Örnek Problem - 1

$A = \{1,\ 2,\ 3\}$ kümesinden rakamlarla 5'er basamaklı sayılar yazılacaktır.
1, 2 ve 3 rakamlarının üçünün de kullanıldığı kaç farklı sayı yazılabilir?

Örnek Problem - 2

Beş torbanın her birinde 1, 2 ve 3 numaralı kartlar bulunmaktadır.
Torbalardan birer kart çekildiğinde 1, 2 ve 3 numaralı kartların üçünün de çekilmiş olması olasılığı kaçtır?

Örnek Problem - 3

1, 2, 3, 4 rakamları ile yazılabilen 5 basamaklı sayıların kaç tanesinde 1, 2 ve 3 rakamlarının üçü de bulunur?

Örnek Problem – 4

8 zar atılıyor.
1, 2, 3, 4, 5, 6 yüzlerinin altısının da üst yüzde olmaları olasılığı kaçtır?

Örnek Problem – 5

Yan yana 10 koltuğa, evli 5 çift, eşler yan yana gelmemek koşuluyla, kaç farklı biçimde oturabilirler?

Örnek Problem – 6

10 farklı oyuncak 4 çocuğa, her birine en az bir oyuncak olmak üzere, kaç değişik biçimde dağıtılabilir?

Örnek Problem – 7

4 evli çift ikişer kişilik 4 gruba ayrılacaktır.
Grupların hiçbirinde evli bir çiftin bulunmaması olasılığı kaçtır?

Örnek Problem – 8

Üç ülkeden üçer öğrenci ile, üçer kişilik üç grup oluşturulacaktır.
Grupların hiçbirinin aynı ülkenin öğrencilerinden oluşmaması olasılığı kaçtır?

Çözümler

Örnek Problem – 1

1. yol (Doğrudan hesaplama yöntemi ile.)

$$1,2,3,1,1 \text{ ile} - - - - - - > \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20,$$
$$1,2,3,2,2 \text{ ile} - - - - - - > \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20,$$
$$1,2,3,3,3 \text{ ile} - - - - - - > \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20,$$
$$1,2,3,1,2 \text{ ile} - - - - - - > \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30,$$
$$1,2,3,1,3 \text{ ile} - - - - - - > \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30,$$
$$1,2,3,2,3 \text{ ile} - - - - - - > \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30$$

Toplam olarak 1, 2, 3 rakamlarının üçünün de kullanıldığı, beş basamaklı 150 sayı yazılır.

2. yol (İçerme – dışlama prensibi ile)
1, 2 ve 3 rakamları ile yazılabilen beş basamaklı sayıların adedi, her basamak için üç seçenek olduğundan, $N_0 = 3^5$ olur.
1, 2 ve 3 rakamları ile yazılabilen beş basamaklı sayılardan 1'in kullanılmadığı sayı adedi, her basamak için iki seçenek kalacağından, 2^5'tir. Buna göre; bu rakamlardan en az birinin kullanılmadığı sayı adedi $N_1 = C(3,1)\cdot 2^5$ olur.
1, 2 ve 3 rakamları ile yazılabilen beş basamaklı sayılardan 1 ve 2'nin kullanılmadığı sayı adedi, her basamak için bir seçenek kalacağından, 1^5'tir. Buna göre; 1, 2 ve 3 rakamlarından herhangi ikisinin kullanılmadığı sayı adedi $N_2 = C(3,2)\cdot 1^5$ olur.
1, 2 ve 3 rakamlarının üçünün de kullanıldığı beş basamaklı sayı adedi N ise,

$$N = N_0 - N_1 + N_2$$
$$\Rightarrow N = 3^5 - C(3,1)\cdot 2^5 + C(3,2)\cdot 1^5$$
$$\Rightarrow N = 150 \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek Problem – 2

Torbaları bir sıraya dizip çekilen sayıları torbaların önüne koyduğumuzu düşünelim: İstediğimiz sıralamaların sayısı, "Örnek Problem - 1"deki gibi bulunacaktır.

Gelebilecek tüm sıralamaların sayısı $N_0 = 3^5$;

1, 2, 3 rakamlarından en az birinin gelmediği sıralamaların sayısı $N_1 = C(3,1)\cdot 2^5$;

1, 2, 3 rakamlarından herhangi ikisinin gelmediği sıralanmaların sayısı $N_2 = C(3,2)\cdot 1^5$ olur.

Buna göre; 1, 2 ve 3 rakamlarının üçünün de geldiği sıralanmaların sayısı N ise,

$$N = N_0 - N_1 + N_2$$
$$\Rightarrow N = 3^5 - C(3,1)\cdot 2^5 + C(3,2)\cdot 1^5$$
$$\Rightarrow N = 150 \text{ olur.}$$

İstenen sıralanmaların kümesi A ve örnek uzayı E ise $n(A) = 150$ ve $n(E) = 3^5$ olup

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \frac{50}{81}$$

bulunur.

Soru

"Torbaların özdeş olduğu düşünülerek,
gelenlerin yalnız 1'lerden oluştuğu 1 durum;
gelenlerin yalnız 2'lerden oluştuğu 1 durum;
gelenlerin yalnız 3'lerden oluştuğu 1 durum;
gelenlerin yalnız 1 ve 2'lerden oluştuğu 4 durum;
gelenlerin yalnız 1 ve 3'lerden oluştuğu 4 durum;
gelenlerin yalnız 2 ve 3'lerden oluştuğu 4 durum;
1, 2, 3 sayılarının üçünün de bulunduğu 6 durum sayılabilir.

Buna göre; istenen olasılık,

$$P(A) = \frac{6}{21} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{7}$$

olur."

Buradaki yaklaşım hatalıdır. Neden?

Örnek Problem - 3

1, 2, 3 ve 4 rakamları ile yazılabilen beş basamaklı sayıların adedi, her basamak için 4 seçenek olduğundan, $N_0 = 4^5$ olur.

1, 2 , 3 ve 4 rakamları ile yazılabilen beş basamaklı sayılardan 1'in kullanılmadığı sayı adedi, her basamak için üç seçenek kalacağından, 3^5'tir. Buna göre; bu rakamlardan en az birinin kullanılmadığı sayı adedi $N_1 = C(4,1)\cdot 3^5$ olur.

1, 2, 3 ve 4 rakamları ile yazılabilen beş basamaklı sayılardan 1 ve 2'nin kullanılmadığı sayı adedi, her basamak için iki seçenek kalacağından, 2^5'tir. Buna göre; 1, 2, 3 ve 4 rakamlarından herhangi ikisinin kullanılmadığı sayı adedi $N_2 = C(4,2)\cdot 2^5$ olur.

1, 2, 3 ve 4 rakamları ile yazılabilen beş basamaklı sayılardan 1, 2 ve 3'ün kullanılmadığı sayı adedi, her basamak için bir seçenek kalacağından, 1^5'tir. Buna göre; 1, 2, 3 ve 4 rakamlarından herhangi üçünün kullanılma-dığı sayı adedi $N_3 = C(4,3)\cdot 1^5$ olur.

1, 2, 3, 4 rakamlarının dördünün de kullanıldığı beş basamaklı sayı adedi N ise,

$$N = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$
$$\Rightarrow N = 4^5 - C(4,1)\cdot 3^5 + C(4,2)\cdot 2^5 - C(4,3)\cdot 1^5$$
$$\Rightarrow N = 240 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek Problem – 4

Zarları sırayla atıp gelen sonuçları yan yana dizdiğimizi düşünelim:

Gelebilecek tüm sıralamaların sayısı $N_0 = 6^8$;

En az bir sayının gelmediği sıralamaların sayısı $N_1 = C(6,1)\cdot 5^8$;

En az iki sayının gelmediği sıralamaların sayısı $N_2 = C(6,2)\cdot 4^8$;

En az üç sayının gelmediği sıralamaların sayısı $N_3 = C(6,3)\cdot 3^8$;

En az dört sayının gelmediği sıralamaların sayısı $N_4 = C(6,4)\cdot 2^8$;

En az beş sayının gelmediği sıralamaların sayısı $N_5 = C(6,5)\cdot 1^8$

Buna göre; 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 yüzlerinin altısının da geldiği sıralanmaların sayısı N ise,

$$N = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - N_5$$
$$\Rightarrow N = 6^8 - C(6,1)\cdot 5^8 + C(6,2)\cdot 4^8 - C(6,3)\cdot 3^8 + C(6,4)\cdot 2^8 - C(6,5)\cdot 1^8$$
$$\Rightarrow N = 191514 \text{ olur.}$$

İstenen sonuçların kümesi A ve örnek uzayı E ise $n(A) = 191514$ ve $n(E) = 6^8$ olup

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \frac{31919}{279936}$$

bulunur.

Örnek Problem – 5

10 kişinin tüm sıralanmalarının sayısı $N_0 = 10!$ olur.
Çiftlerden en az birinde eşlerin yan yana olduğu sıralanışların sayısı $N_1 = C(5,1)\cdot 2!\cdot 9!$ olur.
Çiftlerden en az ikisinde eşlerin yan yana olduğu sıralanışların sayısı $N_2 = C(5,2)\cdot 2!\cdot 2!\cdot 8!$ olur.
Çiftlerden en az üçünde eşlerin yan yana olduğu sıralanışların sayısı $N_3 = C(5,3)\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 7!$ olur.
Çiftlerden en az dördünde eşlerin yan yana olduğu sıralanışların sayısı $N_4 = C(5,4)\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 6!$ olur.
Tüm çiftlerde eşlerin yan yana olduğu sıralanışların sayısı $N_5 = C(5,5)\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 5!$ olur.
Buna göre; çiftlerin hiçbirinde eşlerin yan yana olmadığı durumların sayısı,

$$N = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - N_5$$
$$\Rightarrow N = 10! - 5\cdot 2\cdot 9! + 10\cdot 2^2\cdot 8! - 10\cdot 2^3\cdot 7! + 5\cdot 2^4\cdot 6! - 2^5\cdot 5!$$
$$\Rightarrow N = 204960 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek Problem – 6

Oyuncakların tüm dağılımlarının sayısı $N_0 = 4^{10}$;
çocuklardan en az birinin oyuncak almadığı dağılımların sayısı $N_1 = C(4,1)\cdot 3^{10}$;
çocuklardan en az ikisinin oyuncak almadığı dağılımların sayısı $N_2 = C(4,2)\cdot 2^{10}$;
çocuklardan üçünün oyuncak almadığı dağılımların sayısı $N_3 = C(4,3)\cdot 1^{10}$ olur.

Buna göre; her çocuğun en az bir oyuncak aldığı dağılımların sayısı,

$$N = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$
$$\Rightarrow N = 4^{10} - C(4,1)\cdot 3^{10} + C(4,2)\cdot 2^{10} - C(4,3)\cdot 1^{10}$$
$$\Rightarrow N = 818520 \text{ olur.}$$

Örnek Problem – 7

8 kişi ikişer kişilik 4 gruba,
$N_0 = \dfrac{C(8,2)\cdot C(6,2)\cdot C(4,2)\cdot C(2,2)}{4!}$ biçimde ayrılır.
8 kişi, en az biri eşlerden oluşan 4 gruba,
$N_1 = \dfrac{C(4,1)\cdot C(6,2)\cdot C(4,2)\cdot C(2,2)}{3!}$ biçimde ayrılır.
8 kişi, en az ikisi eşlerden oluşan 4 gruba,
$N_2 = \dfrac{C(4,2)\cdot C(4,2)\cdot C(2,2)}{2!}$ biçimde ayrılır.
8 kişi, en az üçü eşlerden oluşan 4 gruba,
$N_3 = \dfrac{C(4,3)\cdot C(2,2)}{1!}$ biçimde ayrılır.
8 kişi, dördü de eşlerden oluşan 4 gruba,
$N_4 = C(4,4)$ biçimde ayrılır.
Grupların hiçbirinde eşlerin birlikte olmadığı durumların sayısı,

$$N = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4$$
$$\Rightarrow N = \frac{C(8,2)\cdot C(6,2)\cdot C(4,2)\cdot C(2,2)}{4!} - \frac{C(4,1)\cdot C(6,2)\cdot C(4,2)\cdot C(2,2)}{3!} + \frac{C(4,2)\cdot C(4,2)\cdot C(2,2)}{2!} - \frac{C(4,3)\cdot C(2,2)}{1!} + C(4,4)$$
$$\Rightarrow N = 60 \quad \text{olur.}$$

İstenen grup ayırımlarının kümesi A ve örnek uzayı E ise $n(A) = 60$ ve $n(E) = N_0 = 105$ olup

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{7}$$

bulunur.

Soru

3 evli çift ikişer kişilik 3 gruba ayrılacaktır.
Grupların hiçbirinde evli bir çiftin bulunmaması olasılığı kaçtır?

Örnek Problem – 8

9 kişi üçer kişilik 3 gruba,

$N_0 = \dfrac{C(9,3)\cdot C(6,3)\cdot C(3,3)}{3!}$ biçimde ayrılır.

9 kişi, en az biri yurttaşlardan oluşan 3 gruba,

$N_1 = \dfrac{C(3,1)\cdot C(6,3)\cdot C(3,3)}{2!}$ biçimde ayrılır.

9 kişi, en az ikisi yurttaşlardan oluşan 3 gruba,

$N_2 = \dfrac{C(3,2)\cdot C(3,3)}{1!}$ biçimde ayrılır.

9 kişi, üçü de yurttaşlardan oluşan 3 gruba,

$N_3 = C(3,3)$ biçimde ayrılır.

Hiçbir grubun aynı ülkenin öğrencilerinden oluşmadığı durumların sayısı,

$$N = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$

$$\Rightarrow N = \frac{C(9,3)\cdot C(6,3)\cdot C(3,3)}{3!} - \frac{C(3,1)\cdot C(6,3)\cdot C(3,3)}{2!} + \frac{C(3,2)\cdot C(3,3)}{1!} - C(3,3)$$

$$\Rightarrow N = 252 \quad \text{olur.}$$

İstenen grup ayırımlarının kümesi A ve örnek uzayı E ise $n(A) = 252$ ve $n(E) = N_0 = 280$ olup

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \frac{9}{10}$$

bulunur.