Giriş

Bir cismin **ağırlık merkezi**, o cisme etki eden yer çekimi kuvvetinin uygulama noktasıdır. Buna göre; ağırlık merkezinden bir iple asılan bir cisim, nasıl bırakılırsa öyle durur. Yani; yer çekimi kuvveti ile ipin cisme uyguladığı kuvvet, aynı noktaya uygulanmış zıt yönlü kuvvetler olacaklarından birbirini dengeler. Cisim de dengede kalır.

Küresel bir cisim üzerinde devam edelim:

Küresel cismin ağırlık merkezinin, kürenin merkezi olduğunu hemen söyleyebiliriz. Ancak; cisim çok büyük ise tabana yakın noktalarında yer çekimi ivmesi büyük, yükseklerde küçük olacaktır. Bu durumda; ağırlık merkezi, kürenin merkezinden aşağı kayacağından, kürenin merkezinden farklı bir nokta olur. Buna göre; ağırlık merkezi, cismin dış etkenlerle değişebilen bir noktasıdır. Öyleyse; ağırlık merkezi ile değil de, cismin kendine özgü bir noktası olan **kütle merkezi** ile ilgilenmek daha doğru olacaktır. Bir cismin kütle merkezi, cismin bütün kütlesinin toplanmış sayıldığı nokta olarak düşünülebilir.

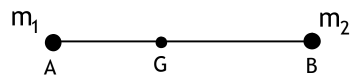
Küresel cismin kütle merkezi de her zaman kürenin merkezi olmayabilir. Örneğin; küresel cismin bir kısmı alüminyumdan bir kısmı da demirden yapılmışsa, kütle merkezi demirden yapılmış tarafa doğru kayacaktır. Ancak; küresel cismin tamamı yoğunluğu aynı olan maddeden yapılmışsa, kürenin merkezi cismin de kütle merkezi olur. Yani; cismin kütle merkezi ile geometrik merkezi aynı nokta olur. Bunu genelleştirebiliriz:

Yoğunluğu her noktasında aynı olan maddelerden yapılmış cisimlerin kütle merkezleri, o cisimlerin **geometrik merkez**leridir.

Geometrik merkez terimi, İngilizcedeki **centroid** teriminin karşılığıdır. Cisimlerin "ağırlık" ve "kütle" merkezleri, mühendislikte dikkate alınması gereken, çok önemli noktalarıdır. Ancak; bu matematiğin konusu değildir. Biz matematikte, bir cismin ağırlık merkezi ya da kütle merkezi ile değil, şeklinin geometrik merkezi ile ilgileneceğiz.

Noktasal İki Kütlenin Kütle Merkezi

Ağırlıksız bir [AB] çubuğunun A ucuna noktasal bir m_1 kütlesi, B ucuna noktasal bir m_2 kütlesi tutturalım.



Sistemin kütle merkezini G ile gösterirsek, bu nokta;

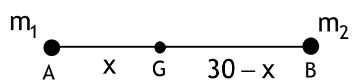
$$m_1 \cdot |AG| = m_2 \cdot |BG|$$

eşitliğini sağlayan noktadır. $m \cdot |AG|$ çarpımına m kütlesinin G noktasına göre momenti denir. Demek ki; kütle merkezi, sistemin toplam kütlesinin momentinin sıfır olduğu noktadır. Kütle merkezinin büyük kütleye daha yakın olacağı açıktır.

Örnek problem-1

Ağırlıksız sayılabilecek, 30 cm uzunluğundaki bir [AB] çubuğunun A ucunda 40 gramlık, B ucunda 20 gramlık iki kütle vardır. Çubuk A'dan kaç cm uzaktaki bir noktasından asılırsa dengede kalır?

Çözüm



$m_1 = 40$ gr , $m_2 = 20$ gr , $|AG| = x$ ve $|BG| = 30 - x$ diyelim.

x

$$m_1 \cdot |AG| = m_2 \cdot |BG|$$

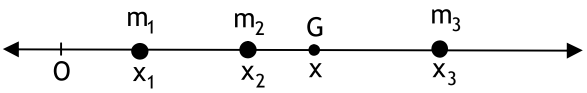
$$\Rightarrow 40 \cdot x = 20 \cdot (30 - x)$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ cm olur.}$$

Sistemin kütle merkezi A ucundan 10 cm uzaklıktadır. Bu boyutlarda, ağırlık merkezi de aynı nokta olacağından, çubuk G noktasından asıldığında nasıl bırakılırsa öyle durur.

Bir Doğru Üzerindeki Noktasal Kütlelerin Kütle Merkezi

Ağırlıksız bir çubuk üzerine tutturulmuş noktasal kütleler m_1, m_2, m_3, … , m_n olsun. Bu çubuk üzerine bir koordinat doğrusu oturtup kütlelerin koordinatlarını $m_1(x_1)$, $m_2(x_2)$, … , $m_n(x_n)$ ile gösterelim.



Sistemin kütle merkezindeki toplam kütlenin O başlangıç noktasına göre kütle momenti, kütlelerin O başlangıç noktasına göre ayrı ayrı kütle momentlerinin toplamına eşittir.

$$(m_1+m_2+\ldots+m_n)\cdot x = m_1\cdot x_1 + m_2\cdot x_2+\ldots+x_n\cdot m_n$$

$$\Rightarrow x = \frac{m_1\cdot x_1+m_2\cdot x_2+m_3\cdot x_3+\ldots+m_n\cdot x_n}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n} \text{ olur.}$$

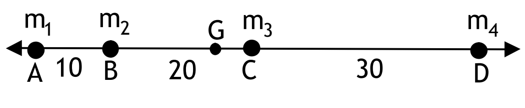
Örnek problem-2

Ağırlıksız bir çubuk üzerindeki ardışık A, B, C, D noktalarına sırasıyla $m_1 = 15$ gr, $m_2 = 20$ gr, $m_3 = 40$ gr ve $m_4 = 25$ gr lık kütleler tutturulmuştur.

$|AB| = 10$ cm, $|AB| = 20$ cm ve $|AB| = 10$ cm ise bu cismin kütle merkezi A'dan kaç cm uzaklıktadır?

Çözüm

Koordinat doğrusunda A noktasını başlangıç noktası ve B'nin apsisini 10 olarak seçersek C(30) ve D(60) olur.



$$x = \frac{15\cdot 0+20\cdot 10+40\cdot 30+25\cdot 60}{15+20+40+25}$$

$\Rightarrow x = 29$ cm bulunur.

Düzlemde ve Uzayda Koordinatları Verilen Noktasal Kütlelerin Kütle Merkezi

Düzlemde $m_1(x_1,y_1)$, $m_2(x_2,y_2)$, … , $m_n(x_n,y_n)$ koordinatları ile verilen kütlelerin oluşturduğu sistemin kütle merkezi G(x, y) ise,

$$x = \frac{m_1\cdot x_1+m_2\cdot x_2+m_3x_3+\ldots+m_n\cdot x_n}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n} \text{ ve}$$

$$y = \frac{m_1\cdot y_1+m_2\cdot y_2+m_3\cdot y_3+\ldots+m_n\cdot y_n}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n} \text{ olur.}$$

Uzayda;

$m_1(x_1,y_1,z_1)$, $m_2(x_2,y_2,z_3)$, … , $m_n(x_n,y_n,z_n)$

koordinatları ile verilen kütlelerin oluşturduğu sistemin kütle merkezi G(x, y, z) ise,

$$x = \frac{m_1\cdot x_1+m_2\cdot x_2+m_3\cdot x_3+\ldots+m_n\cdot x_n}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n} \ ;$$

$$y = \frac{m_1\cdot y_1+m_2\cdot y_2+m_3\cdot y_3+\ldots+m_n\cdot y_n}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n} \text{ ve}$$

$$z = \frac{m_1\cdot z_1+m_2\cdot z_2+m_3\cdot z_3+\ldots+m_n\cdot z_n}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n} \text{ olur.}$$

Katı Cisimlerin Kütle Merkezleri

Bir katı cismin, sonsuz sayıda sonsuz küçük kütleden oluştuğunu düşünebiliriz. Bu düşünce ile; noktasal kütlelerin kütle merkezlerini veren eşitlikler biraz geliştirilerek katı cisimlerin kütle merkezlerinin koordinatları bulunabilir.

Kütlesi m olan bir katı cismin kütle merkezinin $G(x_{km}, y_{km}, z_{km})$ ise;

$$x_{km} = \frac{\sum m_i\cdot x_i}{\sum m_i}, \quad y_{km} = \frac{\sum m_i\cdot y_i}{\sum m_i}, \quad z_{km} = \frac{\sum m_i\cdot z_i}{\sum m_i}$$

olur.

Bu sonsuz toplamların limitleri hesaplanırsa;

$$x_{km} = \frac{\int x\cdot dm}{m}, \quad y_{km} = \frac{\int y\cdot dm}{m}, \quad z_{km} = \frac{\int z\cdot dm}{m}$$

bulunur.

Şekillerin Geometrik Merkezleri

Yoğunluğu her noktasında aynı olan cisimlerin kütle merkezleri ile, bu cisimlerin şekillerinin geometrik merkezlerinin aynı noktalar olacağını daha önce belirtmiştik. Öyleyse; şekillerin geometrik merkezlerini de, cisimlerin kütle merkezlerini bulduğumuz yöntemle bulabiliriz.

Şöyle ki;

I. Sınırlı sayıdaki noktaların oluşturduğu şekillerin geometrik merkezlerini bulmak için, bu noktalarda eşit kütleler var sayabiliriz.

II. Çizgilerden oluşmuş şekillerde kütleler yerine çizgi uzunluklarını koyarız.

III. Yüzeylerden oluşmuş şekillerde kütleler yerine yüzey alanlarını koyarız.

IV. Üç boyutlu şekillerde kütleler yerine hacımları koyarız.

Cisimlerin, kütlenin şekiller üzerine düzgün olarak dağıtılmasıyla oluşan nesneler olduğunu düşünürsek, I., II., III., ve IV. maddede yaptıklarımız daha iyi anlaşılır. Kütlenin şekiller üzerine düzgün dağılması durumunda; cisimlerin kütleleri bazı cisimlerde uzunluklarla, bazılarında alanlarla, bazılarında hacımlarla orantılı olacaktır.

Böylece; kütle merkezleri için bulduğumuz formüller aşağıdaki biçimlere dönüşür:

Bir şeklin geometrik merkezinin koordinatları $G(x_{gm}, y_{gm}, z_{gm})$ olsun.

Şekil n tane noktadan oluşmuşsa,

$$x_{gm} = \frac{\sum x_i}{n}\ ,\ y_{gm} = \frac{\sum y_i}{n},\ z_{gm} = \frac{\sum z_i}{n}$$ olur.

Şekil, yalnız l uzunluğuyla belirtilen bir şekil ise;

$$x_{gm} = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{\sum l_i},\quad y_{gm} = \frac{\sum l_i \cdot y_i}{\sum l_i},\quad z_{gm} = \frac{\sum l_i \cdot z_i}{\sum l_i}$$

olur.

Şekil, yalnız S alanı ile belirtilen bir şekil ise;

$$x_{gm} = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S_i},\quad y_{gm} = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S_i},\quad z_{gm} = \frac{\sum S_i \cdot z_i}{\sum S_i}$$

olur.

Şekil, üç boyutlu ise;

$$x_{gm} = \frac{\sum V_i \cdot x_i}{\sum V_i},\quad y_{gm} = \frac{\sum V_i \cdot y_i}{\sum V_i},\quad z_{gm} = \frac{\sum V_i \cdot z_i}{\sum V_i}$$

olur. Burada V hacımdır.

Bu sonsuz toplamların limitleri hesaplanırsa;

$$x_{km} = \frac{\int x \cdot dl}{l}\ ,\ y_{km} = \frac{\int y \cdot dl}{l},\ z_{km} = \frac{\int z \cdot dl}{l}\ ;$$

$$x_{km} = \frac{\int x \cdot dS}{S}\ ,\ y_{km} = \frac{\int y \cdot dS}{S},\ z_{km} = \frac{\int z \cdot dS}{S}$$

$$x_{km} = \frac{\int x \cdot dV}{V}\ ,\ y_{km} = \frac{\int y \cdot dV}{V},\ z_{km} = \frac{\int z \cdot dV}{V}$$

bulunur.

Örnek problem-3

$A(-3,1)$, $B(4,3)$, $C(2,-1)$ ve $D(5,5)$ noktalarından oluşan sistemin geometrik merkezini bulunuz.

Çözüm

$$x = \frac{-3+4+2+5}{4} = 2 \quad \text{ve} \quad y = \frac{1+3-1+5}{4} = 2$$

bulunur. Geometrik merkez G(2,2)'dir.

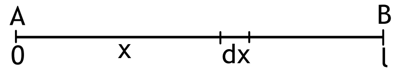
Örnek problem-4

Uzunluğu l olan bir doğru parçasının geometrik merkezinin, orta noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Doğru parçası [AB] olsun.

A ucunu sayı doğrusunun başlangıç noktasına B ucunu A'nın pozitif tarafına oturtursak A(0) ve B(l) olur.



$$x_{gm} = \frac{\int_0^l x \cdot dx}{\int_0^l dx} \quad \Rightarrow x_{gm} = \frac{\frac{1}{2}l^2}{l} = \frac{1}{2}l \text{ bulunur.}$$

Örnek problem-5

ABC üçgensel bölgesinin geometrik merkezinin, kenarortayların kesim noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Bu problem integralle çözülebilir.

Biz kısa yoldan gidelim:

ABC üçgeni, örneğin; [AB] kenarına paralel olan kalınlığı sıfıra yaklaşan şeritlerin birleşimi olarak düşünülebilir. Böyle şeritlerin geometrik merkezi orta noktaları olup bu noktaların birleşimi v_c kenarortayıdır. Öyleyse; şeklin geometrik merkezi v_c üzerinde olmalıdır. Aynı düşünce ile geometrik merkezin v_b üzerinde olduğu da söylenebilir. O halde; ABC üçgensel bölgesinin geometrik merkezi kenarortaylarının kesim noktasıdır.

Köşelerinin Koordinatları Verilen Bir Üçgensel Bölgenin Geometrik Merkezi

Köşelerinin koordinatları $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ve $C(x_3,y_3)$ olan ABC üçgeninde kenarortayların kesim noktasının, üçgensel bölgenin geometrik merkezi olduğunu yukarıda gösterdik. Buna göre;

ABC üçgensel bölgesinin geometrik merkezi $G(x_{gm},y_{gm})$ ise,

$$x_{gm} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y_{gm} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \quad \text{olur.}$$

Örnek problem-6

$A(1,5)$, $B(-1,1)$ ve $C(3,3)$ olduğuna göre;

a. ABC üçgeninin geometrik merkezini bulunuz.

b. ABC üçgensel bölgesinin geometrik merkezini bulunuz.

Çözüm

a. [AB] kenarının ortası D; [BC] kenarının ortası E ve [AC] kenarının ortası F olsun.

$D(x_1,y_1)=D(0,3)$, $E(x_2,y_2)=E(1,2)$ ve

$F(x_3,y_3)=F(2,4)$ olur.

$|AB|=2\sqrt{5}$, $|BC|=2\sqrt{5}$ ve $|AC|=2\sqrt{2}$ dir.

Bundan sonrası, noktasal kütlelerin kütle merkezini bulmaya benzer.

$$x_{gm} = \frac{|AB|\cdot x_1+|BC|\cdot x_2+|AC|\cdot x_3}{|AB|+|BC|+|AC|}$$

$$y_{gm} = \frac{|AB|\cdot y_1+|BC|\cdot y_2+|AC|\cdot y_3}{|AB|+|BC|+|AC|}$$

$$x_{gm} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}, \quad y_{gm} = \frac{5\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}} \quad \text{olur.}$$

Geometrik merkez,

$$G\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}, \frac{5\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right) \text{ noktasıdır.}$$

b. ABC üçgensel bölgesinin geometrik merkezi, üçgenin kenarortaylarının kesim noktasıdır.

$$x_{gm} = \frac{1-1+3}{3} = 1, \quad y_{gm} = \frac{5+1+3}{3} = 3 \text{ olur.}$$

Geometrik merkez, $G(1,3)$ noktasıdır.

Örnek problem-7

$A(-3,-1)$, $B(5,-1)$, $C(3,3)$ ve $D(1,3)$ olduğuna göre;

a. $\{A,B,C,D\}$ kümesinin geometrik merkezini bulunuz.

b. ABCD dörtgeninin geometrik merkezini bulunuz.

c. ABCD dörtgensel bölgesinin geometrik merkezini bulunuz.

Çözüm

a.

$$x_{gm} = \frac{-3+5+3+1}{4} = \frac{3}{2}, \quad y_{gm} = \frac{-1-1+2+2}{4} = \frac{1}{2}$$

olup geometrik merkez $G(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ noktasıdır.

b. [AB] kenarının ortası E, [BC] kenarının ortası F, [CD] kenarının ortası G, [AD] kenarının ortası H olsun.

$E(1,-1)$, $F(4,1)$, $G(2,3)$ ve $H(-1,1)$ olur.

$|AB|=8$, $|BC|=2\sqrt{5}$, $|CD|=2$ ve $|AD|=4\sqrt{2}$ dir.

$$x_{gm}=\frac{8\cdot1+2\sqrt{5}\cdot4+2\cdot2+4\sqrt{2}\cdot(-1)}{8+2\sqrt{5}+2+4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x_{gm}=\frac{12-4\sqrt{2}+8\sqrt{5}}{10+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}},$$

$$y_{gm}=\frac{8\cdot(-1)+2\sqrt{5}\cdot1+2\cdot3+4\sqrt{2}\cdot1}{8+2\sqrt{5}+2+4\sqrt{2}}$$

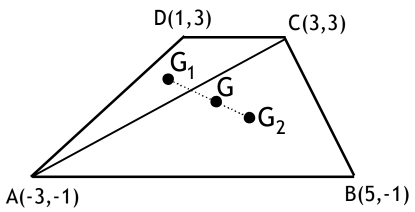
$$\Rightarrow y_{gm}=\frac{-2+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{10+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$$

olup geometrik merkez,

$$G\left(\frac{12-4\sqrt{2}+8\sqrt{5}}{8+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}},\frac{-2+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{8+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}}\right)$$ noktasıdır.

c. ABCD dörtgensel bölgesinin geometrik merkezini birkaç değişik yöntemle bulalım:

1.yol



ACD üçgensel bölgesinin geometrik merkezi G_1,
ABC üçgensel bölgesinin geometrik merkezi G_2,
ABCD dörtgensel bölgesinin geometrik merkezi G olsun.

$G_1(x_1,y_1)=G_1(\frac{1}{3},\frac{5}{3})$ ve $G_2(x_2,y_2)=G_2(\frac{5}{3},\frac{1}{3})$ olur.

$A(A\overset{\Delta}{C}D)=4$ ve $A(A\overset{\Delta}{B}C)=16$ dır. $G(x_{gm},y_{gm})$ ise,

$$x_{gm}=\frac{A(A\overset{\Delta}{C}D)\cdot x_1+A(A\overset{\Delta}{B}C)\cdot x_2}{A(A\overset{\Delta}{C}D)+A(A\overset{\Delta}{B}C)} \text{ ve}$$

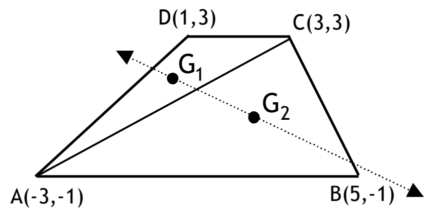
$$y_{gm}=\frac{A(A\overset{\Delta}{C}D)\cdot y_1+A(A\overset{\Delta}{B}C)\cdot y_2}{A(A\overset{\Delta}{C}D)+A(A\overset{\Delta}{B}C)} \text{ olduğundan}$$

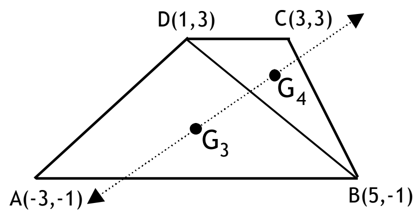
$$x_{gm}=\frac{4\cdot\frac{1}{3}+16\cdot\frac{5}{3}}{4+16}=\frac{7}{5} \text{ ve}$$

$$y_{gm}=\frac{4\cdot\frac{5}{3}+16\cdot\frac{1}{3}}{4+16}=\frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

ABCD dörtgensel bölgesinin geometrik merkezi $G(\frac{7}{5},\frac{3}{5})$ noktasıdır.

2.yol





ACD üçgensel bölgesinin geometrik merkezi G_1,
ABC üçgensel bölgesinin geometrik merkezi G_2,
ABD üçgensel bölgesinin geometrik merkezi G_3,
BCD üçgensel bölgesinin geometrik merkezi G_4 olsun.

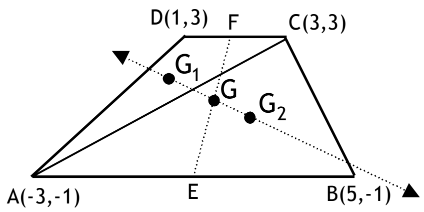
$G_1(\frac{1}{3},\frac{5}{3})$, $G_2(\frac{5}{3},\frac{1}{3})$, $G_3(1,\frac{1}{3})$, $G_4(3,\frac{5}{3})$ olur.

$G_1G_2:\ y=-x+2$ ve $G_3G_4:\ y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ bulunur.

ABCD dörtgensel bölgesinin geometrik merkezi, hem G_1G_2 hem de G_3G_4 üzerinde olacağından, bu doğruların kesim noktası olur.

$G_1G_2\cap G_3G_4=\left\{\left(\frac{7}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$ olup ABCD dörtgeninin geometrik merkezi, $G\left(\frac{7}{5},\frac{3}{5}\right)$ noktasıdır.

3.yol



[AB]'nin orta noktası $E(1,-1)$ ve [DC]'nin orta noktası $F(2,3)$ noktasıdır.

$AB//CD$ olduğundan, yamuksal bölgenin geometrik merkezi EF üzerinde olmalıdır. Diğer yandan; ACD ve ABC üçgensel bölgelerinin geometrik merkezleri G_1 ve G_2 olduğundan, yamuksal bölgenin geometrik merkezi G_1G_2 üzerinde de bulunmalıdır. Öyleyse; aradığımız geometrik merkez EF ile G_1G_2 doğrularının kesim noktası olmalıdır.

$G_1G_2:\ y=-x+2$, $EF:\ y=4x-5$ ve

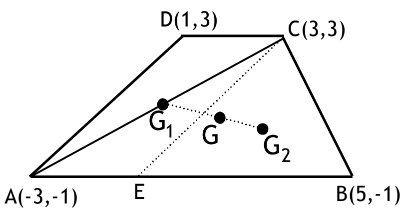
$G_1G_2 \cap EF=\left\{\left(\frac{7}{5},\frac{3}{5}\right)\right\}$ olup ABCD dörtgeninin

geometrik merkezi, $G\left(\frac{7}{5},\frac{3}{5}\right)$ noktasıdır.

4.yol

Bu yöntem de yamukta işimize yarar.

Yamuğu iki üçgene ya da dört üçgene değil de, bir paralelkenar ile bir üçgene ayıracağız.



$CE//AD$ çizelim. AECD paralelkenar ve $E(-1,-1)$ olur. AECD paralelkenarsal bölgesinin geometrik merkezi, [AC]'nin orta noktası olan $G_1(0,1)$; EBC üçgensel bölgesinin geometrik merkezi $G_2(\frac{7}{3},\frac{1}{3})$ noktasıdır.

$A(AECD)=8$ ve $A(EBC)=12$ dir.

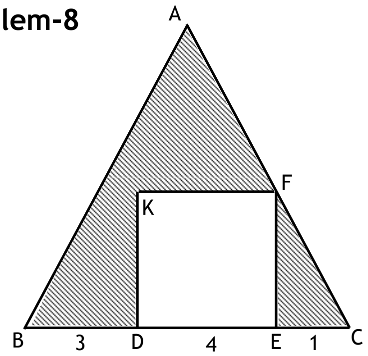
ABCD yamuksal bölgesinin geometrik merkezi $G(x_{gm},y_{gm})$ ise,

$$x_{gm}=\frac{8\cdot 0+12\cdot\frac{7}{3}}{4+16}=\frac{7}{5} \text{ ve}$$

$$y_{gm}=\frac{8\cdot 1+12\cdot\frac{1}{3}}{4+16}=\frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

ABCD yamuksal bölgesinin geometrik merkezi $G(\frac{7}{5},\frac{3}{5})$ noktasıdır.

Örnek problem-8



DEFK karesinin [DE] kenarı, ABC ikizkenar üçgeninin [BC] tabanı üzerindedir.

$|BD|=3$ br, $|DE|=4$ br, $|EC|=1$ br ve ABC üçgeninin tabana inen yüksekliği 12 birim olduğuna göre; taralı bölgenin geometrik merkezinin B köşesinden uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm

G, G_1 ve G_2 noktaları sırasıyla üçgensel bölgenin, karesel bölgenin ve taralı bölgenin geometrik merkezleridir. Bir koordinat sistemi üzerinde düşünerek, çözümü tamamlayınız.