Bir f fonksiyonunda, $f(x+T)=f(x)$

eşitliğini, x'in her değeri için sağlayan en küçük T pozitif reel sayısına f fonksiyonunun periyodu denir.

Bu T sayısının tam katlarına da periyod denilebilir.

Farkı belirtebilmek için, periyotların en küçüğüne **esas periyot** da denir. Ancak; özel olarak belirtilmediği durumlarda, "periyot" denildiğinde "esas periyot" anlaşılmalıdır.

Temel trigonometrik fonksiyonların peri-yotlarının nasıl bulunduğunu örneklerle gösterelim:

Öncelikle;

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ **fonksiyonları-nın periyotlarının** $2\cdot\pi$**;**

$h(x)=\tan x$, $k(x)=\cot x$ **fonksiyonları-nın periyotlarının** π **olduğu birim çemberden ya da bunların grafikle-rinden hemen görülebilir.**

Örnek Problem - 1

$f(x)=\sin x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

$f(x+T)=f(x)$

$\Rightarrow \sin(x+T)=\sin x$
$\Rightarrow \sin(x+T)=\sin(x+2\cdot\pi)$
$\Rightarrow T=2\cdot\pi$

Örnek Problem - 2

$f(x)=\cos 3x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

$f(x+T)=f(x)$

$\Rightarrow \cos[3(x+T)]=\cos(3x+2\cdot\pi)$
$\Rightarrow \cos(3x+3T)=\cos(3x+2\cdot\pi)$
$\Rightarrow 3T=2\cdot\pi$
$\Rightarrow T=\dfrac{2\pi}{3}$

Örnek Problem - 3

$f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ fonksiyonunun periyo-dunu bulunuz.

Çözüm

$f(x+T)=f(x)$

$\Rightarrow \tan\left[2(x+T)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}+\pi\right)$

$\Rightarrow \tan\left(2x+2T+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}+\pi\right)$

$\Rightarrow T=\dfrac{\pi}{2}$

Bu ilk örneklerdeki gibi davranıla-rak,

$f(x)=a+b\cdot\sin(mx+k)$ **ve**

$g(x)=a+b\cdot\cos(mx+k)$ **fonksiyonlarının periyotlarının** $T=\dfrac{2\cdot\pi}{m}$**;**

$h(x)=a+b\cdot\tan(mx+k)$ **ve**

$r(x)=a+b\cdot\cot(mx+k)$ **fonksiyonlarının periyotlarının** $T=\dfrac{\pi}{m}$ **olduğu bulunur.**

Örnek Problem - 4

$f(x) = 2\sin 4x - \cos 6x$ fonksiyonunun peri-yodunu bulunuz.

Çözüm

$g(x) = 2\sin 4x$'in periyodu $T_1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

$h(x) = \cos 6x$'in periyodu $T_2 = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

tür.

g fonksiyonunun grafiği, boyu $\frac{\pi}{2}$'nin katları olan aralıklarda;

h fonksiyonunun grafiği, boyu $\frac{\pi}{3}$'ün katları olan aralıklarda kendini tekrar edecektir.

Öyleyse; f fonksiyonunun kendini tekrar ettiği en dar aralığın boyu, yani f'nin periyodu T_1 ve T_2'nin EKOK'u olacaktır.

$$T = \text{EKOK}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \pi$$

Birinci dereceden temel trigonomet-rik fonksiyonların toplamları olarak verilen fonksiyonların periyotları, toplamı oluşturan terimlere karşılık gelen fonksiyonların, ayrı ayrı periyotlarının OKEK'idir.

Örnek Problem - 5

$f(x) = 2\sin^2 x + 3\cos^2 x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

Önce; verilen fonksiyonu 1. dereceden terimlerle ifade edelim.

$f(x) = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x$

$\Rightarrow f(x) = 2 + \cos^2 x$

$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 2x$

$\Rightarrow T = 2\cdot\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow T = \pi$ bulunur.

Temel trigonometrik fonksiyonların yüksek kuvvetlerinin periyotlarını bulmak için –bazı genellemeler önerilse de- en yanıltmayan yol, terimlerin derecelerini 1'e indirgemektir.

Bu önerimiz; kuralları toplam, çar-pım bölüm gibi her türlü işlemi içeren fonksiyonlar için de geçer-lidir.

Bu tür karmaşık kurallı fonksiyon-larda temel trigonometrik fonksi-yonların ayrı ayrı periyotlarının OKEK'i fonksiyonun bir periyodu olur. Ancak; bu periyot, esas periyot olmayabilir.

Bu uyarıları gözden uzak tutmamak koşuluyla şu genellemeler yapılabilir:

$f(x) = \sin^n(mx + k)$ **ve** $g(x) = \cos^n(mx + k)$ **fonksiyonlarının esas periyotları**

n tek ise $\frac{2\pi}{m}$, n çift ise $\frac{\pi}{m}$ dir.

$h(x) = \tan^n(mx + k)$ **ve** $r(x) = \cot^n(mx + k)$ **fonksiyonlarında n tek de olsa çift de olsa esas periyot $\frac{\pi}{m}$ olur.**

Örnek Problem - 6

$f(x) = 2 \cdot \cos 3x + 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$
fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

Ayrıntılara inmeden terim terim bakarsak,

$g(x) = 2\cos 3x$ 'in periyodu $T_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{3}$;

$h(x) = 3\sin x$ 'in periyodu $T_2 = 2 \cdot \pi$;

$r(x) = 4\sin^3 x$ 'in periyodu $T_3 = 2 \cdot \pi$

olduğundan bunların OKEK'ini bulup $T = 2 \cdot \pi$ diyebiliriz.

Ancak; biraz dikkat edersek, 2. ve 3. terimler toplamının, sin3x'in açınımı olduğunu görürüz.

$f(x) = 2 \cdot \cos 3x + 3 \cdot \sin x$ olup

$g(x) = 2\cos 3x$ 'in periyodu $T_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{3}$;

$t(x) = \sin 3x$ 'in periyodu $T_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{3}$

olduğundan

$T = 2 \cdot \frac{\pi}{3}$ bulunur.

Örnek Problem - 7

$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

Burada da genellemelere aldanırsak,

$g(x) = \sin^4 x$ 'in periyodu $T_1 = \pi$;

$h(x) = \cos^4 x$ 'in periyodu $T_2 = \pi$ olduğundan $T = \pi$ diyebiliriz.

Ancak; öyle olmadığını gösterelim:

$f(x) = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$\Rightarrow f(x) = 1 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x$ ve

$\sin^2 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$ olduğu hatırlanırsa,

$T = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

Örnek Problem - 8

$f(x) = \cos(\tan x)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

h, periyodik bir fonksiyon ise, $f(x) = (g \circ h)(x)$ fonksiyonu da periyodiktir ve h ile f fonksiyonlarının periyotları birbirine eşittir.

$g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ dersek,

$f(x) = \cos(\tan x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = (g \circ h)(x)$ olur.

$h(x) = \tan x$ fonksiyonunun periyodu π olduğundan, $f(x) = \cos(\tan x)$ fonksiyonu-nun periyodu da π'dir.

Bunu biraz açıklayalım:

$g(x)=\cos x$, $h(x)=\tan x$ olmak üzere, $f(x)=(g\circ h)(x)$ fonksiyonunda g'nin tanım kümesi ile h'nin değer kümesinin kesişimi, x değerlerinin

$$-1\le \tan x\le 1$$

koşulunu sağladığı aralıklardır.

f fonksiyonu, x'in bu koşula uyduğu aralıklarda tanımlıdır.

Bu aralıklar da; $k\in Z$ olmak üzere,

$$\left[k\cdot 2\pi-\frac{\pi}{4},k\cdot 2\pi+\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[k\cdot 2\pi+\frac{3\pi}{4},k\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{4}\right]$$

biçiminde gösterilebilir.

Bu kümede k'ya değerler verilerek, f fonksiyonunun tanımlı olduğu periyodik aralıklar bulunur.

f fonksiyonu, boyu $2\cdot\pi$ olan, örneğin; $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$ aralığının $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ kıs-mında tanımlı, bunun dışındaki kısımla-rında tanımsızdır.

$h(x)=\tan x$ fonksiyonunun değer kümesi $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ ve $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ alt aralıklarında aynı olur. Buna göre; f fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ aralığının $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ kısmında aldığı değer-leri, $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$ aralığının $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ kısmın-da tekrar edecektir.

Örnek Problem - 9

$f(x)=\dfrac{\sin 9x}{\cos 3x}$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

Trigonometrik fonksiyonların periyotları-nı bulmak için; fonksiyon, olabildiğince temel trigonometrik fonksiyonların toplamı biçimine getirilmelidir.

$$f(x)=\frac{\sin 9x}{\cos 3x}=\frac{\left(3\sin 3x-4\sin^3 3x\right)}{\cos 3x}$$

$$f(x)=3\tan 3x-4\sin^2 3x\cdot\tan 3x$$
$$f(x)=3\tan 3x-4\left(1-\cos^2 3x\right)\cdot\tan 3x$$
$$f(x)=3\tan 3x-4\tan 3x+4\sin 3x\cdot\cos 3x$$
$$f(x)=-\tan 3x+2\sin 6x$$

$T=\text{OKEK}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$ olur.

Örnek Problem -10

$$f(x)=\cos 3x+\frac{\sin x}{1+\sin 2x}$$

fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

Burada ikinci terim sorun yaratıyor.

$y=g(x)$'in periyodu T ise

$y=h(x)=\dfrac{1}{g(x)}$'in periyodu da T'dir.

Buna göre; şöyle yapabiliriz:

$\dfrac{\sin x}{(1+\sin 2x)}$ in çarpımsal tersi $\dfrac{1}{\sin x}+2\cos x$ olur.

$y = \sin x$ 'in periyodu 2π,

$y = \dfrac{1}{\sin x}$ in periyodu 2π,

$y = \cos x$ 'in periyodu 2π olduğundan

$y = \dfrac{1}{\sin x} + 2\cos x$ periyodu 2π olup

$y = \dfrac{\sin x}{(1+\sin 2x)}$ fonksiyonunun periyodu $T_2 = 2\pi$ olur.

$y = \cos 3x$ fonksiyonunun periyodu $T_1 = \dfrac{\pi}{3}$ olduğundan f fonksiyonunun periyodu $T = 2\pi$ olur.

Örnek Problem -11

Reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu, her x reel sayısı için,

$$f\left(\frac{2x+3}{3}\right) = f\left(\frac{2x+12}{3}\right) = f\left(\frac{2x+15}{3}\right)$$

eşitliğini sağlamaktadır.

Buna göre; f fonksiyonunun esas periyodu en çok kaçtır?

Çözüm

$$f\left(\frac{2x+3}{3}\right) = f\left(\frac{2x+12}{3}\right) = f\left(\frac{2x+15}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2x}{3}+1\right) = f\left(\frac{2x}{3}+4\right) = f\left(\frac{2x}{3}+5\right)$$

$\dfrac{2x}{3} + 1 = t$ diyelim.

$f(t) = f(t+3) = f(t+4)$ olur. (1)

(1) sistemindeki $f(t+3) = f(t+4)$ eşitliği, f fonksiyonunun esas periyodunun en çok 1 olduğunu gösterir.

Yalnız verilen bilgiye dayanılarak f'nin esas periyodunun 1 olduğu söylenemez.

Örneğin;

$f(x) = \sin(2\pi x)$ fonksiyonu verilen eşitliği sağlar ve periyodu 1'dir.

$f(x) = \sin(4\pi x)$ fonksiyonu da verilen eşitliği sağlar. Ancak; bunun periyodu $\dfrac{1}{2}$'dir.

Örnek Problem -12

a. $y = f(x)$ fonksiyonunun periyodu T ise, $y = f(mx+n)$ fonksiyonunun periyodunun $\dfrac{T}{m}$ olduğunu gösteriniz.

b. $y = f\left(\dfrac{3x+4}{5}\right)$ fonksiyonunun periyodu T olduğuna göre; $y = f\left(\dfrac{5x+3}{4}\right)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

a. $g(x) = f(mx+n)$ fonksiyonunun periyodu T' olsun.

$g(x+T') = g(x)$

$\Rightarrow g(x+T') = f[m(x+T')+n] = f(mx+n)$

$\Rightarrow f(mx+n+mT') = f(mx+n)$ olur.

$mx + n = t$ diyelim.

$f(t+mT') = f(t)$ olur.

f fonksiyonunun periyodu T olarak verildiğinden,

$mT' = T$ olup

$T' = \frac{T}{m}$ bulunur.

b. $y = f\left(\frac{3x+4}{5}\right) = f\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\right)$ fonksiyonunun periyodu T ise, $y = f(x)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{3T}{5}$ ve $y = f\left(\frac{5x+3}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}\right)$ fonksiyonunun periyodu da

$\frac{\frac{3T}{5}}{\frac{5}{4}} = \frac{12T}{25}$ olur.