

Örnek Problem -1

$$E_1 : x - y + z = 2,$$

$$E_2 : 2x + ky + 2z = 0 \text{ ve}$$

$$E_3 : x + y + kz = 4$$

düzlemlerinin birbirlerine göre durumlarını k 'nın değerlerine göre irdeleyiniz.

Çözüm

Üç düzlemin birbirlerine göre durumları, bu düzlemlerin normal vektörlerinin doğrusal bağımlı olup olmadıklarının bilinmesi ile önemli ölçüde açıklanabilir.

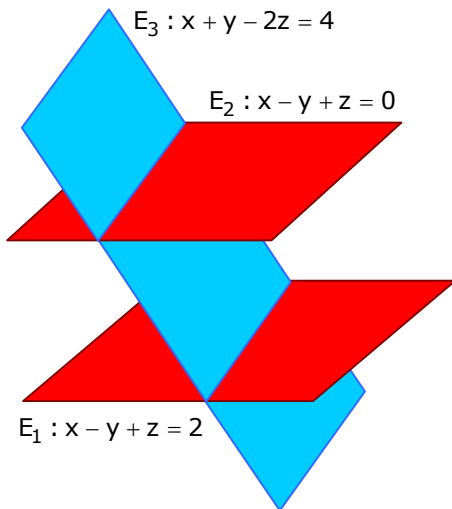
E_1, E_2 ve E_3 düzlemlerinin normalleri sırasıyla n_1, n_2 ve n_3 ise $\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \vec{n}_2 = (2, k, 2)$ ve $\vec{n}_3 = (1, 1, k)$ 'dir.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & k & 2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = -2 \text{ veya } k = 1 \text{ bulunur.}$$

1. durum

$k = -2$ için $\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \vec{n}_2 = (2, -2, 2)$ ve $\vec{n}_3 = (1, 1, -2)$ olur.



2. durum

$k = 1$ için $\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \vec{n}_2 = (2, 1, 2), \vec{n}_3 = (1, 1, 1)$ ve

$$E_1 : x - y + z = 2, E_2 : 2x + y + 2z = 0$$

$$E_3 : x + y + z = 4 \text{ olur.}$$

Bu durumda; normal vektörlerinin herhangi ikisi paralel olmadığından, bunların konum vektörleri düzlemseldir.

E_1 ve E_2 düzlemlerinin arakesiti $n_1 \times n_2$ doğrultusundadır. Öyleyse; konum vektörleri düzlemsel olan \vec{n}_1, \vec{n}_2 ve \vec{n}_3 normallerine ait düzlemlerin ikişer ikişer arakesitleri ya çakışık ya da birbirlerine paralel olurlar.

$E_1 : x - y + z = 2$ ve $E_3 : x + y + z = 4$ düzlemlerinin arakesitini bulalım:

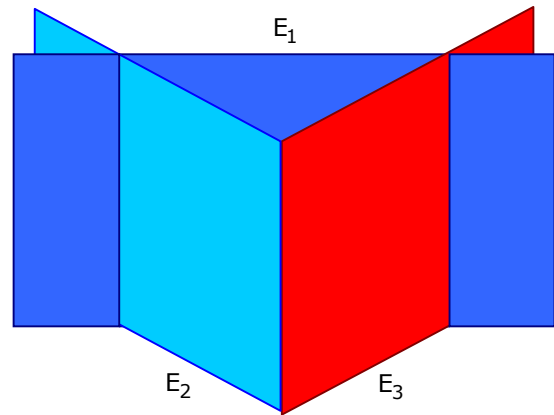
$$\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ + x + y + z = 4 \\ \hline 2x + 2z = 6 \Rightarrow x + z = 3 \text{ ve } y = 1 \\ z = a \text{ dersek, arakesit;} \end{array}$$

$$\ell : (x, y, z) = (3 - a, 1, a) \text{ bulunur.}$$

E_2 denkleminde x, y, z yerine arakesit üzerindeki değerleri konulursa,

$$2(3 - a) + 1 + 2a = 0 \Rightarrow 7 = 0 \text{ bulunur ki;}$$

bu da, arakesitin hiçbir noktasının E_2 üzerinde olmadığını gösterir. Demek ki; arakesitler paraleldir.

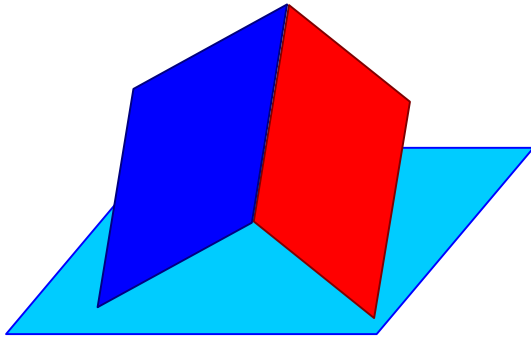


3. durum

$k \neq -2$ ve $k \neq 1$ için,

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + ky + 2z = 0 \\ x + y + kz = 4 \end{array} \right\}$$

sisteminin kat sayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. Bu durumda; sistemin yalnız bir kökü vardır. Bu da; E_1 , E_2 ve E_3 düzlemlerinin bir ve yalnız bir ortak noktalarının bulunacağını gösterir.



Örnek Problem -2

$$\begin{aligned} E_1 : x + y - z &= k + 1, \\ E_2 : x + ky + 2z &= 4 \text{ ve} \\ E_3 : kx - 3y + 4z &= m \end{aligned}$$

denklemlerinin aynı bir doğru boyunca kesişen üç farklı düzlemi göstermesi, hangi k ve m değerleri için gerçekleşir.

Düzlemlerin birbirlerine göre durumlarını k ile m 'nin farklı değerlerine göre irdeleyiniz.

Çözüm

Üç düzlemin normal vektörleri doğrusal bağımlı ise, düzlemler ya bir doğru boyunca kesişirler ya da ikişer ikişer arakesitleri birbirine paralel olur.

Normal vektörlerinin determinantı sıfır ise vektörler doğrusal bağımlı olur.

E_1 , E_2 ve E_3 düzlemlerinin normalleri sırasıyla \vec{n}_1 , \vec{n}_2 ve \vec{n}_3 ise $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{n}_2 = (1, k, 2)$ ve $\vec{n}_3 = (k, -3, 4)$ 'dür.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & k & 2 \\ k & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 6k + 5 = 0$$

$$\Rightarrow k = -1 \text{ veya } k = -5 \text{ bulunur.}$$

1. durum

$k = -1$ ise;

$$\vec{n}_1 = (1, 1, -1), \quad \vec{n}_2 = (1, -1, 2),$$

$$\vec{n}_3 = (-1, -3, 4) \text{ ve}$$

$$E_1 : x + y - z = 0, \quad E_2 : x - y + 2z = 4$$

$$E_3 : -x - 3y + 4z = m \text{ olur.}$$

Normal vektörlerinin herhangi ikisi paralel olmadığından, bunların konum vektörleri düzlemseldir.

E_1 ve E_2 düzlemlerinin arakesiti $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ doğrultusundadır. Öyleyse; konum vektörleri düzlemsel olan \vec{n}_1 , \vec{n}_2 ve \vec{n}_3 normallerine ait düzlemlerin ikişer ikişer arakesitleri ya çakışık ya da birbirlerine paralel olurlar.

Bunu m değerleri belirler.

$$E_1 : x + y - z = 0 \text{ ve } E_2 : x - y + 2z = 4$$

düzlemlerinin arakesitini bulalım:

$$\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ + x - y + 2z = 4 \\ \hline 2x + z = 4 \end{array}$$

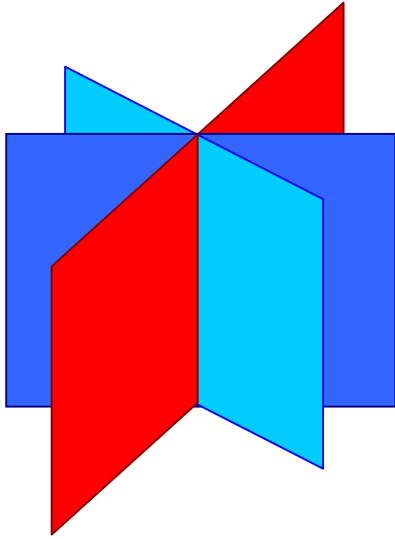
$x = a$ dersek, $z = 4 - 2a$ ve $x = 4 - 3a$ olur.

Arakesit de; $\ell : (x, y, z) = (a, 4 - 3a, 4 - 2a)$ olarak bulunur.

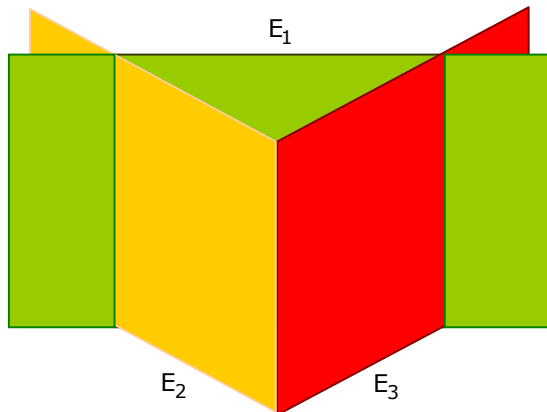
E_3 denkleminde x , y , z yerine arakesit üzerindeki değerleri konulursa,

$$-a - 3(4 - 3a) + 4(4 - 2a) = m \Rightarrow m = 4 \text{ bulunur.}$$

Demek ki; $m = 4$ için E_1 ve E_2 düzlemlerinin arakesiti E_3 düzlemi üzerinde olacaktır. Başka bir deyişle; $k = -1$ ve $m = 4$ için E_1 , E_2 ve E_3 düzlemleri $\ell : (x, y, z) = (a, 4 - 3a, 4 - 2a)$ - ya da daha kullanışlı ifade biçimiyle - $\ell : (x, y, z) = (0, 4, 4) + \lambda(1, -3, -2)$ doğrusu boyunca kesişirler.



$k = -1$ ve $m \neq 4$ için düzlemlerin ikişer ikişer arakesitleri birbirlerine paralel olur.



2. durum

$k = -5$ için, 1. durumda yaptığımız yorumlar, m 'nin farklı bir değeri için, geçerli olacaktır.

Bunu siz yapınız.

3. durum

$k \neq -1$ ve $k \neq -5$ için,

$$\left. \begin{aligned} x + y - z &= k + 1 \\ x + ky + 2z &= 4 \\ kx - 3y + 4z &= m \end{aligned} \right\}$$

sisteminin kat sayılar matrisinin determinanı sıfırdan farklıdır. Bu durumda; m değeri ne olursa olsun sistemin yalnız bir kökü vardır. Bu da; E_1 , E_2 ve E_3 düzlemlerinin bir ve yalnız bir ortak noktalarının bulunacağını gösterir.

