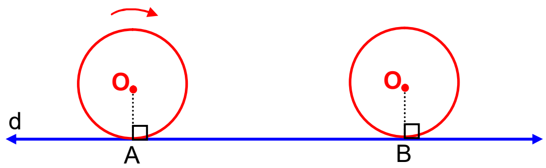
Çemberin Döndürülerek Ötelenmesi

Çember ile modelleyebileceğimiz bir cismi doğrusal bir yolda, kaydırmadan, döndürelim:



Şekil-1

Şekil-1'de; bir (O, r) çemberinin belirli bir noktası doğrusal bir d yolunun bir A noktasında iken, kaydırmadan, ok yönünde döndürülerek ötelenmesi gösterilmiştir.

Çember; doğruya A noktasında teğet olduğu konumdan, doğrunun B noktasında teğet olduğu konuma ötelenmiştir.

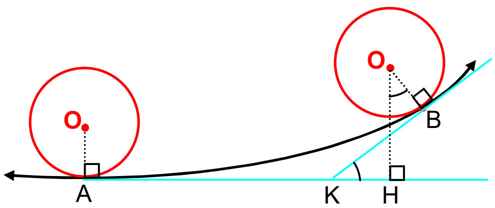
Çember, 1 tam dönme yapsaydı; çemberin noktaları ile doğrunun noktaları bire bir eşlenecek ve $|AB| = 2\pi r$ olacaktı.

Öyleyse; $|AB|$ yolu verildiğinde,

$$\text{Dönme sayısı} = \frac{|AB|}{2\pi r} \text{ olur.}$$

✦ Çember ile modelleyebileceğimiz bir cismi doğrusal bir yolda, döndürmeden, kaydırarak ötelersek; çember merkezi etrafında dönmez.

Ancak; yol eğrisel ise, çemberi kaydırarak ötelemede, biz döndürmesek de yol çemberi merkezi etrafında döndürür:



Şekil -2

Şekil-2'de, eğrisel bir yolun A noktasından B noktasına kadar döndürülmeden kaydırılmış (O, r) çemberi gösterilmiştir.

AB yolunun A'daki doğrultusu ile B'deki doğrultusunun belirttiği açı $(\angle BKH)$'dır.

Çemberin B'deki konumuna getirilebilmesi için, A'daki konumunda, merkezi etrafında saatin ters yönünde $(\angle HOB)$ açısı kadar döndürülmesi gerektiğine dikkat ediniz.

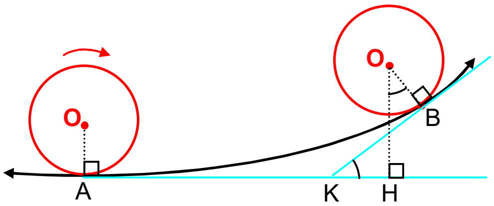
Şekil-2'de; $(\angle HOB) \cong (\angle BKH)$ olduğunu görünüz.

Yolun B'deki doğrultusu ile A'daki doğrultusunun belirttiği açı; çemberin, merkezi etrafında dönme açısına eşittir.

✦ (O, r) çemberini eğimi artan AB yolunda, kaydırmadan, saat yönünde döndürdüğümüzde;

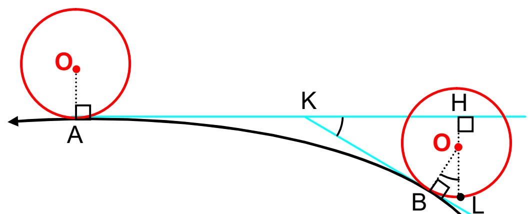
(O, r) çemberinin, merkezi etrafındaki

$$\text{Dönme sayısı} = \frac{|AB|}{2\pi r} - \frac{m(\angle BKH)}{2\pi} \text{ olur.}$$



Şekil -3

✦ (O, r) çemberini; bir de, eğimi azalan bir yolda kaydırarak öteleyelim:



Şekil -4

Şekil-4'te, eğrisel bir yolun A noktasından B noktasına kadar döndürülmeden kaydırılmış (O, r) çemberi gösterilmiştir.

AB yolunun A'daki doğrultusu ile B'deki doğrultusunun belirttiği açı $(\angle BKH)$'dır.

Çemberin B'deki konumuna getirilebilmesi için, A'daki konumunda, merkezi etrafında saat yönünde $(\angle BOL)$ açısı kadar döndürülmesi gerekir.

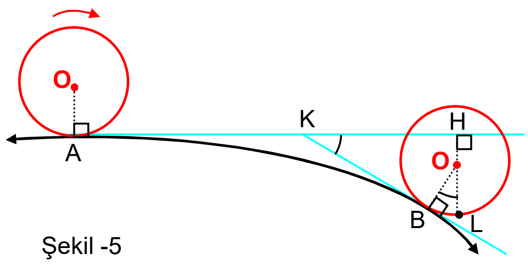
$(\angle BOL) \cong (\angle BKH)$ olduğu görülür.

Yolun B'deki doğrultusu ile A'daki doğrultusunun belirttiği açı; çemberin, merkezi etrafında dönme açısına eşittir.

✦ (O, r) çemberini eğimi azalan AB yolunda, kaydırmadan, saat yönünde döndürdüğümüzde;

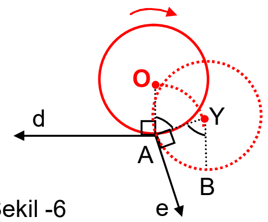
(O, r) çemberinin, merkezi etrafındaki

Dönme sayısı $= \dfrac{|AB|}{2\pi r} + \dfrac{m(\angle BKH)}{2\pi}$ olur.



Şekil -5

✦ Çember ile modellediğimiz cisim, yolu üzerinde, sabit bir noktasının etrafında dönme yapmak zorunda kalabileceği konumlardan da geçebilir. Böyle durumlarda; çemberin merkezi çemberin sabit noktası etrafında hangi ölçüde dönüyorsa, çemberin sabit noktası da çemberin merkezi etrafında aynı ölçüde dönmüş olur.



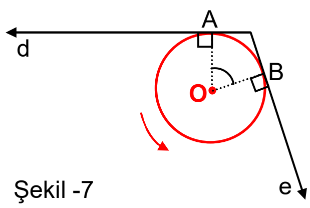
Şekil -6

d doğrusu üzerinde saat yönünde döndürülen (O, r) çemberi, d'ye A'da teğet konumundan e'ye A'da teğet konumuna gelirken O merkezi Y konumuna gelir.

Çemberin merkezi A etrafında saat yönünde $(\angle YAO)$ açısı kadar dönerken, çemberin üzerinde A ile çakışan nokta da merkez etrafında, saat yönünde $(\angle AYB)$ açısı kadar döner.

$(\angle AYB) \cong (\angle YAO)$ olduğu görülür.

✦ Çember ile modellediğimiz cisim, yolu üzerinde, farklı iki noktasında farklı iki doğruya teğet iken, doğruların birinden ayrılıp diğeri üzerinde dönmeyi sürdürebilir:



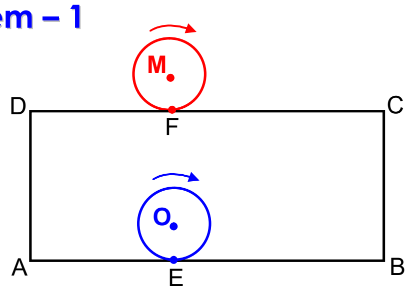
Şekil -7

Şekil-7'de d doğrusu üzerinde saatin tersi yönünde döndürülen (O, r) çemberi, d'ye A'da teğet konumunda iken e'ye de B'de teğettir.

Bu anda, çemberin d'den ayrılıp e üzerinde döndürülmesi sürdürülebilir.

Bu geçiş anında, çember merkezi etrafında dönmez.

Problem – 1



Yarıçapları 1'er birim olan çemberlerle ABCD dikdörtgeni düzlemseldir.

$|AB| = 8$ br. ve $|BC| = 4$ br.'dir.

Çemberler E ve F noktalarında dikdörtgene teğettir.

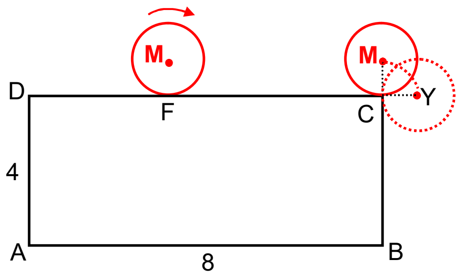
Çemberler dikdörtgene teğet kalarak, oklar yönünde kaymadan döndürülerek, ilk konumlarına getirileceklerdir.

a. İşlem boyunca, $(M, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

b. İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Çözüm

a.

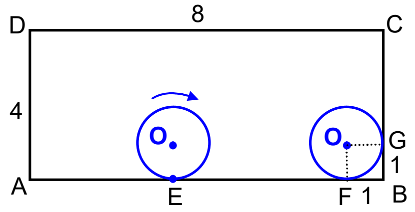


$(M, 1)$ çemberi merkezi etrafında, ABCD dikdörtgeninin kenarları boyunca döndürülmesi sırasında $\frac{24}{2\pi}$ dönme yapar?

Bu dönme sayısına, her köşede $\frac{\pi}{2}$ radyanlık dönme eklenir.

$(M, 1)$ çemberinin, merkezi etrafındaki toplam dönme sayısı, $\frac{24}{2\pi} + 4 \cdot \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{24}{2\pi} + 1$ bulunur.

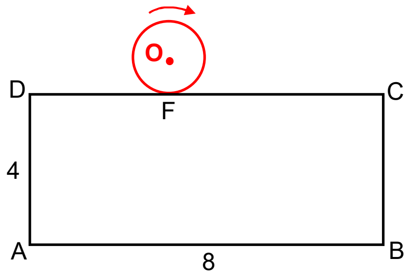
b.



$(O, 1)$ çemberi ABCD dikdörtgeninin iç bölgesinde kenarlarına teğet olarak döndürülürken; uzun kenarlara 6'şar birim boyunca, kısa kenarlara 2'şer birim boyunca teğet kalır. Köşelerden atlarken döndürme olmaz.

$(M, 1)$ çemberinin, merkezi etrafındaki dönme sayısı, $\frac{16}{2\pi}$ bulunur.

Siz Çözünüz – 1



$(O, 1)$ çemberi ile ABCD dikdörtgeni düzlemseldir.

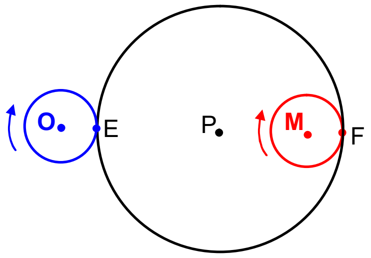
$|AB| = 8$ br. ve $|BC| = 4$ br.'dir.

$(O, 1)$ çemberi F noktasında ABCD dikdörtgenine teğettir.

$(O, 1)$ çemberi dikdörtgene teğet kalarak, ok yönünde döndürülerek, ilk konumuna getirildiğinde; 3 tam dönme yaptığı görülmüştür.

$(O, 1)$ çemberi işlem boyunca, yolun kaç birimlik kısmında dönme yaptırılmadan kaydırılmıştır?

Problem – 2



$(O, 1)$, $(M, 1)$, $(P, 4)$ çemberleri düzlemseldir.

Küçük çemberler E ve F noktalarında büyük çembere teğettir.

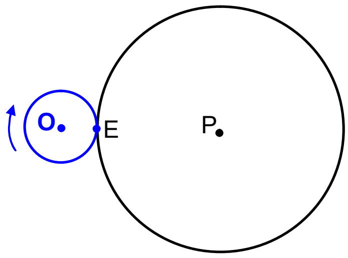
Büyük çember sabittir. Küçük çemberler büyük çembere teğet kalarak, oklar yönünde kaymadan döndürülerek ilk konumlarına getirileceklerdir.

a. İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

b. İşlem boyunca, $(M, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Çözüm

a.

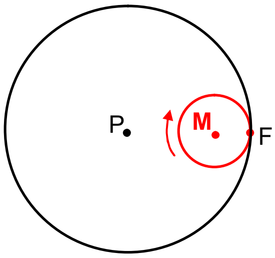


$(O, 1)$ çemberi, tam kaydırılarak, E'nin P'ye göre simetriğine getirildiğinde, merkezi etrafında π radyan döndürülmüş olur. İlk konumuna getirildiğinde merkezi etrafındaki dönme açısının ölçüsü 2π radyan 'a tamamlanır.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberinin, merkezi etrafındaki toplam dönme sayısı,

$\dfrac{2\pi \cdot 4}{2\pi} + \dfrac{2\pi}{2\pi} = 5$ bulunur.

b.



$(M, 1)$ çemberi, tam kaydırılarak, F'nin P'ye göre simetriğine getirildiğinde, merkezi etrafında saatin tersi yönünde π radyan döndürülmüş olur.

İlk konumuna getirildiğinde merkezi etrafındaki dönme açısının ölçüsü, saatin tersi yönünde 2π radyan 'a tamamlanır.

$(M, 1)$ çemberi döndürülürken, saat yönünde döndürülmektedir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberinin, merkezi etrafındaki toplam dönme sayısı,

$\dfrac{2\pi \cdot 4}{2\pi} - \dfrac{2\pi}{2\pi} = 3$ bulunur.

✦ Bir düzlemde, düzgün dışbükey bir şeklin dış bölgesinde döndürülen r yarıçaplı çemberin, başlangıç konumuna kadar döndürülürken, merkezi etrafındaki dönme sayısı,

$\dfrac{\text{Çevre uzunluğu}}{2\pi} + 1$ olur.

✦ Bir düzlemde, düzgün dışbükey bir şeklin iç bölgesinde döndürülen r yarıçaplı çember, şekle içten teğet kalabiliyorsa, başlangıç konumuna kadar döndürülürken, merkezi etrafındaki dönme sayısı,

$\dfrac{\text{Çevre uzunluğu}}{2\pi} - 1$ olur.

✦ Bir düzlemde, düzgün dışbükey bir şeklin iç bölgesinde döndürülen r yarıçaplı çember, şekle içten teğet kalamıyorsa, başlangıç konumuna kadar döndürülürken, merkezi etrafındaki dönme sayısı, şeklin ölçülerine bağlıdır.

Bunların açıklamaları, başlangıçta verdiğimiz bilgiler içindedir.

Siz Çözünüz – 2

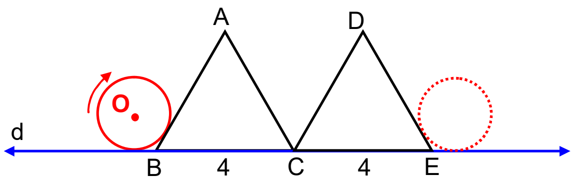
Kenar ölçüleri verilen bir çeşitkenar beşgen ile, bu beşgene dıştan teğet olan bir (O, r) çemberi düzlemseldir.

Çember, kaymadan döndürülerek, başlangıç konumuna getiriliyor.

(O, r) çemberinin, merkezi etrafındaki döndürülme sayısının,

$\dfrac{\text{Çevre uzunluğu}}{2\pi}+1$ olduğunu gösteriniz.

Problem – 3



$(O, 1)$ çemberi ile ABC ve DCE eşkenar üçgenleri düzlemseldir.

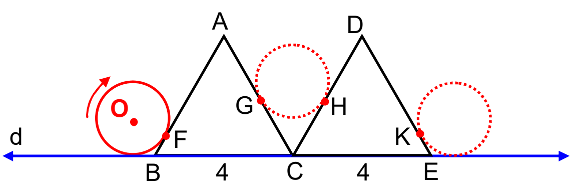
B, C, E noktaları d doğrusu üzerindedir.

$|BC| = |CE| = 4$ br.'dir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile AB'ye teğet konumdan DE ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Çözüm



$|AF| = |DK| = 4-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ve $|AG| = |HD| = 4-\sqrt{3}$

olduğunu gösteriniz.

A ve D köşelerinde, çemberin, merkezi etrafında $\dfrac{2\pi}{3}$ radyan döndürüleceğini gösteriniz.

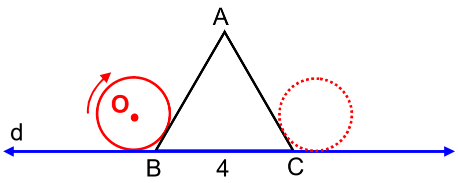
Toplam döndürülme sayısının, FAG yolundaki dönme sayısının 2 katı olacağını gösteriniz.

Buna göre; işlem boyunca, $(O, 1)$ çemberinin, merkezi etrafında yaptığı dönme sayısı,

$$2\cdot\left(\frac{|FA|+|AG|}{2\pi}+\frac{2\pi/3}{2\pi}\right)=\frac{12-4\sqrt{3}}{\pi}+\frac{2}{3}$$

bulunur.

Siz Çözünüz – 3



$(O, 1)$ çemberi ile ABC eşkenar üçgeni düzlemseldir.

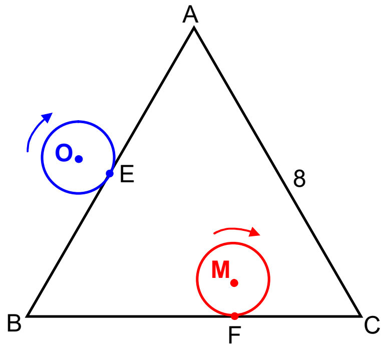
B ile C noktaları d doğrusu üzerindedir.

$|BC| = 4$ br.'dir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile AB'ye teğet konumdan AC ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Siz Çözünüz – 4



Yarıçapları 1'er birim olan çemberlerle ABC eşkenar üçgeni düzlemseldir.

$|AC| = 8$ br.'dir.

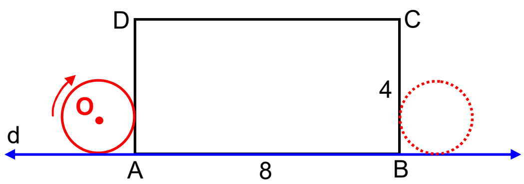
Çemberler E ve F noktalarında ABC eşkenar üçgenine teğettir.

Çemberler, oklar yönünde kaymadan döndürülerek, ilk konumlarına getirileceklerdir.

a. İşlem boyunca, $(M, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

b. İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Siz Çözünüz – 5



$(O, 1)$ çemberi ile ABCD dikdörtgeni düzlemseldir.

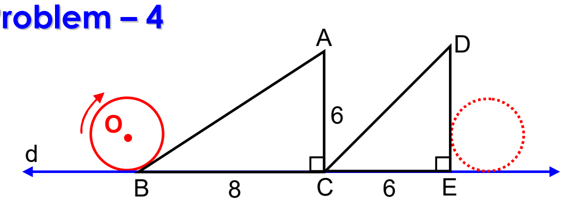
A ile B noktaları d doğrusu üzerindedir.

$|AB| = 8$ br. ve $|BC| = 4$ br.'dir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile AD'ye teğet konumdan CB ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Problem – 4



$(O, 1)$ çemberi ile ABC ve DCE dik üçgenleri düzlemseldir.

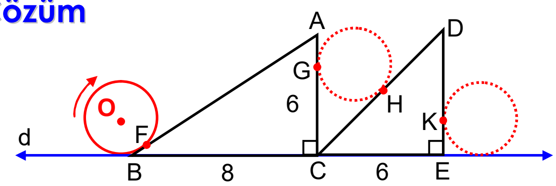
B, C, E noktaları d doğrusu üzerindedir.

$|AC| = 8$ br. ve $|AC| = |CE| = |DE| = 6$ br.'dir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile AB'ye teğet konumdan DE ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Çözüm



$|AF| = \frac{29}{3}$, $|AG| = 5 - \sqrt{2}$, $|HD| = 7\sqrt{2} - 5$ ve $|DK| = 5$ olduğunu gösteriniz.

A köşesinde; çemberin, merkezi etrafında

$\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ radyan döndürüleceğini gösteriniz.

D köşesinde; çemberin, merkezi etrafında

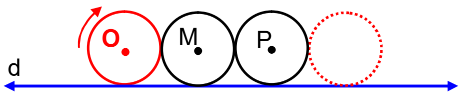
$\frac{3\pi}{4}$ radyan döndürüleceğini gösteriniz.

Buna göre; işlem boyunca, $(O, 1)$ çemberinin, merkezi etrafında yaptığı dönme sayısı,

$$\frac{|FA| + |AG| + |HD| + |DK|}{2\pi} + \frac{\pi/2 + \arctan(4/3) + 3\pi/4}{2\pi}$$

$$= \frac{44 + 18\sqrt{2} + 3 \cdot \arctan(4/3)}{6\pi} + \frac{3}{8}$$ bulunur.

Problem – 5



$(O, 1)$, $(M, 1)$, $(P, 1)$ çemberleri düzlemseldir.

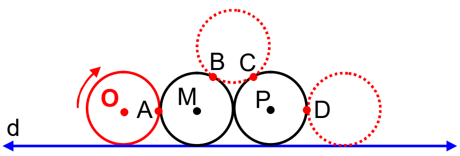
Çemberler ardışık olarak birbirlerine ve d doğrusuna teğettir.

$(M, 1)$ ve $(P, 1)$ çemberleri sabittir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile $(M, 1)$ çemberine teğet konumdan $(P, 1)$ çemberi ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Çözüm



$(O, 1)$ çemberi $\overset{\frown}{AB}$ ve $\overset{\frown}{CD}$ yayları üzerinde döndürülür. Çember, B'den C'ye geçerken döndürülmez.

$(O, 1)$ çemberi $\overset{\frown}{AB}$ yayı üzerinde döndürülürken, çemberin, merkezi etrafında yaptığı dönme sayısı; $\overset{\frown}{CD}$ yayı üzerinde döndürülürken yapacağı dönme sayısına eşittir.

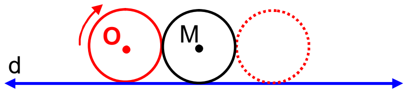
Öyleyse; çemberin, işlem boyunca, merkezi etrafında yapacağı dönme sayısı, $\overset{\frown}{AB}$ yayı üzerinde döndürülürken yapacağı dönme sayısının 2 katı olacaktır.

$\overset{\frown}{AB}$ yayının B'deki doğrultusu, A'daki doğrultusu ile $\frac{2\pi}{3}$ radyanlık açı yapar.

Buna göre; işlem boyunca, $(O, 1)$ çemberinin, merkezi etrafında yaptığı dönme sayısı,

$$2\cdot\left(\frac{|\overset{\frown}{AB}|}{2\pi}+\frac{2\pi/3}{2\pi}\right)=\frac{4}{3}\ \text{bulunur.}$$

Siz Çözünüz – 6



$(O, 1)$ ve $(M, 1)$ çemberleri düzlemseldir.

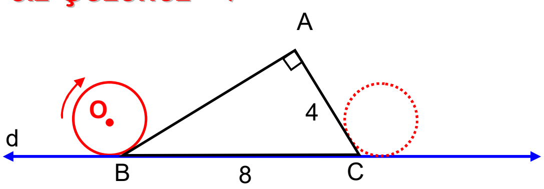
Çemberler birbirlerine ve d doğrusuna teğettir.

$(M, 1)$ çemberi sabittir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile $(M, 1)$ çemberine soldan teğet konumdan d ile $(M, 1)$ çemberine sağdan teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Siz Çözünüz – 7



$(O, 1)$ çemberi ile ABC dik üçgeni düzlemseldir.

B ve C noktaları d doğrusu üzerindedir.

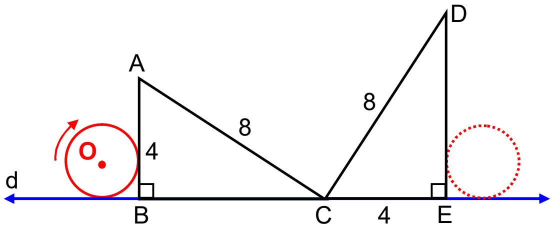
$(O, 1)$ çemberi d doğrusuna ve AB'ye teğettir.

$|BC| = 8$ br. ve $|AC| = 4$ br. 'dir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile AB'ye teğet konumdan AC ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Siz Çözünüz – 8

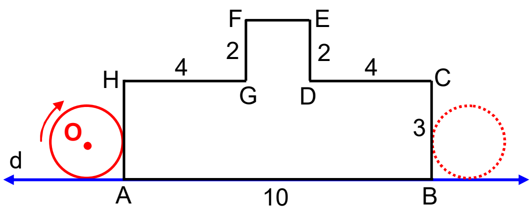


$(O, 1)$ çemberi ile ABC ve CDE dik üçgenleri düzlemseldir.
B, C ve E noktaları d doğrusu üzerindedir.
$|AB| = |CE| = 4$ br. ve $|AC| = |CD| = 8$ br.'dir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile AB'ye teğet konumdan DE ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Siz Çözünüz – 9

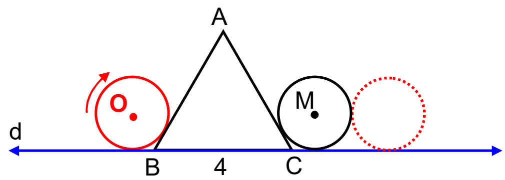


$(O, 1)$ çemberi ile ABCDEFGH sekizgeni düzlemseldir.
Sekizgenin bitişik kenarları birbirine diktir.
A ve B noktaları d doğrusu üzerindedir.
$|AB| = 10$ br., $|BC| = 3$ br., $|CD| = |GH| = 4$ br. ve $|DE| = |FG| = 2$ br.'dir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile AH'ye teğet konumdan CB ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?

Siz Çözünüz – 10



$(O, 1)$ ve $(M, 1)$ çemberleri ile ABC eşkenar üçgeni düzlemseldir.
B ve C noktaları d doğrusu üzerindedir.
Çemberler d doğrusuna ve ABC üçgenine teğettir.
$|AB| = |BC| = |AC| = 4$ br.'dir.

$(O, 1)$ çemberi kaymadan döndürülerek, d ile AB'ye teğet konumdan $(M, 1)$ çemberi ile d'ye teğet konuma getirilecektir.

İşlem boyunca, $(O, 1)$ çemberi merkezi etrafında kaç dönme yapar?