -2$

x	$-\infty$		(çift) -2		0		2		$+\infty$
f(x)		$-$	‖	$-$	o	$+$	o	$-$	

$Ç = \{x : \; (x < -2) \vee (-2 < x < 0) \vee (x > 2) \;, \; x \in R\}$

20. $Ç = \{x : \; (x < -2) \vee (0 < x \leq 2) \;, \; x \in R\}$

21. $Ç = \{x : \; (-2 < x \leq -1) \vee (1 < x \leq 3) \;, \; x \in R\}$

22. $Ç = \{x : \; (-3 \leq x \leq -2) \vee (0 \leq x \leq 2) \;, \; x \in R\}$

23. $Ç = \{x : \; (x = 2) \vee (x \geq 4) \;, \; x \in R\}$

24. $(x^2 - x - 2)^3 (x+2)^5 \leq 0$

Üsler tek olduğundan, $(x^2 - x - 2)^3$ nün işareti $x^2 - x - 2$ ile, $(x+2)^5$ in işareti $x+2$ ile aynıdır.

Öyleyse eşitsizlik, $f(x) = (x^2 - x - 2)(x+2) \leq 0$ eşitsizliğine denktir.

$x^2 - x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1 \;, \; x_2 = 2$

$x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = -2$

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
f(x)		$-$	o	$+$	o	$-$	o	$+$	

$Ç = \{x : \; (x \leq -2) \vee (-1 \leq x \leq 2) \;, \; x \in R\}$

25. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x^2-1)^2 (x^2+1)} \leq 0$

$x^3 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = x_3 = 0$ Tek katlı kök

$(x^2 - 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2 (x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow x_4 = x_5 = 1$ (çift) , $x_6 = x_7 = -1$ (çift)

$x^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow$ gerçek kök yok.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)		$-$	‖	$-$	o	$+$	‖	$+$	

$Ç = \{x : \; (x \leq 0) \wedge (x \neq -1) \;, \; x \in R\}$

26. $(x^2 + 3x - 2)^2 < (x^2 + 2x + 2)^2$

Eşitsizliğin sağ tarafını sola geçirip ifadeyi iki kare farkı gibi çarpanlara ayıralım:

$(x^2 + 3x - 2)^2 - (x^2 + 2x + 2)^2 < 0$

$\Rightarrow (x^2 + 3x - 2 + x^2 + 2x + 2)(x^2 + 3x - 2 - x^2 - 2x - 2) < 0$

Eşitsizlik,

$f(x) = (2x^2 + 5x)(x - 4) < 0$ biçimine dönüşür.

$2x^2 + 5x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;, \; x_2 = -\dfrac{5}{2}$

$x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = 4$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		0		4		$+\infty$
f(x)		$-$	o	$+$	o	$-$	o	$+$	

$Ç = \left\{x : \; (x < -\dfrac{5}{2}) \vee (0 < x < 4) \;, \; x \in R\right\}$

27. $Ç = \{x : \; (-4 < x \leq -2) \vee (x = 2) \;, \; x \in R\}$

28. $\dfrac{5x+5}{x^2-4} \leq \dfrac{8}{x-1}$

Sağ tarafı sola geçirip paydaları eşitleyelim :

$$\frac{5x+5}{x^2-4} - \frac{8}{x-1} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{5x^2 - 5 - 8x^2 + 32}{(x^2-4)(x-1)} \leq 0$$

Eşitsizlik,

$f(x) = \dfrac{-3x^2 + 27}{(x^2-4)(x-1)} \leq 0$ biçimine dönüşür.

$-3x^2 + 27 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -3 \;, \; x_2 = 3$

$x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = -2 \;, \; x_4 = 2$

$x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_5 = 1$

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		3		$+\infty$
f(x)		$+$	o	$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	o	$-$	

$Ç = \{x : \; (-3 \leq x < -2) \vee (1 < x < 2) \vee (x \geq 3) \;, \; x \in R\}$

29. $Ç = \{x : \; (-2 < x < 0) \vee (1 < x \leq 2) \;, \; x \in R\}$

30. $(x^2+2x)(x^2+2x-2)\le 3$

$\Rightarrow f(x)=(x^2+2x)(x^2+2x-2)-3\le 0$

Kökleri bulmak için $x^2+2x=t$ dönüşümü yapalım:

$t(t-2)-3=0$

$t^2-2t-3=0 \;\Rightarrow\; t_1=-1\,,\;\; t_2=3$

$x^2+2x=-1 \;\Rightarrow\; x^2+2x+1=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=-1$

$x^2+2x=3 \;\Rightarrow\; x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow x_3=1\,,\;\; x_4=-3$

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
f(x)	+	○	−	○	−	○	+

$Ç=\{x:\; -3\le x\le 1\,,\; x\in R\}$

31. $Ç=\{x:\; 1<x\le 2\,,\; x\in R\}$

32. $Ç=\{x:\; 1<x\le 6\,,\; x\in R\}$

33. $\left.\begin{array}{l} x^2-x-2\ge 0 \\ 0<x^2+5x\le 6 \end{array}\right\}$ sistemi

$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2-x-2\ge 0 \\ \text{II.} & x^2+5x>0 \\ \text{III.} & x^2+5x-6\le 0 \end{array}\right\}$ sistemine denktir.

$x^2-x-2=0 \;\Rightarrow\; x_1=-1\,,\;\; x_2=2$

$x^2+5x=0 \;\Rightarrow\; x_3=0\,,\;\; x_4=-5$

$x^2+5x-6=0 \;\Rightarrow\; x_5=1\,,\;\; x_6=-6$

x	$-\infty$ … -6	-6 … -5	-5 … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
I.	+	+	+	−	−	−	+
II.	+	+	−	−	+	+	+
III.	+	−	−	−	−	+	+
		çözüm					

$Ç=\{x:\; -6\le x<-5\,,\; x\in R\}$

34. $Ç=\{x:\; -2\le x<-1\,,\; x\in R\}$

35. Eşitsizliklerin sağ taraflarını sola geçirip, iki kare farkı gibi çarpanlara ayırınız.

$$Ç=\left\{x:\; x>\frac{1}{4}\,,\; x\in R\right\}$$

36. $Ç=\left\{x:\; (-5<x<-\frac{3}{2})\vee(x\ge 1)\,,\; x\in R\right\}$

❑ MUTLAK DEĞERLİ DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

a bir gerçek sayı olmak üzere, **-a** ve **a** sayılarından negatif olmayanına **a nın mutlak değeri** denildiğini;

Mutlak değer tanımının

$$|a|=\begin{cases} \mathbf{a}\,, & \mathbf{a\ge 0 \text{ ise}} \\ \mathbf{-a}\,, & \mathbf{a<0 \text{ ise}} \end{cases}$$

biçiminde de yapılabileceğini;

Her a ve b gerçek sayısı için,

① $|a|\ge 0$

② $|a|=|-a|$

③ $-|a|\le a\le |a|$

④ $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

⑤ $b\ne 0$ **için** $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$

⑥ $|a|-|b|\le |a+b|\le |a|+|b|$

⑦ $|a|=|b| \;\Rightarrow\; (a=b)$ **veya** $(a=-b)$

⑧ $|a^2|=|a|^2=a^2$

⑨ $|a^n|=|a|^n$

olduğunu Matematik 1 derslerinizden hatırlayınız.

Bir gerçek sayının mutlak değerinin **negatif olmadığını** bir kez daha vurgulayalım. $a<0$ iken $|a|=-a$ olması mutlak değerin negatif de olabileceği biçiminde yorumlanmamalıdır. $a<0$ iken $-a>0$ olacağı açıktır.

Örneğin; $a=-5$ iken,

$|a|=|-5|=-(-5)=5=-a$ dır.

❈ Bu bölümde mutlak değerli ifadeler içeren denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulacağız.

Yalnız bir mutlak değerli ifade bulunduran, mutlak değerli ifade dışındaki terimleri bilinmeyen içermeyen denklem ve eşitsizliklerin pratik çözümleri, aşağıdaki gibi yapılır.

■ **$|x| = a$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ**

> **$a \in R^+ \cup \{0\}$ olmak üzere,**
> **$|x| = a \Rightarrow x = -a$ veya $x = a$ dır.**

Ispat :

$x \geq 0$ ise $|x| = x = a$ ①

$x < 0$ ise $|x| = -x = a \Rightarrow x = -a$ ②

Öyleyse,

$\forall x \in R$ için $|x| = a \Rightarrow x = -a$ veya $x = a$ açık önermesi doğrudur.

ÖRNEKLER:

1. **$|x| = 7$ denklemini çözelim:**

$|x| = 7 \Rightarrow x = -7$ veya $x = 7$ dir.

$Ç = \{-7,\ 7\}$

2. **$|2x-3| = 5$ denklemini çözelim:**

$2x - 3 = -5$ veya $2x - 3 = 5$

$\Rightarrow 2x = -2$ veya $2x = 8$

$\Rightarrow x = -1$ veya $x = 4$

$Ç = \{-1,\ 4\}$

3. **$|3x-5| = -4$ denklemini çözelim:**

$\forall x \in R$ için $|3x-5| \geq 0$ olacağından denklemi hiçbir gerçek sayı sağlamaz.

$Ç = \varnothing$

■ **$|x| \leq a$ EŞİTSİZLİĞİNİN ÇÖZÜMÜ**

> **$a \in R^+ \cup \{0\}$ için**
> **$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ dır.**

Ispat :

$x \geq 0$ ise $|x| = x$ olacağından,

$|x| \leq a \Rightarrow 0 \leq x \leq a$ dır. ①

$x < 0$ ise $|x| = -x$ olacağından,

$|x| \leq a \Rightarrow -x \leq a \Rightarrow -a \leq x < 0$ dır. ②

① ve ② den;

$\forall x \in R$ için $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ açık önermesi doğrudur.

ÖRNEKLER:

1. **$|3x-1| \leq 4$ eşitsizliğini çözelim:**

$|3x-1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 3x-1 \leq 4$

$\Rightarrow -3 \leq 3x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{5}{3}$

$Ç = \left\{x:\ -1 \leq x \leq \frac{5}{3},\ x \in R\right\}$

2. **$|5-2x| < 7$ eşitsizliğini çözelim:**

$|5-2x| < 7 \Rightarrow -7 \leq 5-2x < 7$

$\Rightarrow -12 < -2x < 2 \Rightarrow 6 > x > -1$

$Ç = \{x:\ -1 \leq x \leq 6,\ x \in R\}$

■ **$|x| \geq a$ EŞİTSİZLİĞİNİN ÇÖZÜMÜ**

> **$a \in R^+ \cup \{0\}$ için**
> **$|x| \geq a \Rightarrow (x \leq -a)$ veya $(x \geq a)$ dır.**

Ispat :

$x \geq 0$ için $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$

$x < 0$ için $|x| \geq a \Rightarrow -x \geq a \Rightarrow x \leq -a$

Öyleyse,

$\forall x \in R$ için $|x| \geq a \Rightarrow (x \leq -a)$ veya $(x \geq a)$ açık önermesi doğrudur.

ÖRNEKLER:

1. **$|7-5x| > 3$ eşitsizliğini çözelim:**

$|7-5x| > 3 \Rightarrow (7-5x < -3)$ veya $(7-5x > 3)$

$\Rightarrow (-5x < -10)$ veya $(-5x > -4)$

$\Rightarrow (x > 2)$ veya $(x < \frac{4}{5})$

$Ç = \left\{x:\ (x < \frac{4}{5})\text{ veya }(x > 2),\ x \in R\right\}$

2. **$|6x-15| \geq -4$ eşitsizliğini çözelim:**

$\forall x \in R$ için $|6x-15| > 0$ olacağından her x gerçek sayısı eşitsizliği sağlar.

$Ç = \{x:\ x \in R\}$

MUTLAK DEĞERLİ DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLERİN GENEL ÇÖZÜM YOLU

Denklem veya eşitsizlikte, mutlak değerli ifadelerin dışında bilinmeyen içeren terim varsa veya birden fazla mutlak değerli ifade varsa çözüm için şu yol izlenir :

Önce mutlak değerli ifadelerin kökleri bulunur. Bu köklerin sayı eksenini ayırdığı aralıklarda, mutlak değer içindeki ifadelerin işaretleri belirlenir.

Mutlak değer içindeki ifadeler, işaretlerine göre mutlak değerden kurtarılarak her aralıkta çözüm yapılır. Bulunan çözümle, içinde işlem yapılan aralığın kesişimi o aralıktaki çözümdür.

Son olarak, ayrı ayrı aralıklarda bulunan çözüm kümelerinin bileşimi alınarak denklem veya eşitsizliğin çözüm kümesi elde edilir.

ÖRNEKLER:

1. $|x-2|+3x+6=0$ **denklemini çözelim:**

Mutlak değer içindeki ifadenin kökünü bulalım:

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

1. $x<2$ ise $x-2<0$ olacağından
$|x-2|=-(x-2)=-x+2$ dir.

Bu durumda denklem,

$-x+2+3x+6=0$ biçimine dönüşür ve çözümü $x=-4$ olarak bulunur.

$-4<2$ olduğundan (-4) denklemin bir köküdür.

2. $x\geq 2$ ise $x-2\geq 0$ olacağından
$|x-2|=x-2$ dir.

Bu durumda denklem,

$x-2+3x+6=0$ biçimine dönüşür ve çözümü $x=-1$ olarak bulunur.

$-1\geq 2$ yanlış olduğundan (-1) denklemin kökü değildir.

Öyleyse; $Ç=\{-4\}$ tür.

❋ Bu işlemler, bir tablo içinde yapılırsa hem dağınıklık önlenmiş hem de hata yapma olasılığı azaltılmış olur.

Belli bir aralıkta, mutlak değer içindeki ifadenin mutlak değer dışına nasıl çıkarılacağını kolayca bulmak için x yerine o aralıkta her hangi bir sayı konur. Ifadenin o sayı için değeri pozitif ise ifade olduğu gibi, negatif ise ifadenin (-1) ile çarpımı mutlak değer dışına çıkarılır.

Şimdi, $|x-2|+3x+6=0$ denklemini bu açıklamaya göre çözelim :

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x<2$ ise	2 $\quad$ $x\geq 2$ ise
$x-2$ ifadesinde x yerine 2 den küçük bir sayı, örneğin 0 konursa $0-2=-2<0$ olacağından $|x-2|=-x+2$ olur. Denklemde yerine konursa; $-x+2+3x+6=0$ $\Rightarrow 2x+8=0$ $\Rightarrow x=-4$ (-4), içinde işlem yaptığımız aralığın elemanıdır. (-4) denklemin köküdür.	$x-2$ ifadesinde x yerine 2 den büyük bir sayı, örneğin 3 konursa $3-2=1>0$ olacağından $|x-2|=x-2$ olur. Denklemde yerine konursa; $x-2+3x+6=0$ $\Rightarrow 4x+4=0 \Rightarrow x=-1$ (-1), içinde işlem yaptığımız aralığın elemanı değildir. (-1) denklemin kökü değildir.

$Ç=\{-4\}$

2. $x^2-2|x|-3=0$ **denklemini çözelim:**

$x<0$ ise	0 $\quad$ $x\geq 0$ ise
$|x|=-x$ olup denklem, $x^2+2x-3=0$ biçimindedir. $x_1=-3$, $x_2=1$ $x_2=1$, bu aralığın elemanı değildir. $x_1=-3$, bu aralığın elemanı olup denklemin de köküdür.	$|x|=x$ olup denklem, $x^2-2x-3=0$ biçimindedir. $x_3=-1$, $x_4=3$ $x_3=-1$, bu aralığın elemanı değildir. $x_4=3$, bu aralığın elemanı olup denklemin de köküdür.

$Ç=\{-3,3\}$

3. $x^2-|3x-2|=0$ **denklemini çözelim:**

$3x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$

$x<\dfrac{2}{3}$ ise	$\dfrac{2}{3}$ $\quad$ $x\geq\dfrac{2}{3}$ ise
$|3x-2|=-3x+2$ olup denklem, $x^2+3x-2=0$ biçimindedir. $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ Kökler $x<\dfrac{2}{3}$ koşuluna uyduğundan verilen denklemin de kökleridir. $Ç_1=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$	$|3x-2|=3x-2$ olup denklem, $x^2-3x+2=0$ biçimindedir. $x_3=1$, $x_4=2$ Kökler $x\geq\dfrac{2}{3}$ koşuluna uyduğundan verilen denklemin de kökleridir. $Ç_2=\{1, 2\}$

$$Ç=Ç_1\cup Ç_2 \ ; \quad Ç=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 1, 2\right\}$$

4. $\left|x^2-x-1\right| = \left|x^2-3x+3\right|$ **denklemini çözelim:**

$|a| = |b| \;\Rightarrow\; a = b$ veya $a = -b$ olduğunu hatırlayınız.

Öyleyse;

① $x^2-x-1 = x^2-3x+3$ ve
② $x^2-x-1 = -x^2+3x-3$

denklemlerinin çözüm kümelerinin bileşimi verilen denklemin çözümü olacaktır.

① $x^2-x-1 = x^2-3x+3 \;\Rightarrow\; 2x = 4 \;\Rightarrow\; x = 2$
$Ç_1 = \{2\}$

② $x^2-x-1 = -x^2+3x-3 \;\Rightarrow\; 2x^2-4x+2 = 0$
$(x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = 1$; $Ç_2 = \{1\}$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$, $Ç = \{1,2\}$

5. $|x-2| \le |2x-5|$ **eşitsizliğini çözelim:**

Iki taraf da negatif olmadığından eşitsizliğin iki tarafının karesi alınırsa eşitsizlik bozulmaz.

$(0 \le a \le b$ ise $a^2 \le b^2)$

$x^2-4x+4 \le 4x^2-20x+25$
$f(x) = -3x^2+16x-21 \le 0$

Sol tarafın kökleri $7/3$ ve 3 tür.

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$Ç = \left\{x :\; x \le \frac{7}{3} \text{ veya } x \ge 3\right\}$

6. $3 < |2x+1| \le 7$ **eşitsizliğini çözelim:**

$2x+1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2}$

$x < -\frac{1}{2}$ ise	$-\frac{1}{2}$	$x \ge -\frac{1}{2}$ ise
$\lvert 2x+1\rvert = -2x-1$		$\lvert 2x+1\rvert = 2x+1$
$3 < -2x-1 \le 7$		$3 < 2x+1 \le 7$
$-4 \le x < -2$		$1 < x \le 3$
$Ç_1 = [-4,-2)$		$Ç_2 = (1,3]$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$, $Ç = [-4,-2) \cup (1,3]$

7. $|x-2|+|x+1|+3x-6=0$ **denklemini çözelim:**

Mutlak değer içindeki ifadelerin kökleri,

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ ve $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ dir.

$x<-1$ ise	$-1 \le x<2$ ise	$x \ge 2$ ise
$\lvert x-2\rvert=-x+2$ ve $\lvert x+1\rvert=-x-1$ olup denklem $-x+2-x-1+3x-6=0$ biçimindedir.	$\lvert x-2\rvert=-x+2$ ve $\lvert x+1\rvert=x+1$ olup denklem $-x+2+x+1+3x-6=0$ biçimindedir.	$\lvert x-2\rvert=x-2$ ve $\lvert x+1\rvert=x+1$ olup denklem $x-2+x+1+3x-6=0$ biçimindedir.
Buradan $x=5$ bulunur. $5 \notin (-\infty,\ -1)$	Buradan $x=1$ bulunur. $1 \in [-1,\ 2)$	Buradan $x=7/5$ bulunur. $7/5 \notin [2,\ +\infty)$
$Ç_1=\varnothing$	$Ç_2=\{1\}$	$Ç_3=\varnothing$

$$Ç=Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 \Rightarrow Ç=\{1\}$$

8. $|2x-1| \le |x+1|+x-1$ **eşitsizliğini çözelim:**

Mutlak değer içindeki ifadelerin kökleri,

$2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ve $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ dir.

$x<-1$ ise	$-1 \le x<1/2$ ise	$x \ge 1/2$ ise
$\lvert 2x-1\rvert=-2x+1$, $\lvert x+1\rvert=-x-1$	$\lvert 2x-1\rvert=-2x+1$, $\lvert x+1\rvert=x+1$	$\lvert 2x-1\rvert=2x-1$, $\lvert x+1\rvert=x+1$
$-2x+1 \le -x-1+x-1$	$-2x+1 \le x+1+x-1$	$2x-1 \le x+1+x-1 \Rightarrow 0 \le 1$
$\Rightarrow -2x \le -3 \Rightarrow x \ge \dfrac{3}{2}$	$\Rightarrow -4x \le -1 \Rightarrow x \ge \dfrac{1}{4}$	Bu sonuç, bu aralıktaki her x değerinin eşitsizliği sağladığını gösterir.
Bulunan çözümle bu aralığın kesişimi $(-\infty,\ -1) \cap [3/2,\ +\infty)=\varnothing$	Bulunan çözümle bu aralığın kesişimi $[-1,\ 1/2) \cap [1/4,\ +\infty)=[1/4,\ 1/2)$	
$Ç_1=\varnothing$	$Ç_2=[1/4,\ 1/2)$	$Ç_3=[1/2,\ +\infty)$

$$Ç=Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 \Rightarrow Ç=\varnothing \cup [1/4,\ 1/2) \cup [1/2,\ +\infty) \Rightarrow Ç=[1/4,\ +\infty)$$

9. $|x^2-4|+3x=0$ **denklemini çözelim:**

Mutlak değer içindeki ifadenin kökleri,

$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2$ ve $x_2=2$ dir.

$x<-2$ ise	$-2 \le x<2$ ise	$x \ge 2$ ise
$\lvert x^2-4\rvert=x^2-4$	$\lvert x^2-4\rvert=-x^2+4$	$\lvert x^2-4\rvert=x^2-4$, $x^2+3x-4=0$
$x^2+3x-4=0$	$-x^2+3x+4=0$	$x_5=1$, $x_6=-4$, $Ç_3=\varnothing$
$x_1=-4$, $x_2=1$	$x_3=-1$, $x_4=4$	$x \ge 2$ için eşitsizliğin sol tarafı daima pozitif olacağından bu aralıkta çözümün $\varnothing$ olacağı açıktır.
$Ç_1=\{-4\}$	$Ç_2=\{-1\}$	

$$Ç=Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 \Rightarrow Ç=\{-4,-1\}$$

10. $\left|2x-|x-3|\right|=6$ **denklemini çözelim:**

$|x|=a \Rightarrow x=-a$ veya $x=a$ olduğunu hatırlayınız !

Öyleyse ;

① $2x-|x-3|=-6$ ve

② $2x-|x-3|=6$

denklemlerinin çözüm kümelerinin bileşimi verilen denklemin çözüm kümesi olacaktır.

① $2x-|x-3|=-6$

$x<3$ ise	$x\geq 3$ ise
$|x-3|=-x+3$ $2x+x-3=-6$ $x=-1$ $Ç_1=\{-1\}$	$|x-3|=x-3$ $2x-x+3=-6$ $x=-9$ $Ç_2=\varnothing$

$Ç_1'=\{-1\}$

② $2x-|x-3|=6$

$x<3$ ise	$x\geq 3$ ise
$2x+x-3=6$ $x=3$ $Ç_1=\varnothing$	$2x-x+3=6$ $x=3$ $Ç_2=\{3\}$

$Ç_2'=\{3\}$

Verilen denklemin çözüm kümesi ;

$Ç=Ç_1'\cup Ç_2'$, **Ç** $=\{-1,3\}$

11. $\left|2-|x-1|\right|=x+1$ **denklemini çözelim:**

Içiçe mutlak değerli ifadelerde önce içteki mutlak değer işareti kaldırılır.

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x<1$ ise	$x\geq 1$ ise
$|x-1|=-x+1$ $|2+x-1|=x+1$ $\Rightarrow |x+1|=x+1$ $\Rightarrow x\geq -1$ $Ç_1=\{x:\ -1\leq x<1\}$	$|x-1|=x-1$ $|2-x+1|=x+1$ $\Rightarrow |3-x|=x+1$

$1\leq x<3$	$x\geq 3$
$3-x=x+1$ $x=1$ $Ç_2=\{1\}$	$x-3=x+1$ $-3=1$ $Ç_3=\varnothing$

$Ç=Ç_1\cup Ç_2\cup Ç_3$, **Ç** $=\{x:\ -1\leq x\leq 1,\ x\in R\}$

12. $\left|x^2-3x+2\right|-2|x-1|=0$ **denklemini çözelim:**

Denklemin sol tarafı çarpanlarına ayrılıp her çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenebilir.

$|x-1|\cdot|x-2|-2|x-1|=0$

$\Rightarrow |x-1|\cdot(|x-2|-2)=0$

$|x-1|=0 \Rightarrow x_1=1$

$|x-2|-2=0 \Rightarrow |x-2|=2$

$\Rightarrow x-2=-2$ veya $x-2=2$

$\Rightarrow x_2=0$, $x_3=4$

$Ç=\{0,1,4\}$

13. $|x+2|-\left|x^2-2x-8\right|\geq 0$ eşitsizliğini çözelim:

$|x+2|-|x+2|\cdot|x-4|\geq 0$

$\Rightarrow |x+2|\cdot(1-|x-4|)\geq 0$

$\forall x$ için $|x+2|\geq 0$ olduğundan eşitsizliğin gerçeklenmesi için $1-|x-4|\geq 0$ olmalıdır.

$\Rightarrow |x-4|\leq 1$

$\Rightarrow -1\leq x-4\leq 1$

$\Rightarrow 3\leq x\leq 5$

$Ç=\{x:\ 3\leq x\leq 5\}$

❑ ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

1. $|3x-5|=-1$

2. $|7-x|\geq -5$

3. $|2x-3|=5$

4. $|3x-1|\leq 8$

5. $|5-2x|<3$

6. $|5x+4|>6$

7. $|x-2|+2x+4=0$

8. $\left|x^2-3x-2\right|=2$

9. $\left|x^2-1\right|\leq 8$

10. $|x-3|=|x|+1$

11. $|x-2|-|x|=4$

12. $|x-2|=|x|+2$

13. $|x-3|=|x|-1$

14. $1<|3x-2|\leq 4$

15. $x^2-|x-2|-4=0$

16. $x^2-3|x|-4\leq 0$

17. $\left|x^2+2x\right| = x^2-4$

18. $\left|x^2-4\right| - 2\left|x+2\right| = 0$

19. $\dfrac{x^2-x-6}{|x|+2} \le 0$

20. $\dfrac{x^2+2x-3}{|x+1|} \le 0$

21. $\left|\dfrac{x}{x+2}\right| \le 1$

22. $\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right| > 2$

23. $\left|\dfrac{3x}{x^2+2}\right| \ge 1$

24. $\dfrac{|2-x|}{x+2} \ge 1$

25. $\dfrac{|x|+2}{|x-2|} \ge 2$

26. $\dfrac{|x-1|+2x}{x} < 3$

27. $\left|\dfrac{x}{x^2-2}\right| \ge 1$

28. $\dfrac{x^2+2|x|-3}{x+1} \ge 2x$

29. $\dfrac{|x+2|}{x^2-x-6} \ge \dfrac{1}{2}$

30. $\dfrac{x^2-|x|-2}{9-x^2} \ge 0$

31. $\left|2x-|x-4|\right| \le x$

❑ ÇÖZÜMLER; ÇÖZÜM YOLLARI

1. $Ç = \varnothing$ **2.** $Ç = R$ **3.** $Ç = \{-1, 4\}$

4. $Ç = \left\{x : -\dfrac{7}{3} \le x \le 3 ,\ x \in R\right\}$

5. $Ç = \{x : 1 < x < 4 ,\ x \in R\}$

6. $Ç = \left\{x : (x < -2) \vee \left(x > \dfrac{2}{5}\right),\ x \in R\right\}$

7. $Ç = \{-6\}$

8. $\left|x^2-3x-2\right| = 2$

$\Rightarrow x^2-3x-2 = -2$ veya $x^2-3x-2 = 2$

$\Rightarrow x^2-3x = 0$ veya $x^2-3x-4 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 ,\ x_2 = 3 ,\ x_3 = -1 ,\ x_4 = 4$

$Ç = \{-1, 0, 3, 4\}$

9. $\left|x^2-1\right| \le 8$

$\Rightarrow -8 \le x^2-1 \le 8 \ \Rightarrow\ -7 \le x^2 \le 9$

$\forall x$ için $-7 \le x^2$ olduğundan $x^2 \le 9$ eşitsizliğinin gerçeklenmesi yeterlidir.

$x^2 \le 9 \ \Rightarrow\ |x| \le 3 \ \Rightarrow\ -3 \le x \le 3$

$Ç = \{x : -3 \le x \le 3 ,\ x \in R\}$

10. $|x-3| = |x|+1$

1. yol:

$x < 0$	$0 \le x < 3$	$x \ge 3$
$-x+3 = -x+1$	$-x+3 = x+1$	$x+3 = x+1$
$3 = 1$	$-2x = -2$	$-3 = 1$
$Ç_1 = \varnothing$	$x = 1$	$Ç_3 = \varnothing$
	$Ç_2 = \{1\}$	

$Ç = \{1\}$

2. yol: Iki yanın karesi alınırsa;

$x^2-6x+9 = x^2+2|x|+1$

$\Rightarrow 8-6x = 2|x|$

$\Rightarrow 4-3x = |x|$

$x < 0$ ise	$x \ge 0$ ise
$4-3x = -x$	$4-3x = x$
$x = 2$	$x = 1$
$Ç_1 = \varnothing$	$Ç_2 = \{1\}$

$Ç = \{1\}$

11. $Ç = \varnothing$

12. $Ç = \{x : x \le 0 ,\ x \in R\}$ **13.** $Ç = \{2\}$

14. $Ç = \left\{x : \left(-\dfrac{2}{3} \le x < \dfrac{1}{3}\right) \vee (1 < x \le 2) ,\ x \in R\right\}$

15. $Ç = \{-3, 2\}$

16. $Ç = \{x : -4 \le x \le 4 ,\ x \in R\}$

17. $\left|x^2+2x\right| = x^2-4$

$x^2+2x = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 0 ,\ x_2 = -2$

$x < -2$	$-2 \le x < 0$	$x \ge 3$
$\left|x^2+2x\right| = x^2+2x$	$\left|x^2+2x\right| = -x^2-2x$	$\left|x^2+2x\right| = x^2+2x$
$x^2+2x = x^2-4$	$-x^2-2x = x^2-4$	$x^2+2x = x^2-4$
$2x = -4$	$-2x^2-2x+4 = 0$	$2x = -4$
$x = -2$	$-x^2-x+2 = 0$	$x = -2$
$Ç_1 = \varnothing$	$x_1 = -2 ,\ x_2 = 1$	$Ç_3 = \varnothing$
	$Ç_2 = \{-2\}$	

$Ç = \{-2\}$

18. $|x^2-4|=|x-2|\cdot|x+2|$ olduğunu görüp sol tarafı çarpanlarına ayırınız.

$Ç=\{-2,0,4\}$

19. $\dfrac{x^2-x-6}{|x|+2}\le 0$

Sol tarafın paydası her x değeri için pozitif olacağından $x^2-x-6\le 0$ olması gereklidir ve yeterlidir.

$x_1=-2\ ,\ \ x_2=3$

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
x^2-x-6	$+$		$-$		$+$

çözüm

$Ç=\{x:\ -2\le x\le 3\ ,\ x\in R\}$

20. $\dfrac{x^2+2x-3}{|x+1|}\le 0$

$x\ne -1$ olmak koşuluyla $|x+1|>0$ olduğundan $x^2+2x-3\le 0$ eşitsizliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir.

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_1=-3\ ,\ x_2=1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
x^2+2x-3	$+$		$-$		$+$

çözüm

$x\ne -1$ olması gerektiği için,

$Ç=[-3,1]-\{-1\}$

21. $\left|\dfrac{x}{x+2}\right|\le 1$

1. yol:

$-1\le\dfrac{x}{x+2}\le 1$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{x+2}\le 1\\[2mm] \dfrac{x}{x+2}\ge -1\end{array}\right\}$ sistemi çözülür.

$Ç=\{x:\ x\ge -1\ ,\ x\in R\}$

2. yol:

$\left|\dfrac{x}{x+2}\right|\le 1 \Rightarrow \dfrac{|x|}{|x+2|}\le 1$

-2 değeri paydayı sıfır yaptığından, $x\ne -2$ olmak koşuluyla, iki taraf $|x+2|$ ile çarpılabilir.

$\Rightarrow |x|\le|x+2|$, iki tarafın karesi alınırsa;

$\Rightarrow x^2\le x^2+4x+4$

$\Rightarrow x\ge -1$

$Ç=\{x:\ x\ge -1\ ,\ x\in R\}$

22. $\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right|>2$

1. yol:

$\dfrac{2x-3}{x+1}<-2$ veya $\dfrac{2x-3}{x+2}>2$

① $\dfrac{2x-3}{x+1}<-2 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{x+1}+2<0 \Rightarrow \dfrac{4x-1}{x+1}<0$

$\Rightarrow -1<x<\dfrac{1}{4}$, $\quad Ç_1=\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$

② $\dfrac{2x-3}{x+1}>2 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{x+1}-2>0 \Rightarrow \dfrac{-5}{x+1}>0$

$\Rightarrow x<-1$, $\quad Ç_2=(-\infty,-1)$

23. $\left|\dfrac{3x}{x^2+2}\right|\ge 1$

$\forall x\in R$ için $x^2+2>0$ dır.

$\left|\dfrac{3x}{x^2+2}\right|\ge 1 \Rightarrow \dfrac{|3x|}{x^2+2}\ge 1 \Rightarrow |3x|\ge x^2+2$

$x<0$ ise	0	$x\ge 0$ ise
$\|3x\|=-3x$		$\|3x\|=3x$
$-3x\ge x^2+2$		$3x\ge x^2+2$
$f_1(x)=x^2+3x+2\le 0$		$f_2(x)=x^2-3x+2\le 0$
$Ç_1=[-2,-1]$		$Ç_2=[1,2]$

$Ç=[-2,-1]\cup[1,2]$

24. $\dfrac{|2-x|}{x+2}\ge 1$

$2-x=0 \Rightarrow x=2$

$x<2$ ise	0	$x\ge 2$ ise
$\|2-x\|=2-x$		$\|2-x\|=x-2$
$\dfrac{2-x}{x+2}\ge 1$		$\dfrac{x-2}{x+2}\ge 1$
$\Rightarrow \dfrac{2-x}{x+2}-1\ge 0$		$\Rightarrow \dfrac{x-2}{x+2}-1\ge 0$
$\Rightarrow f_1(x)=\dfrac{-2x}{x+2}\ge 0$		$\Rightarrow f_2(x)=\dfrac{-4}{x+2}\ge 0$
(sign table below)		$\Rightarrow x+2<0 \Rightarrow x<-2$
$Ç_1=(-2,0]$		$Ç_2=\varnothing$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f_1(x)$	$-$	‖	$+$		$-$

$Ç=Ç_1\cup Ç_2 \Rightarrow Ç=(-2,0]$

25. $\dfrac{|x|+2}{|x-2|}\ge 2$

$x\ne 2$ koşuluyla iki taraf $|x-2|$ ile çarpılabilir.

$\Rightarrow |x|+2\ge 2\cdot|x-2|$

Çözümü tamamlayınız.

$Ç=\left\{x:\ \left(\dfrac{2}{3}\le x\le 6\right)\ \text{ve}\ x\ne 2\ ,\ x\in R\right\}$

26. $\dfrac{|x-1|+2x}{x}<3$

$x<1$ ve $x\geq 1$ aralıklarında elde edilecek çözümlerin bileşimini alınız.

$Ç=R-\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$

27. $\left|\dfrac{x}{x^2-2}\right|\geq 1$

$|x|\geq a \Rightarrow x\leq -a$ veya $x\geq a$ özelliğini kullanarak,

① $\dfrac{x}{x^2-2}\leq -1$ ve

② $\dfrac{x}{x^2-2}\geq 1$ eşitsizliklerinin ayrı ayrı çözüm kümelerini bulup, bu kümelerin bileşimini alınız.

$Ç=\{x:(-2\leq x\leq -1 \text{ veya } 1\leq x\leq 2) \text{ ve } x\neq \pm\sqrt{2},\ x\in R\}$

28. $Ç=\{x:\ x\leq -3,\ x\in R\}$

29. $Ç=\{x:\ 3<x\leq 5,\ x\in R\}$

30. $Ç=\{x:\ (-3<x\leq -2)\vee(2\leq x<3),\ x\in R\}$

31. $Ç=\{x:\ 1\leq x\leq 2,\ x\in R\}$

KÖKLERLE KATSAYILAR ARASINDAKI BAĞINTILAR

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise ax^2+bx+c üçterimlisinin,

$$f(x)=ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2)$$

biçiminde yazılabileceği, üç terimlinin işareti incelenirken anlatılmıştı.

Bu yazılımın, köklerin gerçek olmadığı durumda da doğru olduğu karmaşık sayılar konusunda açıklanacaktır.

$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2)$ özdeşliğinin sağ tarafı açılırsa;

$$ax^2+bx+c\equiv ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

ve bir özdeşlikte eşit dereceli terimlerin katsayılarının eşit olacağı dikkate alınırsa;

$$b=-a(x_1+x_2) \Rightarrow \boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

$$c=ax_1x_2 \Rightarrow \boxed{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$$

elde edilir.

Buradan, $ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerini bulmadan, köklerin toplamının ve çarpımının bulunabileceği görülmektedir.

NOT :

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ ve $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ bağıntıları şöyle de bulunabilir.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde $\Delta=b^2-4ac$ olmak üzere,

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ olup}$$

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

ÖRNEKLER :

1. **$2x^2-\sqrt{3}x-3=0$ denkleminin köklerinin toplamını ve çarpımını bulunuz.**

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{-3}{2}$$

2. $\sqrt{2}x^2+\sqrt{6}x=0$ **denkleminin köklerinin toplamını ve çarpımını bulunuz.**

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$$

3. $ax^2+bx+c=0$ **denkleminin kökleri** x_1 **ve** x_2 **olduğuna göre;**

a) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ **b)** $x_1^2+x_2^2$ **c)** $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$

d) $x_1^3+x_2^3$ **e)** $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$ **f)** $|x_1-x_2|$

ifadelerini a, b, c katsayıları türünden bulunuz.

ÇÖZÜM:

Katsayılar türünden yazılması istenen ifadeler, önce x_1+x_2 ve $x_1\cdot x_2$ türünden yazılır; sonra $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ ve $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ değerleri yerlerine konur.

a) $$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-b/a}{c/a}=-\frac{b}{c}$$

b) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ özdeşliğini hatırlayınız!

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

c) $$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1\cdot x_2)^2}=\frac{(b^2-2ac)/a^2}{c^2/a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

d) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ özdeşliğini hatırlayınız!

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^3+x_2^3=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{-b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}$$

$$\Rightarrow x_1^3+x_2^3=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

e) $$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1\cdot x_2}=\frac{(b^2-2ac)/a^2}{c/a}=\frac{b^2-2ac}{ac}$$

f)

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1-x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-(-b-\sqrt{\Delta})}{2a}$$

$$x_1-x_2=\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad |x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

4. $(1-m)x^2+mx-3=0$ **denkleminin** x_1 **ve** x_2 **kökleri arasında** $(2x_1-1)(2x_2-1)=-3$ **bağıntısının olması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM:

$$(2x_1-1)(2x_2-1)=-3$$

$$\Rightarrow 4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1=-3$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(\frac{-3}{1-m}\right)-2\cdot\left(\frac{-m}{1-m}\right)+4=0$$

$$\Rightarrow -12+2m+4-4m=0 \Rightarrow 2m=-8 \Rightarrow m=-4$$

■ DENK DENKLEMLER

$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2)$ olduğuna göre, $ax^2+bx+c=0$ denkleminin de $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ biçiminde yazılabileceği açıktır.

$a(x-x_1)(x-x_2)=0$ denkleminde a katsayısı değiştirildikçe farklı denklemler elde edilir. Yalnız, parantez içlerini sıfır yapan x değerleri değişmeyeceğinen bu denklemlerin çözüm kümeleri aynı olur. Çözüm kümeleri aynı olan eşit dereceli denklemlere **denk denklemler** denir.

$a_1x^2+b_1x+c_1=0$ ve $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ denklemleri, kökleri olan x_1 ve x_2 olan, denk iki denklem olsun.

$$x_1+x_2=-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

olduğundan $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ elde edilir.

Öyleyse; denk denklemlerin eşit dereceli terimlerinin katsayıları orantılıdır.

Buradan, $ax^2+bx+c=0$ denkleminin iki tarafı sıfırdan farklı gerçek sayılar ile çarpıldığında bu denkleme denk başka denklemler elde edileceği sonucunu da çıkarabiliriz.

Örneğin; $x^2-x-2=0$ ve $3x^2-3x-6=0$ denklemleri denk denklemlerdir.

ÖRNEKLER :

1. $ax^2+bx-8=0$ **ve** $x^2-3x-2a=0$ **denklemlerinin çözüm kümeleri eşit olduğuna göre (a,b) ikilisi nedir ?**

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-3}=\dfrac{-8}{-2a}$ olmalıdır.

$$\frac{a}{1}=\frac{-8}{-2a} \Rightarrow -2a^2=-8 \Rightarrow a=\pm 2$$

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{-3} \Rightarrow b=-3a \Rightarrow b=\mp 6$$

$$(a,b)\in\{(2,-6),(-2,6)\}$$

2. $\mathbf{mx^2 - 2x - m - 2 = 0}$ **ve**
$\mathbf{(2m-3)x^2 + 2mx + 3 = 0}$ **denklemlerinin çözüm kümeleri aynı olduğuna göre m değeri nedir ?**

ÇÖZÜM:

$\frac{m}{2m-3} = \frac{-2}{2m} = \frac{-m-2}{3}$ olmalıdır.

Bulacağımız m değeri,

① $\frac{m}{2m-3} = \frac{-2}{2m}$ ve ② $\frac{-2}{2m} = \frac{-m-2}{3}$

denklemlerinin ikisini de sağlamalıdır.

Öyleyse, ① numaralı denklemin köklerini bulup bunlardan ② numaralı denklemi sağlayan m değerini alırız.

① $\frac{m}{2m-3} = \frac{-2}{2m} \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$

$m_1 = 1$, $m_2 = -3$

Bulduğumuz m değerlerinin ikisi de ② numaralı denklemi sağlar. (Sağladığını gösteriniz.)

Öyleyse; $m = 1$ ve $m = -3$ değerleri için, verilen denklemlerin çözüm kümeleri aynı olur. (m nin bu değerleri için verilen denklemin çözüm kümelerini bulunuz.)

■ **KÖKLERİ VERİLEN DENKLEMİ BULMA**

Kökleri x_1 ve x_2 olan $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ biçiminde yazılabileceğini biliyoruz.

$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ denkleminde iki tarafı a ile $(a \neq 0)$ bölersek, $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ denklemi; çarpımı yapıp ifadeyi x in azalan derecelerine göre düzenlersek;

$$\mathbf{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0}$$

denklemi elde edilir.

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ denklemi, kökleri x_1 ve x_2 olan bütün ikinci derece denklemlerini temsil eden en sade denklemdir.

Kökleri verilen denklem, $x_1 + x_2 = S$ ve $x_1 \cdot x_2 = P$ ile gösterilerek;

$$x^2 - Sx + P = 0$$

biçiminde de yazılabilir.

ÖRNEKLER :

1. **Kökleri -3 ve 6 olan ikinci derece denklemini bulunuz.**

ÇÖZÜM :

$x_1 + x_2 = -3 + 6 = 3$

$x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 6 = -18$

değerleri, $x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$ denkleminde yerine konursa,

$x^2 - 3x - 18 = 0$ elde edilir.

2. **Toplamları 4 ve çarpımları 2 olan sayıları bulunuz.**

ÇÖZÜM :

Istenen sayıları bir ikinci derece denkleminin kökleri olarak düşünelim.

Köklerinin toplamı, $x_1 + x_2 = 4$ ve köklerinin çarpımı, $x_1 \cdot x_2 = 2$ olan denklemi buluruz.

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

Bu denklemin çözüm kümesinin elemanları aranan sayılar olacaktır.

$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 2^2 - 2 = 2$

$x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$

3. $\mathbf{2x^2 - x - 2 = 0}$ **denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $4x_1^2$ ve $4x_2^2$ olan denklemi bulunuz.**

ÇÖZÜM :

Verilen denklemden,

$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ ve $x_1 \cdot x_2 = -1$ dir.

$4x_1^2 = x_1'$ ve $4x_2^2 = x_2'$ olsun.

$x_1' + x_2' = 4x_1^2 + 4x_2^2 = 4(x_1^2 + x_2^2)$

$\Rightarrow x_1' + x_2' = 4\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] = 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2(-1)\right]$

$\Rightarrow x_1' + x_2' = 9$

$x_1' \cdot x_2' = 4x_1^2 \cdot 4x_2^2 = 16(x_1 \cdot x_2)^2 = 16(-1)^2$

$\Rightarrow x_1' \cdot x_2' = 16$

Istenen denklem;

$x^2 - (x_1' + x_2')x + x_1' \cdot x_2' = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9x + 16 = 0$ olur.

4. $\mathbf{x^2 - 2mx + m + 1 = 0}$ **denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise kökleri $2x_1 - 1$ ve $2x_2 - 1$ olan denklemi bulunuz.**

ÇÖZÜM :

1. yol :

$2x_1 - 1 = x_1'$ ve $2x_2 - 1 = x_2'$ olsun.

$x_1' + x_2'$ ve $x_1' \cdot x_2'$ ifadelerini bulalım :

$x_1' + x_2' = 2x_1 - 1 + 2x_2 - 1$

$\Rightarrow x_1' + x_2' = 2(x_1 + x_2) - 2$

Verilen denklemden $x_1 + x_2 = 2m$ olduğunu biliyoruz. Yerine konursa;

$\Rightarrow x_1' + x_2' = 2(2m) - 2$

$\Rightarrow x_1' + x_2' = 4m - 2$ bulunur.

$x_1' \cdot x_2' = (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$

$\Rightarrow x_1' \cdot x_2' = 4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1$

Verilen denklemden $x_1 + x_2 = 2m$ ve $x_1 \cdot x_2 = m + 1$ olduğunu biliyoruz. Yerlerine konursa;

$\Rightarrow x_1' \cdot x_2' = 4(m+1) - 2(2m) + 1$

$\Rightarrow x_1' \cdot x_2' = 5$

Kökleri x_1' ve x_2' olan denklem;

$x^2 - (x_1' + x_2')x + x_1' \cdot x_2' = 0$ dır.

Öyleyse, istenen denklem;

$x^2 - (4m - 2)x + 5 = 0$ olur.

2. yol :

$2x_1 - 1 = x_1'$ ve $2x_2 - 1 = x_2'$ olduğundan verilen denklemi sağlayan x değerleri ile istenen denklemi sağlayan x' değerleri arasında;

$2x - 1 = x'$ bağıntısı vardır.

Buradan $x = \dfrac{x' + 1}{2}$ bulunur.

Öyleyse denklemde x yerine $\dfrac{x+1}{2}$ yazarsak istenen denklemi buluruz.

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 2m \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) + m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{4} - mx - m + m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 4mx + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (4m - 2)x + 5 = 0$$

5. $ax^2 + bx + c = 0$ **denkleminin kökleri** x_1 **ve** x_2 **ise kökleri** $\dfrac{1}{x_1}$ **ve** $\dfrac{1}{x_2}$ **olan denklemi bulunuz.**

ÇÖZÜM :

1. yol :

$\dfrac{1}{x_1} = x_1'$ ve $\dfrac{1}{x_2} = x_2'$ olsun.

$$x_1' + x_2' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-b/a}{c/a} = -\frac{b}{c}$$

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{c/a} = \frac{a}{c}$$

$x_1' + x_2'$ ve $x_1' \cdot x_2'$ değerleri,

$x^2 - (x_1' + x_2')x + x_1' \cdot x_2' = 0$ denkleminde yerlerine konursa;

$$x^2 - \left(-\frac{b}{c}\right)x + \frac{a}{c} = 0$$

$\Rightarrow cx^2 + bx + a = 0$ elde edilir.

2. yol :

$\dfrac{1}{x_1} = x_1'$ ve $\dfrac{1}{x_2} = x_2'$ olduğundan $\dfrac{1}{x} = x'$ bağıntısı yazılabilir.

$$\frac{1}{x} = x' \Rightarrow x = \frac{1}{x'}$$

Verilen denklemde x yerine $\dfrac{1}{x}$ yazılırsa istenen denklem bulunur;

$$a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x}\right) + c = 0 \Rightarrow cx^2 + bx + a = 0$$

6. $ax^2 + bx + c = 0$ **denkleminin kökleri** x_1 **ve** x_2 **ise kökleri** $x_1 + \dfrac{1}{x_2}$ **ve** $x_2 + \dfrac{1}{x_1}$ **olan denklemi bulunuz.**

ÇÖZÜM :

$x_1 + \dfrac{1}{x_2} = x_1'$ ve $x_2 + \dfrac{1}{x_1} = x_2'$ olsun.

$$x_1' + x_2' = x_1 + \frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{x_1} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

$$\Rightarrow x_1' + x_2' = -\frac{b}{a} + \frac{-b/\cancel{a}}{c/\cancel{a}} = -\frac{b}{a} - \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow x_1' + x_2' = -\frac{bc - ab}{ac} = -\frac{b(a+c)}{ac}$$

$$x_1' \cdot x_2' = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1x_2 + 2 + \frac{1}{x_1x_2}$$

$$\Rightarrow x_1' \cdot x_2' = \frac{c}{a} + 2 + \frac{a}{c} = \frac{a^2 + 2ac + c^2}{ac}$$

$$\Rightarrow x_1' \cdot x_2' = \frac{(a+c)^2}{ac}$$

$x_1' + x_2'$ ve $x_1' \cdot x_2'$ değerleri,

$x^2 - (x_1' + x_2')x + x_1' \cdot x_2' = 0$ denkleminde yerlerine konursa;

$$x^2 + \frac{b(a+c)}{ac}x + \frac{(a+c)^2}{ac} = 0$$

$\Rightarrow acx^2 + b(a+c)x + (a+c)^2 = 0$ elde edilir.

❑ TAMAMLAYICI ÖRNEKLER

1. $x^2 - (m-1)x - m = 0$ **denkleminin** x_1 **ve** x_2 **kökleri arasında** $x_1 + 2x_2 = 3$ **bağıntısı bulunduğuna göre m nedir ?**

ÇÖZÜM :

① $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = m - 1$

② $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = -m$

③ $x_1 + 2x_2 = 3$

bağıntılarının oluşturduğu üç bilinmeyenli denklem sistemi çözülür.

① ve ③ numaralı denklemlerden x_1 ve x_2 m türünden bulunabilir.

① $x_1 + 2x_2 = 3$

③ $\mp x_1 \mp x_2 = \mp m \pm 1$

$x_2 = 4 - m$

③ numaralı denklemde yerine konursa;

$x_1 = 2m - 5$

x_1 ve x_2 nin m türünden değerlerini ② numaralı denklemde yerlerine koyalım:

$(2m - 5)(4 - m) = -m$

$\Rightarrow m^2 - 7m + 10 = 0$

$\Rightarrow (m = 2) \vee (m = 5)$ bulunur.

2. $x^2 - (m+1)x + 8 = 0$ denkleminde x_1 ve x_2 kökleri arasında $x_1 = 2x_2$ bağıntısı bulunduğuna göre m nedir ?

ÇÖZÜM :

① $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = m + 1$

② $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = 8$

③ $x_1 = 2x_2$

bağıntıları, x_1, x_2 ve m bilinmeyenler olmak üzere üç bilinmeyenli bir denklem sistemi oluştururlar.

② ve ③ numaralı denklemlerden x_1 ve x_2 kolayca bulunur.

③ $x_1 = 2x_2$

② $x_1 \cdot x_2 = 8 \Rightarrow 2x_2x_2 = 8$

$\Rightarrow (x_2 = -2)$ veya $(x_2 = 2)$

$x_2 = -2$ ise $x_1 = -4$

$x_2 = 2$ ise $x_1 = 4$

Bu değerler ① numaralı denklemde yerlerine konursa;

$(x_1 = -4$ ve $x_2 = -2) \Rightarrow m + 1 = -4 - 2$

$\Rightarrow m = -7$

$(x_1 = 4$ ve $x_2 = 2) \Rightarrow m + 1 = 4 + 2$

$\Rightarrow m = 5$

$m = -7$ veya $m = 5$ tir.

3. $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2, $x^2 + bx + a = 0$ denkleminin kökleri $2x_1$ ve x_2 olduğuna göre a kaçtır ?

ÇÖZÜM :

① $x_1 + x_2 = -a$, ② $x_1 \cdot x_2 = b$

③ $2x_1 + x_2 = -b$, ④ $2x_1x_2 = a$

$\left.\begin{array}{l} a = 2b \\ x_1 = a - b \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = b$

$x^2 + ax + b = 0$ denkleminde $a = 2b$ ve $x_1 = b$ değerleri yerlerine konursa;

$b^2 + 2b \cdot b + b = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{3}$

$a = 2b \Rightarrow a = -\dfrac{2}{3}$ bulunur.

4. $2mx^2 + (m-1)x - m - 1 = 0$ denkleminin kökleri 2 ve –3 sayıları ile orantılı olduğuna göre m nedir ? $(m \neq 0)$

ÇÖZÜM :

1. yol :

$\dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_2}{-3} = k$ olsun; $x_1 = 2k$, $x_2 = -3k$ olur.

$x_1 + x_2 = -\dfrac{m-1}{2m} = -k \Rightarrow k = \dfrac{m-1}{2m}$

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-m-1}{2m} = -6k^2 \Rightarrow k^2 = \dfrac{m+1}{12m}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{m-1}{2m}\right)^2 = \dfrac{m+1}{12m}$

$\Rightarrow \dfrac{m^2 - 2m + 1}{4m^2} = \dfrac{m+1}{12m}$

$\Rightarrow \dfrac{m^2 - 2m + 1}{m} = \dfrac{m+1}{3}$

$\Rightarrow 3m^2 - 6m + 3 = m^2 + m$

$\Rightarrow 2m^2 - 7m + 3 = 0$

$\Rightarrow (m = \dfrac{1}{2})$ veya $(m = 3)$

2. yol :

$\dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_2}{-3} \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 = 0$

① $3x_1 + 2x_2 = 0$

② $x_1 + x_2 = \dfrac{1-m}{2m}$

② nin iki tarafını –2 ile çarpıp ① ile taraf tarafa toplarsak;

$3x_1 + \cancel{2x_2} = 0$

$-2x_1 - \cancel{2x_2} = \dfrac{m-1}{m}$

$x_1 = \dfrac{m-1}{m}$ bulunur.

x_1 değeri verilen denklemi sağlar;

$2m\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2 + (m-1)\left(\dfrac{m-1}{m}\right) - m - 1 = 0$

$\Rightarrow 2m\dfrac{(m-1)^2}{m^2}+\dfrac{(m-1)^2}{m}-m-1=0$

$\Rightarrow 3(m-1)^2=m^2+m$

$\Rightarrow 3m^2-6m+3=m^2+m$

$\Rightarrow 2m^2-7m+3=0$

$\Rightarrow (m=\frac{1}{2})$ veya $(m=3)$

5. $x^2+ax+4=0$ **denkleminin kökleri** x_1 **ve** x_2 **dir.** $x^2-ax+b=0$ **denkleminin kökleri** x_1+2 **ve** x_2+2 **olduğuna göre** $a+b$ **kaçtır ?**

ÇÖZÜM :

① $x_1+x_2=-a$, ② $x_1\cdot x_2=4$

③ $x_1+2+x_2+2=a$, ④ $(x_1+2)(x_2+2)=b$

$x_1+x_2=-a$ değeri ③ te yerine konursa;

$-a+4=a \Rightarrow a=2$ bulunur.

④ te çarpım yapılırsa;

$b=x_1\cdot x_2+2(x_1+x_2)+4$

$x_1\cdot x_2=4$ ve $x_1+x_2=-a=-2$ yerlerine konursa;

$b=4+2(-2)+4 \Rightarrow b=4$ bulunur.

Öyleyse; $a+b=6$ dır.

6. $x^2-mx-2=0$ **denkleminin kökleri** x_1 **ve** x_2 **dir. Kökler arasında** $\left(\frac{1}{x_1}+x_1x_2\right)\left(\frac{1}{x_2}+x_1x_2\right)=\frac{1}{2}$ **bağıntısı varsa** m **değeri nedir ?**

ÇÖZÜM :

Verilen bağıntıdaki çarpma işlemi yapılırsa;

$\dfrac{1}{x_1\cdot x_2}+x_1+x_2+(x_1\cdot x_2)^2=\dfrac{1}{2}$ elde edilir.

$x_1+x_2=m$ ve $x_1\cdot x_2=-2$ değerleri yerlerine konursa;

$\dfrac{1}{-2}+m+(-2)^2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow m=-3$ bulunur.

7. $x^2-(2m+1)x+m-3=0$ **denkleminin** x_1 **ve** x_2 **kökleri arasında m ye bağlı olmayan bağıntı nedir ?**

ÇÖZÜM :

① $x_1+x_2=2m+1$

② $x_1\cdot x_2=m-3$

eşitliklerinden m yi yok etmeliyiz.

② eşitliğinin iki tarafı -2 ile çarpılıp, ① ve ② taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{array}{rl} x_1+x_2 = & 2\cancel{m}+1 \\ -2x_1x_2 = & -2\cancel{m}+6 \\ \hline x_1+x_2-2x_1x_2 = & 7 \end{array}$$

baðýntýsý bulunur.

8. $x^2-(m-2)x+m-3=0$ **denkleminin m ye bağlı olmayan kökü varsa bu kök nedir ?**

ÇÖZÜM :

1. yol :

Denklemdeki m li terimleri m parantezine alalım:

$x^2-mx+2x+m-3=0$

$\Rightarrow \underbrace{x^2+2x-3}_{A}+m\underbrace{(-x+1)}_{B}=0$

m nin her değeri için bu eşitliği sağlayacak bir x değeri arıyoruz.

m nin her değeri için $A+Bm=0$ olması demek $A+Bm$ ifadesinin sıfıra özdeş olması demektir. Bu da $A=0$ ve $B=0$ olmasını gerektirir.

Öyleyse;

$\left.\begin{array}{l} x^2+2x-3=0 \\ -x+1=0 \end{array}\right\}$ sisteminin kökü olan $x=1$ değeri aranan x değeridir.

2. yol :

Denklem çözülüp köklerin m ye bağlı olup olmadıkları görülebilir.

$\Delta=(m-2)^2-4(m-3)$

$\Delta=m^2-8m+16=(m-4)^2$

$x_{1,2}=\dfrac{m-2\pm(m-4)}{2}$

$x_1=\dfrac{m-2-m+4}{2} \Rightarrow x_1=1$

$x_2=\dfrac{m-2+m-4}{2} \Rightarrow x_2=m-3$

Denklemin m ye bağlı olmayan kökü $x_1=1$ dir.

9. $2x^2-3x-3=0$ **denkleminin kökleri** x_1 **ve** x_2 **olduğuna göre;**

$\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}$ **toplamı nedir ?**

ÇÖZÜM :

$x_1+x_2=\frac{3}{2}$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{-3}{2}$

$$\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{-3}{2}\right)^2}=-\frac{9}{2}$$

10. **Bir ikinci dereceden denklemin birbirin-den farklı x_1 ve x_2 kökleri arasında,**

① $x_1+x_2+x_1\cdot x_2=3m+2$

② $2x_1x_2-x_1-x_2=4$

bağıntıları vardır.

Bu köklerin birer gerçek sayı olması için m ne olmalıdır ?

ÇÖZÜM :

$x_1\neq x_2\in R$ olması için $\Delta>0$ olmalıdır.

Öyleyse, önce kökleri x_1 ve x_2 olan denklemi; buradan da denklemin diskriminantını bulmalıyız.

Denklemi kurmak için gerekli olan x_1+x_2 ve $x_1\cdot x_2$ değerleri verilen bağıntılardan bulunur.

① ve ② taraf tarafa toplanırsa;

$$\cancel{x_1}+\cancel{x_2}+x_1\cdot x_2=3m+2$$
$$2x_1x_2-\cancel{x_1}-\cancel{x_2}=4$$
$$3x_1x_2=3m+6 \Rightarrow x_1x_2=m+2$$

$x_1\cdot x_2=m+2$ değeri ① de yerine konursa;

$x_1+x_2+m+2=3m+2$

$\Rightarrow x_1+x_2=2m$ elde edilir.

Öyleyse denklem,

$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

$\Rightarrow x^2-2mx+m+2=0$ dır.

$$\Delta'=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=m^2-m-2$$

$\Delta'>0 \Rightarrow m^2-m-2>0$

$\Rightarrow m_1=-1,\quad m_2=2$

m	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Δ'		+	○	−	○	+	

$x_1\neq x_2\in R$ olması için $m<-1$ veya $m>2$ olmalıdır.

❑ KÖKLERİN VARLIĞININ VE İŞARETİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, $ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerini bulmadan, gerçek köklerin varlığını belirlemeyi ve varsa, işaretlerini bulmayı öğreneceksiniz.

Çarpımlarının ve toplamlarının işareti bilinen iki sayıdan her birinin işareti kolayca belirlenir. Örneğin; iki gerçek sayının çarpımları pozitif, toplamları negatif ise bu iki sayının negatif olduğu; çarpımları negatif, toplamları pozitif olan iki gerçek sayıdan mutlak değerce büyük olanının pozitif, diğerinin negatif olduğu fazla zorlanmadan söylenebilir.

Demek ki köklerin varlığını ve işaretini belirlemek için önce $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ve $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ nın işaretleri belirlenmelidir.

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$ iken $\Delta=b^2-4ac>0$ olacağından denklemin birbirinden farklı iki gerçek kökünün bulunduğunu biliyorsunuz. Bu durumda gerçek köklerin varlığını belirlemek için Δ nın işaretini ayrıca incelemek gereksizdir.

Yalnız, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}>0$ ise gerçek köklerin varlığını belirlemek için $\Delta=b^2-4ac$ ifadesinin işaretini belirlemeye gerek vardır.

Öyleyse,

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerinin varlığını ve işaretlerini belirlemek için;

önce,

① ① **$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ nın işaretine,**

② **sonra gerekiyorsa,**

② **$\Delta=b^2-4ac$ nin ve**

③ **$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ nın işaretlerine bakılmalıdır.**

Elde edilecek sonuçların yorumu aşağıdaki gibi yapılır.

I. $\frac{c}{a}<0$ ise, denklemin ters işaretli iki gerçek kökü vardır.

Bu durumda;

a) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$ ise, mutlak değerce büyük kök pozitiftir. (-3 ve 5 gibi)

$|x_1|<|x_2|$ kabul edersek, $x_1<0<x_2$ dir.

b) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$ ise, mutlak değerce büyük kök negatiftir. (-5 ve 3 gibi)

$|x_1|<|x_2|$ kabul edersek, $x_2<0<x_1$ dir.

c) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0$ ise, köklerin mutlak değerleri birbirine eşittir.

$|x_1| = |x_2|$ ve $x_1 < 0 < x_2$ dir.

II. $\frac{c}{a} > 0$ ise, $\Delta = b^2 - 4ac$ nin işaretine bakılır.

1. $\Delta > 0$ ise, aynı işaretli, birbirinden farklı, iki gerçek kök vardır.

Bu durumda;

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise, kökler pozitiftir.

$0 < x_1 < x_2$

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise, kökler negatiftir

$x_1 < x_2 < 0$

2. $\Delta = 0$ ise, kökler birbirine eşittir.

Bu durumda;

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise, kökler pozitiftir.

$0 < x_1 = x_2$

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise, kökler negatiftir

$x_1 = x_2 < 0$

3. $\Delta < 0$ ise, gerçek kök yoktur.

III. $\frac{c}{a} = 0$ ise, köklerden en az biri sıfırdır.

Bu durumda, $\Delta = b^2 - 4ac \ge 0$ olacağından, $-b/a$ nın işaretine bakmak yeterlidir.

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise, köklerden biri sıfır, diğeri pozitiftir.

$x_1 = 0 < x_2$

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise, köklerden biri sıfır, diğeri negatiftir.

$x_1 < 0 = x_2$

c) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0$ ise, köklerin ikisi de sıfırdır.

$x_1 = x_2 = 0$

ÖRNEKLER :

1. **Aşağıdaki denklemleri çözmeden, gerçek köklerin varlığını ve işaretlerini belirleyiniz.**

a) $2x^2 - 17x + 1 = 0$

b) $-12x^2 + 5x + 2 = 0$

c) $5x^2 + 40x + 12 = 0$

ÇÖZÜM :

a) $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ ve

$\Delta = b^2 - 4ac = 17^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 281 > 0$

olduğundan birbirinden farklı iki gerçek kök vardır.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{17}{2} > 0$ olduğundan kökler pozitiftir.

$0 < x_1 < x_2$

b) $\frac{c}{a} = \frac{2}{-12} < 0$ olduğundan ters işaretli iki gerçek kök vardır.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{-12} > 0$ olduğundan mutlak değerce büyük olan kök pozitiftir.

$|x_1| < |x_2|$ kabul edersek $x_1 < 0 < x_2$ dir.

c) $\frac{c}{a} = \frac{12}{5} > 0$ ve

$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (20)^2 - 5 \cdot 12 = 340 > 0$

olduğundan aynı işaretli ve birbirinden farklı iki gerçek kök vardır.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-40}{5} < 0$ olduğundan kökler negatiftir.

$x_1 < x_2 < 0$

2. **$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirinden farklı ve pozitif iki gerçek kökü bulunduğuna göre $\frac{c}{a}$, Δ ve $-\frac{b}{a}$ nın işaretlerini belirleyiniz.**

ÇÖZÜM :

Birbirinden farklı iki gerçek kök olduğu için,

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$;

kökler aynı işaretli olduğundan,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ ve kökler pozitif olduğu için,

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ dır.

3. **$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = 0$ denkleminin köklerinin negatif olması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM :

Köklerin aynı işaretli olması istendiğinden ,

① $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$;

köklerin farklı olması gerekmediğinden;

② $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac \ge 0$;

köklerin negatif olması istendiğinden;

③ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ olması gerekir.

① $\dfrac{c}{a}=\dfrac{m-3}{m-1}>0$; $m_1=3$, $m_2=1$

② $\Delta'=(m+1)^2-(m-1)(m-3)\geq 0$

$\Rightarrow 6m-2\geq 0$; $m_3=\dfrac{1}{3}$

③ $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{2(m+1)}{m-1}<0$, $m_4=-1$, $m_5=1$

$\dfrac{c}{a}$, Δ ve $-\dfrac{b}{a}$ nın işaretlerini tabloda gösterelim:

m	$-\infty$ ... -1	-1 ... $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ ... 1	1 ... 3	3 ... $+\infty$
c/a	+	+	+	−	+
Δ	−	−	+	+	+
−b/a	+	−	−	+	+

çözüm

$\dfrac{1}{3}\leq m<1$ olmalıdır.

4. **$(m+2)x^2-(m-2)x+m-1=0$ denkleminin köklerinin ters işaretli olması için m kaç olmalıdır?**

ÇÖZÜM :

$\dfrac{c}{a}<0$ olması gereklidir ve yeterlidir.

$\dfrac{c}{a}=\dfrac{m-1}{m+2}<0$; $m_1=1$, $m_2=-2$

$\dfrac{c}{a}$ nın işaretlerini tabloda gösterelim:

m	$-\infty$ ... -2	-2 ... 1	1 ... $+\infty$
c/a	+	−	+

çözüm

Öyleyse, köklerin ters işaretli olması için, $-2<m<1$ olmalıdır.

5. **$mx^2-2(m+2)x+m+3=0$ denkleminin köklerinin varlığını ve işaretlerini m nin değerlerine göre inceleyiniz.**

ÇÖZÜM :

$\dfrac{c}{a}$, Δ ve $-\dfrac{b}{a}$ nın işaretlerini belirleyelim:

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m+3}{m}$; $m_1=-3$, $m_2=0$

$\Delta'=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=(m+2)^2-m(m+3)$

$\Rightarrow \Delta'=m+4$; $m_3=-4$

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{2(m+2)}{m}$; $m_4=-2$, $m_5=0$

m	$-\infty$ ... -4	-4 ... -3	-3 ... -2	-2 ... 0	0 ... $+\infty$
c/a	+	+	−	−	+
Δ	−	+	+	+	+
−b/a	+	+	+	−	+

Tablodan, m nin değişen değerlerine göre, gerçek köklerin varlığını ve işaretlerini kolayca belirleyebiliriz.

① $m<-4$ ise;

$\Delta'<0$ olduğundan, gerçek kök yoktur.

② $m=-4$ ise;

$\Delta'=0$ olduğundan, birbirine eşit iki kök vardır.

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0$ olduğundan, kökler pozitiftir.

$0<x_1=x_2$

③ $-4<m<-3$ ise;

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0$ ve $\Delta'>0$ olduğundan, aynı işaretli iki gerçek kök vardır.

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0$ olduğundan, kökler pozitiftir.

$0<x_1<x_2$

④ $m=-3$ ise;

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=0$ olduğundan, köklerden biri sıfırdır.

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0$ olduğundan, diğer kök pozitiftir.

$x_1=0<x_2$

⑤ $-3<m<-2$ ise;

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$ olduğundan, ters işaretli iki gerçek kök vardır.

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0$ olduğundan, mutlak değerce büyük kök pozitiftir.

$|x_1|<|x_2|$ kabul edersek, $x_1<0<x_2$ dir.

⑥ $m=-2$ ise;

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$ olduğundan, ters işaretli iki gerçek kök vardır.

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=0$ olduğundan, köklerin mutlak değerleri birbirine eşittir.

$x_1<0<x_2$ ve $|x_1|=|x_2|$ dir.

⑦ $-2<m<0$ ise;

$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0$ olduğundan, ters işaretli iki gerçek kök vardır.

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0$ olduğundan, mutlak değerce büyük kök negatiftir.

$|x_1| < |x_2|$ kabul edersek, $x_2 < 0 < x_1$ dir.

⑧ $m = 0$ ise; denklem birinci derecedendir.

$\left(-4x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{3}{4}\right)$

⑨ $m > 0$ ise;

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0$, $\Delta' > 0$ ve $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0$ olduğundan, birbirinden farklı ve pozitif iki gerçek kök vardır.

$0 < x_1 < x_2$

İKİNCİ DERECE DENKLEMİNİN KÖKLERİNİN BİR GERÇEK SAYI ILE KARŞILAŞTIRILMASI

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2, bu kökleri karşılaştıracağımız bir gerçek sayı k olsun.

Kökleri bulmadan, k sayısının sayı ekseninde köklere göre yerini belirtmeye çalışacağız.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ nin, x in değişen değerlerine göre işaretlerini tablolarda gösterelim:

① $\Delta > 0$ ise;

x	$-\infty$ ⓚ	x_1	ⓚ	x_2	ⓚ $+\infty$
$f(x)$	f(k), a ile ayný iþaretli	0	f(k), a ile ters iþaretli	0	f(k), a ile ayný iþaretli

② $\Delta = 0$ ise;

x	$-\infty$ ⓚ	$x_1 = x_2$	ⓚ $+\infty$
$f(x)$	f(k), a ile ayný iþaretli	0	f(k), a ile ayný iþaretli

③ $\Delta < 0$ ise;

x	$-\infty$ ⓚ $+\infty$
$f(x)$	f(k), a ile ayný iþaretli

Tablolar dikkatle incelenirse, $\Delta > 0$ ve $x_1 < k < x_2$ olduğunda $f(k)$, a ile ters işaretli olmak-tadır. Bu durumda, ters işaretli iki sayının çarpımı negatif olacağından, $a \cdot f(k) < 0$ olur.

Bunun karşıtının da doğru olduğu, yani $a \cdot f(k) < 0$ iken, $\Delta > 0$ ve $x_1 < k < x_2$ olduğu yine tabloların incelenmesinden kolaylıkla görülebilir.

Demek ki $a \cdot f(k) < 0$ ise denklemin diskriminantının işaretine bakmadan " $x_1 < k < x_2$ dir. " diyebiliriz.

$a \cdot f(k) > 0$ ve $\Delta \geq 0$ ise k sayısı köklerden büyük ya da küçük olmaktadır. (yani k sayısı kökler dışındadır.) Bu durumda k sayısının köklerden büyük mü yoksa küçük mü olduğunu belirlememiz gerekir. Bu sorunu da k sayısını köklerin aritmetik ortalamasıyla karşılaştırarak çözebiliriz.

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} > k$ ise, (yani $\dfrac{x_1 + x_2}{2} - k > 0$)

k köklerden küçük;

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} < k$ ise, (yani $\dfrac{x_1 + x_2}{2} - k < 0$)

k köklerden büyük olmalıdır.

Öyleyse,

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin x_1 ve x_2 köklerinin, bir k gerçek sayısı ile karşılaştırılması için;

önce,

① **$a \cdot f(k)$ nın işaretine,**

sonra gerekiyorsa,

② **$\Delta = b^2 - 4ac$ nin ve**

③ **$\dfrac{x_1 + x_2}{2} - k$ nın işaretine bakılmalıdır.**

Elde edilecek sonuçların yorumu aşağıdaki gibi yapılır.

I. $a \cdot f(k) < 0$ ise;

k sayısı kökler arasındadır.

$x_1 < k < x_2$

II. $a \cdot f(k) > 0$ ise, $\Delta = b^2 - 4ac$ nin işaretine bakılır.

1. $\Delta \geq 0$ ise, k sayısı kökler dışındadır.

Bu durumda,

a) $\dfrac{x_1 + x_2}{2} > k$ ise, k köklerden küçüktür.

$k < x_1 \leq x_2$

b) $\dfrac{x_1 + x_2}{2} < k$ ise, k köklerden büyüktür.

$x_1 \leq x_2 < k$

2. $\Delta < 0$ ise, gerçek kök olmadığından sıralama yapılamaz.

III. $a \cdot f(k) = 0$ ise, k köklerden en az birine eşittir.

ÖRNEKLER :

1. Aşağıdaki denklemleri çözmeden, köklerini karşılarında verilen sayılarla karşılaştırınız.

a) $2x^2 - 5x - 8 = 0$, $k = -1$

b) $3x^2 + 5x - 3 = 0$, $k = 1$

c) $4x^2 - 5x + 3 = 0$, $k = 3$

ÇÖZÜM :

a) $a = 2$ ve $f(-1) = 2(-1)^2 - 5(-1) - 8 = -1$ olup; $a \cdot f(-1) = -2 < 0$ olduğundan, (-1) sayısı kökler arasındadır.

$x_1 < -1 < x_2$

b) $a = 3$ ve $f(1) = 3 + 5 - 3 = 5$ olup; $a \cdot f(1) = 15 > 0$ dır.

$\Delta = b^2 - 4ac$ nin işaretine bakalım:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 61 > 0$

olduğundan, denklemin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır ve (1) sayısı kökler dışındadır.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{6} < 1$$

olduğundan, kökler (1) den küçüktür.

$x_1 < x_2 < 1$

c) $a \cdot f(3) = 4 \cdot \left[4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3\right] = 96 > 0$,

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -23 < 0$

olduğundan, denklemin gerçek kökleri yoktur.

Gerçek olmayan sayılarla sıralama yapılamaz.

2. $(m+2)x^2 - 3mx + 1 - m = 0$ **denkleminin** $x_1 < 2 < x_2$ **koşuluna uyan iki kökünün olması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM :

Köklerin istenen koşula uyması için, $a \cdot f(2) < 0$ olması gerekli ve yeterlidir.

$a = m + 2$
$f(2) = (m+2) \cdot 2^2 - 3m \cdot 2 + 1 - m$
$f(2) = -3m + 9$
$a \cdot f(2) = (m+2)(-3m+9) < 0$
$m_1 = -2$, $m_2 = 3$

m	$-\infty$	-2		3		$+\infty$
$a \cdot f(2)$	$-$		$+$		$-$	
	çözüm				çözüm	

$x_1 < 2 < x_2$ olması için, $m < -2$ veya $m > 3$ olmalıdır.

3. $x^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$ **denkleminin köklerinin 1 den küçük olması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM :

Köklerin 1 den küçük olmaları, gerçek olmalarını gerektirir. Çünkü gerçek olmayan sayılarda küçüklük, büyüklük tanımsızdır. Köklerin birbirinden farklı olmaları da istenmemektedir.

Öyleyse; köklerin 1 den küçük olmaları için,

① $a \cdot f(1) > 0$

② $\Delta \geq 0$ ve

③ $\frac{x_1 + x_2}{2} < 1 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 < 0$

koşullarının sağlanması gerekmektedir.

① $a \cdot f(1) = 1 \cdot \left[1^2 - 2 \cdot (m+1) \cdot 1 + m + 3\right] > 0$
$a \cdot f(1) = -m + 2 > 0$, $m_1 = 2$

② $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (m+1)^2 - m - 3 \geq 0$
$\Delta' = m^2 + m - 2 \geq 0$
$m_2 = -2$, $m_3 = 1$

③ $\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 = \frac{-b}{2a} - 1 = \frac{2(m+1)}{2} - 1$
$\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 = m < 0$, $m_4 = 0$

Işaret tablosunu yapalım:

m	$-\infty$ ... -2	-2 ... 0	0 ... 1	1 ... 2	2 ... $+\infty$
$a \cdot f(1)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
Δ	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x_1+x_2}{2} - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
	çözüm				

Köklerin 1 den küçük olması için $m \leq -2$ olmalıdır.

4. $(m-2)x^2 + 3x + 2m + 2 = 0$ **denkleminin** $-1 < x_1 < 1 < x_2$ **koşuluna uyan köklerinin bulunması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM :

$-1 < x_1 < 1 < x_2$ olması için,

① $a \cdot f(1) < 0$

② $a \cdot f(-1) > 0$

③ $\Delta > 0$

④ $\dfrac{x_1 + x_2}{2} > -1$

koşullarının sağlanması gerekmektedir.

$a \cdot f(1) < 0$ iken $\Delta > 0$ olacağından ③ numaralı koşulun incelenmesine gerek yoktur.

Yine, (1) sayısı kökler arasında, (−1) sayısı da kökler dışında iken (−1) sayısının köklerden küçük olacağı açıktır. O halde ④ numaralı koşulun da incelenmesine gerek yoktur.

Öyleyse; $-1 < x_1 < 1 < x_2$ olması için,

① $a \cdot f(1) < 0$ ve

② $a \cdot f(-1) > 0$

koşullarının sağlanması yeterlidir.

① $a \cdot f(1) = (m-2) \cdot \left[(m-2) \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2m + 2\right] < 0$

$a \cdot f(1) = (m-2)(3m+3) < 0$, $m_1 = 2$, $m_2 = -1$

② $a \cdot f(-1) = (m-2)\left[(m-2)(-1)^2 + 3(-1) + 2m + 2\right]$

$a \cdot f(-1) = (m-2)(3m-3) > 0$, $m_3 = 2$, $m_4 = 1$

m	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$a \cdot f(1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$a \cdot f(-1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	

çözüm

$-1 < x_1 < 1 < x_2$ olması için, $-1 < m < 1$ olmalıdır.

5. **$f(x) = x^2 + mx + n = 0$ denkleminin gerçek kökleri x_1 ve x_2 dir. $h < k$ olmak üzere $f(h) < 0$ ve $f(h) \cdot f(k) < 0$ olduğuna göre h, k, x_1 ve x_2 sayılarını sıralayınız.**

ÇÖZÜM :

$a = 1$ ve $f(h) < 0$ olup, $a \cdot f(h) < 0$ olduğundan $x_1 < h < x_2$ dir.

$f(h) < 0$ ve $f(h) \cdot f(k) < 0$ olduğundan $f(k) > 0$ olduğu açıktır. Buradan $a \cdot f(k) > 0$ olur.

O halde, köklerin gerçek olduğu da bilindiğine göre k sayısı kökler dışındadır.

$h < k$ ve $x_1 < h < x_2$ olduğu dikkate alınırsa k sayısının köklerden büyük olduğu anlaşılır.

Öyleyse sıralama; $x_1 < h < x < k$ biçimindedir.

6. **$f(x) = x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. (1) sayısı ile x_1 ve x_2 köklerini m nin değişen değerlerine göre sıralayınız.**

ÇÖZÜM :

Sıralama için, $a \cdot f(1)$, $\Delta = b^2 - 4ac$ ve $\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 1$ ifadelerinin işaretleri incelenmelidir.

① $a \cdot f(1) = 1 \cdot \left[1 - 2(m-1) + m + 1\right]$

$a \cdot f(1) = -m + 4$; $m_1 = 4$

② $\Delta' = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = (m-1)^2 - (m+1)$

$\Delta' = m^2 - 3m$; $m_2 = 0$, $m_3 = 3$

③ $\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 1 = \dfrac{-b}{2a} - 1 = \dfrac{2(m-1)}{2} - 1$

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 1 = m - 2$; $m_4 = 2$

Işaret tablosunu yapalım:

m	$-\infty$		0		2		3		4		$+\infty$
$a \cdot f(1)$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Δ'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x_1+x_2}{2} - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

Tablodan, m nin değişen değerlerine göre, x_1, x_2 ve (1) sayılarının sıralamalarını yapabiliriz.

① $m < 0$ ise;

$a \cdot f(1) > 0$ ve $\Delta' > 0$ olduğundan, (1) sayısı gerçek köklerin dışındadır.

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 1 < 0$, yani $\dfrac{x_1 + x_2}{2} < 1$ olduğundan, kökler (1) den küçüktür.

$x_1 < x_2 < 1$

② $m = 0$ ise;

$a \cdot f(1) > 0$ ve $\Delta' = 0$ olduğundan, (1) sayısı iki kat kökten farklıdır.

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 1 < 0$, yani $\dfrac{x_1 + x_2}{2} < 1$ olduğundan, kökler (1) den küçüktür. $x_1 = x_2 < 1$

③ $0 < m < 3$ ise;

$\Delta' < 0$ olup gerçek kökler bulunmadığından, sıralama söz konusu değildir.

④ $m = 3$ ise;

$a \cdot f(1) > 0$ ve $\Delta' = 0$ olduğundan, (1) sayısı iki kat kökten farklıdır.

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 1 > 0$, yani $\dfrac{x_1 + x_2}{2} > 1$ olduğundan, kökler (1) den büyüktür.

$1 < x_1 = x_2$

⑤ $3 < m < 4$ ise;

$a \cdot f(1) > 0$ ve $\Delta' > 0$ olduğundan, (1) sayısı kökler dışındadır.

$\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 > 0$, yani $\frac{x_1 + x_2}{2} > 1$ olduğundan, kökler (1) den büyüktür.

$1 < x_1 < x_2$

⑥ $m = 4$ ise;

$a \cdot f(1) = 0$ ve $\Delta' > 0$ olduğundan, (1) sayısı köklerden birine eşittir.

$\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 > 0$, yani $\frac{x_1 + x_2}{2} > 1$ olduğundan, (1) sayısı köklerden küçüğüne eşittir.

$1 = x_1 < x_2$

⑦ $m > 4$ ise;

$a \cdot f(1) < 0$ olduğundan, (1) sayısı kökler arasındadır.

$x_1 < 1 < x_2$