Örnek Problem - 1

Sinemada, yan yana 3 koltukta oturan 3 arkadaş, ara verildiğinde kalkıyorlar.
Dönüşte, aynı 3 koltuğa rastgele oturduklarına göre; hiçbirinin ilk yerine oturmaması olasılığı kaçtır?

Örnek Problem - 2

Sinemada, yan yana 6 koltukta oturan 6 arkadaş, ara verildiğinde kalkıyorlar.
Dönüşte, aynı 6 koltuğa rastgele oturduklarına göre;

a. Her birinin ilk yerine oturması olasılığı kaçtır?

b. Hiçbirinin ilk yerine oturmaması olasılığı kaçtır?

c. En az birinin ilk yerine oturması olasılığı kaçtır?

d. Yalnız birinin ilk yerine oturması olasılığı kaçtır?

e. En az ikisinin ilk yerine oturması olasılığı kaçtır?

f. Yalnız ikisinin ilk yerine oturması olasılığı kaçtır?

Örnek Problem - 3

A ve B torbalarında 1'den 3'e kadar numaralı 3'er bilye bulunmaktadır. Bilyeler birer birer çekiliyor ve çekilen bilyeler torbalara konulmuyor.
Aynı sırada çekilen herhangi iki bilyenin aynı numaralı olmaması olasılığı kaçtır?

Örnek Problem - 4

A ve B torbalarında 1'den 5'e kadar numaralı 5'er kart bulunmaktadır. Kartlar birer birer çekiliyor ve çekilen kartlar torbalara konulmuyor.

a. Aynı sırada çekilen herhangi iki kartın aynı numaralı olmaması olasılığı kaçtır?

b. 4. çekişte aynı numaralı kartların çekilmesi olasılığı kaçtır?

c. Yalnız 2. çekişte aynı numaralı kartların çekilmesi olasılığı kaçtır?

d. 4. çekişte iki torbadan da 4 numaralı kartla-rın çekilmesi olasılığı kaçtır?

e. 2. ve 4. çekişte aynı numaralı kartların çekilmesi olasılığı kaçtır?

f. Yalnız 2. ve 4. çekişte aynı numaralı kartların çekilmesi olasılığı kaçtır?

Çözümler

Örnek Problem – 1

1. yol (İçerme – dışlama prensibi ile)
Kişiler a, b, c olsun.
Tüm sıralanmaların sayısı $N_0 = 3!$ olur.
"a" nın kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 2! dir. "a" kendi yerine oturduğunda "b" için 2 seçenek; "b" bir yeri seçtiğinde de "c" için 1 seçenek kalacaktır.
Benzer sayımlar, "b"nin kendi yerine oturduğu sıralanmalar için ve "c"nin kendi yerine oturduğu sıralanmalar için de yapılacaktır.
Buna göre; en az birinin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı $N_1 = C(3,1)\cdot 2!$ olur.
"a" ve "b" nin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 1! dir. "a" ve "b" kendi yerlerine oturduğunda "c" için yalnız bir seçenek kalır.
"a" ile "c"nin ve "b" ile "c"nin kendi yerine oturduğu sıralanmalar için de benzer sayımlar yapılacaktır.
Buna göre; en az ikisinin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı $N_2 = C(3,2)\cdot 1!$ olur.
Burada; 2 kişi kendi yerine oturmuşken 3.sü de kendi yerine oturmuş olacaktır. Ama; biz bu 3 kişiden seçeceğimiz her 2 kişi için oluşacak sıralanmaları ayrı ayrı sayacağız. Aşağıda, bu sayımların dökümü incelendiğinde, durum daha iyi anlaşılabilecektir.
"a", "b" ve "c" nin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 0! dir. Her üçü de kendi yerine oturduğunda, kalan "0" eleman için "0" seçenek kalacaktır.
Öyleyse; üçünün de kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı $N_3 = C(3,3)\cdot 0!$ olacaktır.
Buna göre; 3 kişiden hiçbirinin kendi yerine oturmadığı sıralanmaların sayısı,

$$N = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$
$$\Rightarrow N = 3! - C(3,1)\cdot 2! + C(3,2)\cdot 1! - C(3,3)\cdot 0!$$
$$\Rightarrow N = 2$$

bulunur.

Bu son işlemi sözlerle şöyle ifade edebiliriz:

Üç kişiden hiçbirinin ilk yerinde oturmadığı sıralanmaların sayısı
= Tüm sıralanmaların sayısı
  - En az birinin ilk yerinde oturduğu sıralanmaların sayısı
  + En az ikisinin ilk yerinde oturduğu sıralanmaların sayısı
  - Üçünün de ilk yerinde oturduğu sıralanmaların sayısı.

Sözünü ettiğimiz sıralanmaların neler olduğunu ayrı ayrı gösterelim:

Üç kişiden hiçbirinin ilk yerine oturmadığı sıralanmaların sayısı
= n{(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)}
  - n{(**a**,b,c),(**a**,c,b),(a,**b**,c),(c,**b**,a),(a,b,**c**),(b,a,**c**)}
  + n{(**a**,**b**,c),(**a**,b,**c**),(a,**b**,**c**)}
  - n{(**a**,**b**,**c**)}

Koyu yazılmış harflere dikkat ediniz!
Yapılan işlemler, tekrarlanmış sayımları ayıklamak içindir.
Gerçekten;
İlk sıralanmaları (a,b,c) biçiminde olan kişilerin, kalktıktan sonra hiçbirinin kendi yerine oturmadığı iki sıralanma vardır:
(c,a,b) ve (b,c,a)

İstenen olay A, örnek uzayı E ise
$A = \{(b,c,a),(c,a,b)\}$, $n(A) = 2$;
$E = \{(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),c,b,a)\}$
ve $n(E) = 3! \Rightarrow n(E) = 6$ olup
$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \dfrac{1}{3}$ bulunur.

2. yol (Alt faktöriyel kavramını kullanarak)
Bir sırada sıralanmış n tane elemanın yerlerinden ayrılıp tekrar sıralandıklarını düşünelim.
Öyle ki; hiçbiri ilk yerinde olmasın.
Bu tür sıralanmalara, **bozuk düzen dağılımları** diyeceğiz.
Bozuk düzen dağılımlarının sayısını, "1. yol" da olduğu gibi, içerme - dışlama prensibi ile bulabiliriz:

$$N = n! - C(n,1)\cdot(n-1)! + C(n,2)\cdot(n-2)! - \ldots$$
$$+ (-1)^{(n-1)}\cdot C(n,n-1)\cdot 1! + (-1)^n\cdot C(n,n)\cdot 0!$$

n elemanın bozuk düzen dağılımlarının sayısı olan bu N sayısına, n'nin **alt faktöriyel**i denir. **!n** ile gösterilir.
İfadedeki C(n,r) terimleri açılırsa,

$$!n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \ldots + (-1)^n\cdot\frac{n!}{n!}$$

olur. Eşitliğin sağ yanı n! parantezine alınırsa,

$$!n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right]$$

$$\Rightarrow !n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

elde edilir.

Demek ki;
n elemanın bir sırada dizilişlerinin sayısı **n!**
(n'nin faktöriyeli);
dizili n elemanın yerlerinden ayrılıp hiçbirinin ilk yerine gelmediği dizilişlerin sayısı **!n** dir.
(n'nin alt faktöriyeli)

Problemimize dönelim:

İstenen olay A, örnek uzayı E ise
$n(A) = !3$ ve $n(E) = 3!$ olup

$P(A) = \frac{!3}{3!} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$ bulunur.

Örnek Problem – 2.a

6 kişi yan yana 6 koltuğa 6! değişik biçimde sıralanabilir. Bu sıralanmalardan yalnız birinde herkes kendi yerine oturur.
Tüm sıralanmaların eş olumlu olduğu düşünülürse E örnek uzayı eş olumlu ve $n(E) = 6!$ olur.
Herkesin kendi yerine oturduğu sıralanmayı da A olayı diye adlandırırsak $n(A) = 1$ olur.
Örneğin; kişiler a, b, c, d, e, f ve ilk sıralanma (a,b,c,d,e,f) ise $A = \{(a,b,c,d,e,f)\}$ 'dir.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{720}$ bulunur.

Örnek Problem – 2.b

1. yol (İçerme – dışlama prensibi ile)
Tüm sıralanmaların sayısı $N_0 = 6!$ olur.
"a" nın kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 5! dir.
Buna göre; en az birinin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı $N_1 = C(6,1)\cdot 5!$ olur.
"a" ve "b" nin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 4! dir.
Buna göre; en az ikisinin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı $N_2 = C(6,2)\cdot 4!$ olur.
"a", "b" ve "c" nin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 3! dir.
Buna göre; en az üçünün kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı $N_3 = C(6,3)\cdot 3!$ olur.
"a", "b", "c" ve "d" nin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 2! dir.
Buna göre; en az dördünün kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı $N_4 = C(6,4)\cdot 2!$ olur.
"a", "b", "c", "d" ve "e" nin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 1! dir.
Buna göre; en az beşinin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı $N_5 = C(6,5)\cdot 1!$ olur.
Hepsinin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısı 0! dir. Bu da; $N_6 = C(6,6)\cdot 0!$ olur.
Buna göre; 6 kişiden hiçbirinin kendi yerine oturmadığı sıralanmaların sayısı,

$$\begin{aligned} N &= N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - N_5 + N_6 \\ &= 6! - C(6,1)\cdot 5! + C(6,2)\cdot 4! - C(6,3)\cdot 3! \\ &\quad + C(6,4)\cdot 2! - C(6,5)\cdot 1! + C(6,6)\cdot 0! \\ &= 265 \end{aligned}$$

bulunur.
İstenen sıralanmaların kümesi B,
tüm sıralanmaların kümesi E ise
$n(B) = 265$ ve $n(E) = 6!$ olup

$P(B) = \frac{265}{6!} \Rightarrow P(B) = \frac{53}{144}$ olur.

2. yol (Alt faktöriyel kavramını kullanarak)
Burada, istenen A olayı 6 elemanın bozuk düzen sıralanmalarının kümesi; örnek uzayı da 6 elemanın tüm sıralanmalarının kümesidir.
$n(B) = !6$ ve $n(E) = 6!$ olup

$P(B) = \frac{!6}{6!} \Rightarrow P(B) = \frac{265}{720} \Rightarrow P(B) = \frac{53}{144}$ olur.

Örnek Problem – 2.c

"Örnek problem – 2.b" de, 6 kişiden en az birinin kendi yerine oturduğu durumların sayısını $C(6,1)\cdot 5!$ olarak vermiştik.
Bu "2.c" maddesini, "2.b" maddesinde ne demek istediğimizi tam anlatabilmek için koyduk.
$C(6,1)\cdot 5!$ sayısının içinde "a"nın kendi yerinde olduğu tüm sıralanmalar, "b"nin kendi yerinde olduğu tüm sıralanmalar, "c"nin, "d"nin, "e"nin ve "f"nin kendi yerinde olduğu tüm sıralanmalar vardır. Dolayısıyla; çok sayıda tekrarlanmış sayım sonuçları bu sayının içindedir.
"2.b"de asıl amacımız, 6 kişiden hiçbirinin ilk yerine oturmadığı sıralanmaların sayısını bulmaktı. Ara işlemlerdeki tekrarlı sayımlar, sürdürülen işlemlerle giderilmiş; sonunda, istediğimiz sayıyı hatasız elde edebilmiştik.

"2.c" maddesinde bu sayıdan yararlanacağız.
Tüm sıralanmaların sayısından, bu 6 kişiden hiçbirinin ilk yerine oturmadığı sıralanmaların sayısını çıkararak en az bir kişinin kendi yerine oturduğu sıralanmaların sayısını bulacağız:

6! - !6

6 kişiden en az birinin kendi yerine oturduğu sıralanmaların kümesi C, tüm sıralanmaların kümesi E ise $n(C) = 6! - !6$ ve $n(E) = 6!$ olup

$$P(C) = \frac{6! - !6}{6!} \Rightarrow P(C) = \frac{91}{144} \text{ olur.}$$

Örnek Problem – 2.d

"a"nın kendi yerine oturduğu, diğerlerinin hiçbirinin kendi yerine oturmadığı sıralanmaların sayısını bulalım:
Bu sayı, 5 elemanın bozuk düzen dağılımlarının sayısı kadardır. **!5**
Bu sayıyı, ister **içerme-dışlama prensibi** ile ister **alt faktöriyel**in tanımından yararlanarak kolayca bulabiliriz:

$$!5 = 5! - C(5,1)\cdot 4! + C(5,2)\cdot 3! - C(5,3)\cdot 2! + C(5,4)\cdot 1! - C(5,5)\cdot 0!$$

$$\Rightarrow !5 = 44$$

ya da,

$$!n = n!\cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow !5 = 5!\cdot \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow !5 = 44$$

6 kişiden yalnız birinin ilk yerine oturduğu sıralanmaların kümesi D;
tüm sıralanmaların kümesi E ise
$n(D) = C(6,1)\cdot !5 \Rightarrow n(D) = 144$ ve $n(E) = 6!$ olup

$$P(D) = \frac{264}{6!} \Rightarrow P(D) = \frac{11}{30} \text{ olur.}$$

Örnek Problem – 2.e

6 kişinin en az ikisinin kendi yerlerine oturmadığı sıralanmaların kümesi K olsun. Tüm sıralanmaların kümesinden, 6 kişinin hiçbirinin kendi yerine oturmadığı sıralanmalar ile 6 kişinin yalnız birinin kendi yerine oturduğu sıralanmaları çıkarırsak geriye K kümesinin elemanları kalır.
$n(K) = 6! - !6 - C(6,1)\cdot !5 \Rightarrow n(K) = 191$ ve $n(E) = 6!$

olup $P(K) = \dfrac{n(K)}{n(E)} \Rightarrow P(K) = \dfrac{191}{720}$ bulunur.

Örnek Problem – 2.f

Yalnız "a" ve "b"nin kendi yerlerine oturduğu sıralanmaların sayısını bulalım:
Kalan 4 kişiden hiçbiri kendi yerine oturmayacağı için, yalnız "a" ve "b"nin kendi yerlerine oturduğu sıralanmaların sayısı, 4 elemanın bozuk düzen dağılımlarının sayısı kadar olacaktır.
6 kişinin yalnız ikisinin kendi yerlerine oturduğu sıralanmaların kümesine F; tüm sıralanmaların kümesine E diyelim.
$n(F) = C(6,2)\cdot !4 \Rightarrow n(F) = 135$ ve $n(E) = 6!$

olup $P(F) = \dfrac{n(F)}{n(E)} \Rightarrow P(F) = \dfrac{3}{16}$ bulunur.

Örnek Problem – 3

1. yol (Doğrudan hesaplama yöntemi)

1. çekişte farklı sayıların gelmesi olasılığı 2/3 tür.
2. çekişte ilk çekişte gelenlerin tam tersi gelirse,
3. çekişte gelecek olanlar zorunlu olarak aynı sayılar olur.

$$1.\text{de} ------> (1,3)$$
$$2.\text{de} ------> (3,1)$$
$$3.\text{de} ------> (2,2) \quad \text{gibi.}$$

Öyleyse; 2. çekişte ilk çekilenlerin tersi gelmemelidir. Torbalarda 2'şer bilye kalmış olacağından, 2. çekişte ilk çekilenlerin tersinin gelmesi olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olur.
İlk çekişte farklı sayılar gelmiş ise, 2. çekişten önce iki torbadaki bilyelerden birer tanesi aynı numaralıdır. 2. çekişte bunlar da gelmemelidir.
2. çekişte aynı sayıların gelmesi olasılığı da $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olur.
Öyleyse; 2. çekişte uygun sayıların gelmesi olasılığı $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ olacaktır.
Buna göre; üç çekişte de farklı sayıların gelmesi olasılığı $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ bulunur.

2. yol (Bozuk düzen dağılımı yöntemi)

Doğrudan hesaplama yönteminde ne kadar zorlandığımızı gördünüz. İçerme – dışlama prensibi gibi bazı temel matematiksel düşünme yöntemlerinin de işimizi ne kadar kolaylaştıracağını şimdi göreceksiniz.

Torbalardan yapacağımız çekişlerle gelecek sayılar (1,2,3), (1,3,2), (3,1,2),… gibi sıralanmalar oluşturacaktır. Bizim istediğimiz, B torbasından gelecek sıralamaların A torbasından gelecek sıralamalarla bozuk düzen dağılımı oluşturmasıdır.
Sayılar A torbasından bir sıra ile gelecek;
B torbasından gelecek sayılar bunlarla bozuk düzende olacak.
Yani; 3 elemanın bozuk düzen dağılımı.
A'daki bir sıralanma ile bozuk düzen dağılımı oluşturan, B'deki sıralanmaların kümesi K ve tüm sıralanmaların kümesi E olsun.
$n(K) = !3$ ve $n(E) = 3!$

olup $P(K) = \frac{!3}{3!} \Rightarrow P(K) = \frac{1}{3}$ bulunur.

Örnek Problem – 4.a

A'daki bir sıralanma ile bozuk düzen dağılımı oluşturan, B'deki sıralanmaların kümesi A ve tüm sıralanmaların kümesi E olsun.
$n(A) = !5$ ve $n(E) = 5!$

olup $P(A) = \frac{!5}{5!} \Rightarrow P(A) = \frac{11}{30}$ bulunur.

Örnek Problem – 4.b

4. çekişte A torbasından x çekilmiş olsun. B'den de x çekilmesi olasılığı $\frac{1}{5}$ olur.

Örnek Problem – 4.c

2. çekişte A torbasından "4" çekilmiş olsun. B'den de 2. çekişte 4'ün geldiği, diğer dört sayının A'dakiler ile bozuk düzen dağılımı oluşturduğu sıralanmalar istenmektedir. Bu sıralanmaların kümesi C ve tüm sıralanmaların kümesi E olsun.
$n(C) = C(5,1) \cdot !4$ ve $n(E) = 5!$

olup $P(C) = \frac{C(5,1) \cdot !4}{5!} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$ bulunur.

Örnek Problem – 4.d

4. çekişte A torbasından "4" çekilmesi olasılığı $\frac{1}{5}$ ve B torbasından da "4" çekilmesi olasılığı, yine, $\frac{1}{5}$ olup bunların birlikte gerçekleşmesi olasılığı $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ olur.

Örnek Problem – 4.e

A torbasından 2. çekişte "x" ve 4. çekişte "y" gelmiş olsun. B torbasından 2. çekişte "x" gelmesi olasılığı $\frac{1}{5}$ ve 4. çekişte "y" gelmesi olasılığı $\frac{1}{4}$ olup bunların birlikte gerçekleşmesi olasılığı $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ olur.

Örnek Problem – 4.f

Yoruldum! $\frac{!3}{5!} = \frac{1}{60}$