Aşağıda, önce "oran ve orantı"nın açıklamalı tanımlarını, daha sonra 0/0 oranının işlevselliği ile ilgili örnekleri, en sonunda da 0/0 oranına yapılan eleştirilere cevaplarımı bulacaksınız.

Oran ve Orantının Tanımı

*RxR'nin her (a,b) ikilisine bir **oran** denir.*

$(\mathbf{a},\mathbf{b})$ oranı (a,b), $(a:b)$ veya $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilir; **a oran b** veya **a'nın b'ye oranı** diye okunur.

Örneğin; $\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{7}, \frac{0}{\sqrt{3}}, \frac{6}{0}, \frac{0}{0}, \ldots$ birer orandır.

$b \neq 0$ iken $\frac{a}{b}$ oranına, a'nın b'ye bölümü de denilebilir. Bu durumda $\frac{a}{b} = k \in R$ sayısına $\frac{a}{b}$ oranının **değeri** denir. Ancak; $\frac{2}{0}$ ve $\frac{0}{0}$ gibi oranlar bir bölüm olarak düşünülemez. Böyle oranların değerleri ya tanımsız ya da belirsizdir.

Bugüne değin " $\frac{a}{b}$ "sembolüne, sadece "a'nın b'ye bölümü" ya da yine bir bölümle ifade edilebilen "kesir" anlamlarını yüklüyordunuz. Artık bu sembol (a,b) ve $(a:b)$ sembolleri ile birlikte **a'nın b'ye oranı**nı da gösterecektir.

Şöyle söyleyelim:

Her $\frac{a}{b}$ kesri bir orandır; ancak, her oran bir kesir değildir.

Örneğin; $\frac{a}{0}$ ve $\frac{0}{0}$ oranları birer kesir değildir.

*RxR'de, $\beta = \{((a,b),(c,d)) \mid a \cdot d = b \cdot c\}$ bağıntısının elemanı olan her $((a,b),(c,d))$ ikilisine bir **orantı** denir.*

$((a,b),(c,d)) \in \beta$ ise $(a,b) = (c,d)$ ya da $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ olarak nitelendirilir. Nasıl ki $\frac{a}{b}$ bir bölüm değilse, buradaki eşitlik de iki reel sayının eşitliği anlamında değildir. " $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dir; çünkü $a \cdot d = b \cdot c$ dir." anlamındadır.

$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ tir çünkü $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$ dır.

$\frac{0}{3} = \frac{0}{5}$ tir çünkü $0 \cdot 5 = 3 \cdot 0$ dır.

$\frac{2}{0} = \frac{7}{0}$ dır çünkü $2 \cdot 0 = 0 \cdot 7$ dir.

$\frac{5}{9} = \frac{0}{0}$ dır çünkü $5 \cdot 0 = 9 \cdot 0$ dır.

"Eşit" terimi yerine başka bir terim de kullanılabilirdi. Ancak; $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ oranları reel değerli olduğunda $a \cdot d = b \cdot c$ eşitliğinden $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği elde edilebilmektedir. Reel değerli oranlar için yazabildiğimiz bu oran eşitliğini, reel değerli olmayan, ancak $a \cdot d = b \cdot c$ eşitliğini sağlayan diğer oranlar için de kullanmakta hiçbir mahzur yoktur.

Bir de şöyle açıklayalım:

RxR-{(0,0)} kümesinde, $\beta = \{((a,b),(c,d)) \mid a \cdot d = b \cdot c\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Β'nın bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir.

$((a,b),(c,d)) \in \beta$ ise, $b \cdot d \neq 0$ olmak üzere;

$a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dir.

İkili gösterimi ile; $b \cdot d \neq 0$ için $a \cdot d = b \cdot c$ ise $(a,b) = (c,d)$ yazılabilir. Β'nın denklik sınıflarının bir kısmı için yazabildiğimiz bu eşitliği, aynı denklik sınıfındaki $(a,0)$ ve $(b,0)$ ikilileri için de yazabiliriz. Böyle yaptığımızda, artık "eşitlik" terimine yeni bir anlam yüklemiş oluruz. Bu artık reel sayıların eşitliği anlamında bir eşitlik değildir. Yukarıda da belirttiğimiz gibi bu "iki oranın eşitliği"dir.

Burada $(0,0)$ ikilisini dışarıda tutmuş olmamız, $(0,0)$ ikilisinin bir oran olmadığı ya da orantı oluşturabilen bir ikili olmadığı biçiminde yorumlanmamalıdır. Bu ikiliyi bir denklik sınıfına koyamayacağımız ya da her denklik sınıfına koyabileceğimiz gibi bir sorunla karşılaşabileceğimiz için dışarıda tuttuk. Buna benzer bir yaklaşımı matematikçiler, "$0+0\cdot i$" karmaşık sayısında ve "$\overrightarrow{AA}$ ya da $\vec{0}$" vektöründe de gösterirler.

Reel değerli oranlar arasında var olan bildiğiniz "eşitlik" kavramını reel değerli olmayan $(a,0)$ türünden ikililer için de geçerli kılarak genişlettik Bunu $(0,0)$ ikilisini de kapsayacak biçimde genişletirsek, orantı tanımında belirtilen eşitlik kavramını elde etmiş oluruz.

Her $\frac{a}{b}$ oranı için $a\cdot 0 = b.0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{0}{0}$ yazabilmemiz "$\frac{0}{0}$ oranının belirli bir değerinin olmadığını" ya da "$\frac{0}{0}$ oranının değerinin belirsiz olduğunu" gösterir. Bu yüzden; değeri belirsiz olan bu oran geçişme elemanı olarak kullanılamaz. Örneğin; $\frac{2}{3}=\frac{0}{0}$ ve $\frac{0}{0}=\frac{3}{5}$ iken $\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$ diyemeyiz.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ve $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ iken $\frac{c}{d}\neq\frac{0}{0}$ koşulu ile $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$ diyebiliriz.

$\frac{0}{0}$ oranına getireceğimiz tek kısıtlama budur. Orantının aşağıda vereceğimiz özelliklerini uygularken terimlerinden herhangi birinin sıfır olması hiçbir sorun yaratmayacak, hiçbir ek kural gerektirmeyecektir.

Orantının Özellikleri

I. $(a,b)=(ka,kb)$ *orantısına göre; her* (a,b) *oranı her* $k\in R$ *sayısı ile genişletildiğinde,* (a,b) *oranına eşit olan oranlar elde edilir.*

Örnek

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ oranını $-2,\ 0,\ 3$ sayıları ile genişletelim:

$\underset{(-2)}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{-2\sqrt{2}}{-6}$; $\underset{(0)}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{0}{0}$; $\underset{(3)}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{9}$ elde edilir.

II. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *orantısında a, b, c, d sayılarına sırasıyla; orantının **I. terimi**, **II. terimi**, **III. terimi**, **IV. terimi** denir.*

I. ve IV. terimlere ***dışlar (yanlar)****;*
II. ve III. Terimlere ***içler (ortalar)***
adı verilir.

(Yanlar)
Dışlar
$a : b = c : d$
İçler
(Ortalar)

Tanım gereği, dışların çarpımı içlerin çarpımına eşittir.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

$a : a_1 : a_2 : \ldots = b : b_1 : b_2 : \ldots$ *eşitliği*

$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots$ *anlamına gelir.*

Örnek

$2 : x : 0 : y = 4 : 5 : z : 6$ olduğuna göre x, y ve z sayılarını bulalım:

Verilen orantı $\frac{2}{4}=\frac{x}{5}=\frac{0}{z}=\frac{y}{6}$ dır.

$\frac{2}{4}=\frac{x}{5}\Rightarrow 2\cdot 5=4\cdot x\Rightarrow x=\frac{5}{2}$;

$\frac{2}{4}=\frac{0}{z}\Rightarrow 2\cdot z=4\cdot 0\Rightarrow z=0$ olur.

y değeri $\frac{0}{0}=\frac{y}{6}$ orantısından değil, $\frac{2}{4}=\frac{y}{6}$ orantısından bulunmalıdır. (Neden?)

$\frac{2}{4}=\frac{y}{6}\Rightarrow y=3$ bulunur.

III. *Bir orantıda içler kendi aralarında, dışlar kendi aralarında yer değiştirebilir.*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\wedge\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\wedge\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\ \textit{dir.}$$

Örnek

a. $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ orantısına dayanarak

$\frac{10}{5}=\frac{6}{3}$, $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$, $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$ yazılır.

b. $\frac{0}{3}=\frac{0}{4}$ orantısına dayanarak

$\frac{4}{3}=\frac{0}{0}$, $\frac{3}{0}=\frac{4}{0}$, $\frac{3}{4}=\frac{0}{0}$ yazılır.

Örnek

a. R'de $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2x-2}$ denklemini çözünüz.

b. $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2x-2}$ bir orantı olduğuna göre, x'in alabileceği değerlerin kümesini yazınız.

Çözüm

a. Eşitliğin iki yanını $2(x-1)$ ile çarpalım: $(x\neq 1)$

$\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2(x-1)}$

$\Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$ bulunur.

$x=1$ değeri kesrin paydasını sıfır yapar.

$\frac{1}{0}\notin R$ olduğundan $Ç=\varnothing$ dir.

b. $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2x-2} \Rightarrow x\cdot 2(x-1)=2(x-1)$

$\Rightarrow 2x(x-1)-2(x-1)=0$

$\Rightarrow 2(x-1)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=1$ bulunur.

$x=1$ değeri için eşitlik bir orantıdır.

$x\in\{1\}$ $\left(\frac{1}{0}=\frac{2}{0}\right)$

Oranlar kümesinin gerçek sayılar kümesini kapsadığını söyleyebilir miyiz?

IV. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *bir orantı olmak üzere,*

$\mathbf{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}}=\frac{a-c}{b-d}$ *dir.*

V. $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ *ve* $k,k_1,k_2\in R$ *olmak üzere;*

$\mathbf{\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{ka+k_1a_1+k_2a_2}{kb+k_1b_1+k_2b_2}}$ *dir.*

VI. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *bir orantı olmak üzere,*

1. $\mathbf{\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}}$ *dir.*

2. $\mathbf{\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}}$ *dir.*

3. $\mathbf{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$ *dir.*

4. $\mathbf{\frac{xa+y\cdot b}{za+tb}=\frac{xc+yd}{zc+td}}$ *dir.*

Örnek

R'de $\frac{x+2}{2x}=\frac{x^2+2x-5}{x^2+4x-9}$ denklemini, orantının özeliklerinden yararlanarak çözünüz.

Çözüm

$\frac{x+2}{2x}=\frac{x^2+2x-5}{x^2+4x-9}$

$\Rightarrow \frac{x+2-(2x)}{2x}=\frac{x^2+2x-5-\left(x^2+4x-9\right)}{x^2+4x-9}$

$\Rightarrow \frac{\overbrace{2-x}^{①}}{\underbrace{2x}_{②}}=\frac{\overbrace{-2x+4}^{③}}{\underbrace{x^2+4x-9}_{④}}=\frac{\overbrace{0}^{-2\cdot①+③}}{\underbrace{x^2-9}_{-2\cdot②+④}}$ olur.

$\frac{2-x}{2x}=\frac{0}{x^2-9}$ orantısı, $2-x=0$ veya $x^2-9=0$ eşitliklerini gerektirir.

Buna göre; $x=2$ veya $x=\mp 3$ olmalıdır. Bu x değerleri, verilen denklemdeki kesirleri gerçek sayı yaptığından $Ç=\{-3,2,3\}$ olur.

0/0 Oranının İşlevselliğine Örnekler

0/0 oranının kaçınılmazlığı başlığı altında bazı örnekler verilmişti. Yukarıdaki kısımda da birkaç örnek verildi. Biraz daha verelim.

1.

R'de $\dfrac{2}{x^2-x+2}=\dfrac{3}{x^2-x+4}$ denklemini çözelim:

Bu denklem içlerin çarpımı ile dışların çarpımı eşitlenerek kolayca çözülür.

Biz şöyle yapalım:

Her oran bir kesir değildir ama; her kesir bir orandır. Öyleyse; bu eşitliği bir orantı gibi düşünebiliriz.

Payları -2 ile çarpıp paydalara eklediğimizde yine bir orantı elde edilir.

$$\frac{2}{x^2-x+2+(-4)}=\frac{3}{x^2-x+4+(-6)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2-x-2}=\frac{3}{x^2-x-2}$$

Bu son orantı, ancak $x^2-x-2=0$ iken sağlanır.

$x^2-x-2=0 \;\Rightarrow\; x_1=-1,\;\; x_2=2$ olur.

Orantıyı sağlayan bu değerler R'deki denklemi de sağlıyorsa denklemin kökleridir.

Gerçekten, $Ç=\{-1,2\}$ bulunur.

2.

R'de $\dfrac{x^2-x-1}{2x^2+x}=\dfrac{2x^2-1}{x^2-2x-2}$ denklemini çözelim:

Orantı özellikleri kullanılmazsa, bu denklemin çözümü oldukça yorucu olacaktır.

$\mathbf{\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}}$ özelliğini kullanalım:

$$\frac{x^2-x-1}{2x^2+x}=\frac{2x^2-1}{x^2-2x-2}=\frac{3x^2-x-2}{3x^2-x-2}=\frac{1}{1}$$

Bu orantı ya $3x^2-x-2=0$ (1) iken,

ya da $\dfrac{2x^2-1}{x^2-2x-2}=\dfrac{1}{1}$ (2) iken sağlanır.

(1) den $x_1=1,\;\; x_2=-\dfrac{2}{3}$;

(2) den $x_1=x_2=-1$ bulunur.

Bu değerler denklemi sağlar. $Ç=\left\{-1,-\dfrac{2}{3},1\right\}$ olur.

3. R'de $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^2+1}=\dfrac{x^2-6x-21}{-9x-17}$ denklemini çözelim:

$\mathbf{\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a-c}{b-d}}$ özelliğini kullanalım:

$$\frac{2x^2+3x-3}{x^2+1}=\frac{x^2-6x-21}{-9x-17}=\frac{x^2+9x+18}{x^2+9x+18}=\frac{1}{1}$$

Bu orantı ya $x^2+9x+18=0$ (1) iken,

ya da $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^2+1}=\dfrac{1}{1}$ (2) iken sağlanır.

(1) den $x_1=-3,\;\; x_2=-6$;

(2) den $x_3=1,\;\; x_4=-4$ bulunur.

Bu değerler denklemi sağlar.

$Ç=\{-6,-4,-3,1\}$ olur.

Bu ilk sorulardaki amacım, orantı yardımıyla bir çözüm yolu önermek değil, $\dfrac{a}{0}=\dfrac{b}{0}$ ve $\dfrac{a}{b}=\dfrac{0}{0}$ biçimindeki orantıların hiç sorunsuz değerlendirildiğini göstermektir.

4. $\dfrac{2a+3b}{a+2b}=\dfrac{a+5b}{4b}$ orantısı verildiğinde $\dfrac{a}{b}$ oranını bulalım:

$\mathbf{\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a-c}{b-d}}$ dir.

$\dfrac{2a+3b}{a+2b}=\dfrac{a+5b}{4b}=\dfrac{a-2b}{a-2b}=\dfrac{1}{1}$ olur.

Bu orantı ya $a-2b=0$ (1) iken,

ya da $\dfrac{a+5b}{4b}=\dfrac{1}{1}$ (2) iken sağlanır.

(1) den $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{1}$;

(2) den $\dfrac{a}{b}=\dfrac{-1}{1}$ bulunur.

5. $d: \frac{x-1}{k} = \frac{y+2}{k-2} = \frac{z+1}{3}$ doğrusu $\vec{v} = (2, p, k+1)$ vektörü doğrultusunda olduğuna göre, k ve p değerlerini bulalım:

$(k, k-2, 3)$ vektörü ile $\vec{v} = (2, p, k+1)$ vektörü aynı doğrultuda olduklarından, karşılıklı koodinatları orantılıdır.

$\frac{k}{2} = \frac{k-2}{p} = \frac{3}{k+1} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{3}{k+1} \Rightarrow k = 2$ ve k=-3 olur.

k=2 için $\frac{2}{2} = \frac{0}{p}$ olur.

Bu orantı yalnız $p = 0$ için sağlanır.

k=-3 için $\frac{-3}{2} = \frac{-5}{p} \Rightarrow p = \frac{10}{3}$ bulunur.

Görüldüğü gibi; $\frac{0}{0}$ ı bir oran olarak aldığımızda işlemler kolayca yürütülebiliyor.

6. $\overrightarrow{v_1} = (a-b, a, 4)$ ve $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, b)$ vektörleri doğrusal bağımlı olduğuna göre, a ve b değerlerini bulalım:

Bunlar, $\frac{a-b}{0} = \frac{a}{1} = \frac{4}{b}$ orantısını sağlayacak değerlerdir.

Orantıdan $a - b = 0$ ve $a \cdot b = 1 \cdot 4$ yazılır.

$(a, b) = (2, 2)$ veya $(a, b) = (-2, -2)$ bulunur.

Böyle örnekleri istediğimiz kadar çoğaltabileceğimiz açıktır.

Aslında; bir matematiksel kavramın "Bakın ben işleri nasıl kolaylaştırıyorum." diye kendini sevimli göstermeye çalışmasına hiç gerek yoktu. Ben, siz arkadaşlarıma yararlı olacağını bildiğim için, 0/0 ın bu güzelliklerini gözünüze sokmak istedim.

0/0 Oranına Eleştirilere Cevaplarım

I. "Yokun yoka oranı bana anlamlı gelmiyor."

Yokun 3'e oranı anlamlı geliyor. Biraz ikna ile 3'ün yoka oranı da anlamlı geliyor. Ama yokun yoka oranı anlamlı gelmiyor. ???

Matematiksel kavramlar doğadan soyutlanırlar. İlk soyutlamalardan elde edilen kavramlar, kendi dinamikleriyle yeni kavramlara kaynaklık ederler. Başlarda soyutlanan kavramları doğada modellendirmek kolay olabilir. Ancak, soyutlamanın üst basamaklarındaki kavramları doğada kolayca modellendiremeyebiliriz.

Ali'nin parasını Veli'nin parasına oranlarken 0/0 oranına bir anlam vermekte zorlanabiliriz. Ama bu kavram, yüksek dereceden bir denklemi çözmede somut bir yarar sağlayabilir.

Her kavramı ortalama bir ilköğretim öğrencisinin algılama düzeyine indirmek, o kavramın hiçbir zaman algılanamaması sonucunu doğurur.

Kavramları aşağı çekerek değil, öğrencinin algılama düzeyini yükselterek, kavramlarla öğrenciyi buluşturmalıyız.

II. Bir kısım matematikçiler bilimsel gerekçelerle 0/0 oranına karşı çıkarlar:

"RXR-{(0,0)} kümesinde,

$\beta = \{((a,b),(c,d)) \mid a \cdot d = b \cdot c\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre aynı denklik sınıfındaki oranlar birbirine eşit diye nitelenir. (0,0) ikilisini bu kümeye alsaydık bir denklik sınıfına koyamayacaktık. Bu ayrı bir denklik sınıfı oluşturur deseydik, bu sefer de her orana eşit olabilmesi nedeniyle, her denklik sınıfına sokmamız gerekecekti."

Oranların eşitliği kavramına, tanımlar kısmında değinmiştik. Bu, yalnız reel değerli oranlarda, bildiğiniz eşitlik kavramı ile örtüşür. Biz reel değerli oranlardaki eşitlik kavramını, sırf orantı tanımına göre aynı denklik sınıfına girdikleri için, aslında değerleri reel sayı anlamında tanımsız olan oranları da eşit sayarak genişlettik.

$2/0 = 3/0$ eşitliği asla bildiğimiz anlamda bir eşitlik değildir. Bunlar reel değerleri tanımsız olan oranlardır. Biz bunları, oran anlamında bir biçimde "eşit" sayarız. (0,0) ikilisinin, eşitliğin tanımlandığı bu bağıntıda bulunmaması doğaldır. Çünkü bu oranın değeri belirsizdir. Bu "belirsiz" terimi de değişik anlamlarda algılanıyor. Biz bu terimi burada "her orana eşit sayılabilir. Belirli bir değeri yoktur." anlamında kullanıyoruz.

Başlangıçtaki tanıma göre söylersek;

$(a, b) = (0; 0)$ dır. Çünkü $a \cdot 0 = b \cdot 0$ dır.

Şunu demek istiyorum: (0,0) ikilisinin bir oran sayılması için, bunun yukarıda tanımladığımız denklik bağıntısının ikililerinin bir elemanı olması gerekmez.

III. Sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesinde,

$$\beta = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \text{ ve } z_2 \text{'nin argümentleri eşittir.}\}$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $0+0\cdot i$ sayısının argümentini ister yok -yani tanımsız- sayalım ister belirsiz sayalım; bu sayı bu bağıntının denklik sınıflarından birine girmez. Biz yine de, $0+0\cdot i$ sayısını karmaşık sayı olarak kabul ederiz.

Matematikçiler, bir matematik sistem oluşturabilmek için $0+0\cdot i$ sayısını kümeye almanın zorunlu olduğunu söylerler. Çünkü bu sayı toplama işleminin birim elemanıdır.

Yani; çeşitli gerekçelerle denklik sınıflarında bulunmayan bir elemanı kümenin elemanı olarak alabiliyoruz. Neden (0,0) da böyle olmasın.

IV. Sıfırdan farklı vektörler kümesinde,

$$\beta = \{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \mid \overrightarrow{v_1} \text{ ve } \overrightarrow{v_2} \text{ aynı doğrultuludur.}\}$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre aynı denklik sınıfında bulunan vektörlerin konum vektörleri orijinden geçen aynı bir doğru üzerinde bulunurlar. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ vektörü de bu doğruların her birinin üzerindedir. Bu vektörün doğrultusunu ister yok -yani tanımsız- sayalım ister belirsiz sayalım; bu vektör bu bağıntının denklik sınıflarından birine girmez. Biz yine de, birim eleman olduğu gerekçesiyle $\vec{0}$ vektörünü vektörler kümesine alırız.

IV. Biraz da "belirsizlik" terimi üzerinde duralım.

$f : A \to B,\ y=f(x);\quad A \subset R,\ B \subset R$

biçiminde tanımlanmış bir fonksiyonda x yerine bir a değeri konulduğunda fonksiyonun kuralını veren kesrin payı da sıfır, paydası da sıfır oluyorsa; bu a değeri fonksiyonun tanım kümesinde bulunamaz demektir. Öyleyse burada rastlanan 0/0 durumu bir belirsizlik değil bir tanımsızlıktır. Bu belirlemeden sonra $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ bulunuyorsa, bu ℓ değerinin 0/0 ile bir ilgisi yoktur.

V. $f : A \to B,\ y=f(x);\quad A \subset R,\ B \subset R$

biçiminde tanımlanmış bir f fonksiyonunda x bağımsız değişkeni Δx kadar değiştiğinde $y = f(x)$ değeri Δy kadar değişmiş olsun. Bu değerlerin oranı söz konusu olduğunda, doğal olarak oran kavramı gündemimize girer.

Bu değişimlerin oranı $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ olsun. $\Delta x = 0$ iken $\Delta y = 0$ olacağından, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ oranı da $\dfrac{0}{0}$ belirsiz oranına dönüşür. Burada $\lim\limits_{\Delta x\to a} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$ değeri bu belirsiz oranın gizlediği gerçek değerdir.