Parçalı Fonksiyonların Bileşkesi

Hazırlayan: Halit Çelik

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \geq a \\ f_2(x) & x < a \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \geq b \\ g_2(x) & x < b \end{cases}$$

Fonksiyonları için fog fonksiyonu

$$(fog)(x) = \begin{cases} f_1(g(x)) & g(x) \geq a \\ f_2(g(x)) & g(x) < a \end{cases}$$

Şeklinde ifade edilir. Bileşke fonksiyon yazılırken öncelikle g(x) – a ifadesinin işaretinin ve g(x) in tanımlanma şeklinin önemli olduğu görülmektedir. Aşağıdaki örneklerde de görüldüğü gibi bu duruma özellikle dikkat edilmiştir.

(fog)(x) fonksiyonu yazılırken bilindiği gibi f(x) fonksiyonunun tanım kümesi g(x) fonksiyonunun değerleri ile belirlenir. fog nin tanımlanabilmesi için g(x) in değerinin f(x) in tanım kümesinin elemanı olması gerekir. Bu nedenle $g(x) \geq a$ ve $g(x) < a$ yazılmıştır.

Örnek 1:

$f(x) = 3x + 2$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

olduğuna göre (fog)(x) fonksiyonunu bulalım.

Çözüm:

F(x) parçasız bir fonksiyon olduğuna göre bileşke g(x) tanımlanmasına göre olacaktır.

$$(fog)(x) = 3g(x) + 2$$

Şeklinde tanımlanır.

$x \geq 0$ olduğunda $g(x) = x^2 + 1$ olduğundan $(fog)(x) = 3(x^2 + 1) + 2$ olur.

X<0 olduğunda $g(x) = -x + 1$ olduğundan $(fog)(x) = 3(-x + 1) + 2$ olur. Buna göre

$$(fog)(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & x \geq 0 \\ -3x + 5 & x < 0 \end{cases}$$

Olarak bulunur.

Örnek 2:

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \begin{cases} x - 3 & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

Olduğuna göre (gof)(x) fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$(gof)(x) = \begin{cases} f(x) - 3 & f(x) \leq 1 \\ f(x) & f(x) > 1 \end{cases}$$

Olur. Tanımlamada da görüldüğü gibi f(x) – 1 ifadesinin işareti bileşke fonksiyonun tanımlanmasını sağlayacaktır.

$$f(x) = x^2 \text{ olduğundan } f(x) - 1 = x^2 - 1$$

dir. İşaret tablosu aşağıdadır.

X		-1		1	
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

$x < -1$ için $f(x) - 1 < 0$ ve $f(x) = x^2$ olduğundan $(gof)(x) = f(x) = x^2$ olur.

$-1 \leq x \leq 1$ için $f(x) - 1 \leq 0$ ve $f(x) = x^2$ olduğundan

$$(gof)(x) = f(x) - 3 = x^2 - 3$$

olur.

$1 < x$ için $f(x) - 1 > 0$ ve $f(x) = x^2$ olduğundan

$$(gof)(x) = f(x) = x^2$$

olur. Buna göre

$$(gof)(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x^2 - 3 & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x \end{cases}$$

Olarak bulunur.

Örnek 3:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \geq 1 \\ -x+5 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ -x-1 & x < 1 \end{cases}$$

Olduğuna göre (fog)(x) fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

F(x) fonksiyonunda x yerine g(x) yazılırsa

$$(fog)(x) = \begin{cases} 2g(x)+3 & g(x) \geq 1 \\ -g(x)+5 & g(x) < 1 \end{cases}$$

Şeklinde olacaktır. Burada g(x) – 1 ifadesinin işaretini inceliyelim. g(x) iki farklı parça halinde tanımlandığından işaret incelemesi de iki farklı g(x) için olacaktır.

$$g(x) = x^2 \; için \; g(x) - 1 = x^2 - 1 \; ve$$

$$g(x) = -x-1 \; için \; g(x) - 1 = -x-2$$

olur. Her iki durumla ilgili işaret inceleme tablosu aşağıdadır.

x		-2		-1		1	
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$-x-2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$

Tabloyu yorumlayalım:

$g(x) fonksiyonu \; x \geq 1 \; için \; g(x) = x^2$ olarak tanımlandığından x<1 için tabloda kapatılmıştır. Benzer şekilde x<1 için $g(x) = -x-1$ olarak tanımlandığından $x \geq 1$ için kapatılmıştır.

$x \leq -2 \; için \; g(x) - 1 \geq 0$ ve $g(x) = -x-1$ olduğundan $(fog)(x) = 2(-x-1)+3 = -2x+1$ olur.

$-2 < x < 1 \; için \; g(x) - 1 < 0 \; ve \; g(x) = -x-1$ olduğundan $(fog)(x) = -(-x-1)+5 = x+6$ olur.

$1 \leq x \; için \; g(x) - 1 \geq 0 \; ve \; g(x) = x^2$ olduğundan $(fog)(x) = 2x^2+3$ olur. Buna göre

$$(fog)(x) = \begin{cases} -2x+1 & x \leq -2 \\ x+6 & -2 < x < 1 \\ 2x^2+3 & 1 \leq x \end{cases}$$

olarak bulunur.

Örnek 4:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 1 \\ 3x-2 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2-3 & x \geq 0 \\ x^2+1 & x < 0 \end{cases}$$

olduğuna göre (fog)(x) fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

f(x) fonksiyonunda x yerine g(x) yazılırsa

$$(fog)(x) = \begin{cases} g(x)+3 & g(x) \geq 1 \\ 3g(x)-2 & g(x) < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. g(x) – 1 ifadesinin değeri

$$g(x) = x^2 - 3 \; için \; g(x) - 1 = x^2 - 4$$

$$g(x) = x^2 + 1 \; için \; g(x) - 1 = x^2$$

şeklindedir. Her iki ifadenin işaret tablosu ve g(x) in tanımlandığı aralıklar aşağıdaki tabloda göterilmiştir.

x		-2		0		2	
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2+1	$+$		$+$		$+$		$+$

Şimdi yukarıdaki tabloyu yorumlayalım

Tabloya dikkat edilirse;

$x \leq 0 \; için \; g(x) - 1 \geq 0 \; ve \; g(x) = x^2 + 1$ olduğundan $(fog)(x) = (x^2+1)+3 = x^2+4$ olur.

$0 < x < 2 \; için \; g(x) - 1 < 0 \; ve \; g(x) = x^2 - 3$ olduğundan

$(fog)(x) = 3(x^2 - 3) - 2 = 3x^2 - 11$ olur.

$2 \leq x$ $için$ $g(x) - 1 \geq 0$ ve $g(x) = x^2 - 3$ olduğundan $(fog)(x) = (x^2 - 3) + 3 = x^2$ olur.

Buna göre :

$$(fog)(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \leq 0 \\ 3x^2 - 11 & 0 < x < 2 \\ x^2 & 2 \leq x \end{cases}$$

olur.

Örnek 5:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 & x \leq -1 \\ 1 - 2x & x > -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 2 \\ 4x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

olduğuna göre (fog)(x) fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$(fog)(x) = \begin{cases} -g(x) + 4 & g(x) \leq -1 \\ 1 - 2g(x) & g(x) > -1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bura g(x) + 1 ifadesinin değeri

$$g(x) = 2x + 3 \ ise \ g(x) + 1 = 2x + 4$$

$$g(x) = 4x - 1 \ ise \ g(x) + 1 = 4x$$

şeklindedir. Her iki ifadenin ve g(x) in tanımlı oldukları bölgeler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x		-2		0		2	
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$4x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$

$x \leq -2$ $için$ $g(x) + 1 \leq 0$ ve $g(x) = 2x + 3$ olduğundan $(fog)(x) = -(2x + 3) + 4 = -2x + 1$ olur.

$-2 < x < 2$ $için$ $g(x) + 1 > 0$ ve $g(x) = 2x + 3$ olduğundan $(fog)(x) = 1 - 2(2x + 3) = -4x - 5$ olur.

$2 \leq x$ $için$ $g(x) + 1 > 0$ ve $g(x) = 4x - 1$olduğundan $(fog)(x) = 1 - 2(4x - 1) = -8x + 3$ olur.

Buna göre

$$(fog)(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x \leq -2 \\ -4x - 5 & -2 < x < 2 \\ -8x + 3 & 2 \leq x \end{cases}$$

olarak yazılır.

Örnek 6:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ 4x - 1 & -1 \leq x \leq 3 \\ 1 - x & 3 < x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x & x \leq 2 \\ 2x - 3 & x > 2 \end{cases}$$

olduğuna göre (fog)(x) fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$(fog)(x) = \begin{cases} g(x) + 3 & g(x) < -1 \\ 4g(x) - 1 & -1 \leq g(x) \leq 3 \\ 1 - g(x) & 3 < g(x) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlama için g(x) +1 ile g(x) – 3 ifadelerinin işaretinin incelenmesi gerekmektedir.

$$g(x) = 2 - x \ ise \ g(x) + 1 = 3 - x$$

$$g(x) = 2x - 3 \ ise \ g(x) + 1 = 2x - 2 \ dir.$$

$$g(x) = 2 - x \ ise \ g(x) - 3 = -x - 1$$

$$g(x) = 2x - 3 \ ise \ g(x) - 3 = 2x - 6$$

dır.

Aşağıdaki tablo her dört durumunda işarenin incelendiği tablodur.

x		-1		1		2		3	
$3-x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-x-1$	$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$

Tabloda g(x) + 1 >0 ve g(x) in tanılanmadığı bölümler kapatılmıştır. Buna göre;

$x < -1$ *için* $g(x) - 3 > 0$ *ve* $g8x) = 2 - x$ olduğundan $(fog)(x) = 1 - (2 - x) = x - 1$ olur.

$-1 \leq x \leq 2$ *için* $g(x) + 1 \geq 0$ *ve* $g(x) - 3 \leq 0$ ve $g(x) = 2 - x$ olduğundan $(fog)(x) = 4(2 - x) - 1 \;\; (fog)(x) = -4x + 7$ olur.

$2 < x \leq 3$ *için* $g(x) + 1 > 0$ *ve* $g(x) - 3 < 0$ ve $g(x) = 2x - 3$ olduğundan

$(fog)(x) = 4(2x - 3) - 1 = 8x - 13$ olur.

$3 < x$ *için* $g(x) - 3 > 0$ *ve* $g(x) = 2x - 3$ olduğundan $(fog)(x) = 1 - (2x - 3) = -2x + 4$ olur.

Buna göre:

$$(fog)(x) = \begin{cases} x-1 & x<-1 \\ -4x+7 & -1\leq x\leq 2 \\ 8x-13 & 2<x\leq 3 \\ -2x+4 & 3<x \end{cases}$$

olarak bulunur.

Halit Çelik

Adıyaman Anadolu Lisesi