$\frac{0}{0}$ Oranının Tanımlanmasının Kaçınılmazlığına Örnekler

Muharrem Şahin

RXR kümesinin her (a,b) ikilisi bir orandır. Yanlış anlamalar, genellikle, (a,b) oranının $\frac{a}{b}$ gibi, a'nın b'ye bölümü olarak algılanabilecek bir biçimde gösterilmesinden kaynaklanır. Halbuki oran, bölümden farklı bir kavramdır. Ancak bir kısım **oranların değerleri** bir **bölüm** ile ifade edilebilir.
Oranın tanımı konusu, tam bir didiklenmeyi gerektirmektedir. Matematikçiler geçerli bir tanımda birleşmelidir. Şu anda bir kısım arkadaşlarımın kabul ettiği tanım, açıklanması zor durumları gündeme getirmektedir. Örnekler vereyim:

I. Ali'nin parası yoksa, Bilge'nin 5 lirası varsa Ali'nin parasının Bilge'nin parasına oranı (0,5) ikilisi, yani $\frac{0}{5}$ tir. Bu durumda; "Bilge'nin parasının Ali'nin parasına oranı nedir?" denildiğinde "Yok; o tanımsızdır." mı diyeceğiz. O da (5,0) ikilisi, yani $\frac{5}{0}$ olmaz mı?
Şunu söylemek istiyorum: Bir oranda 1. terimi sıfır olarak alırsanız; 2. terim de kaçınılmaz olarak sıfır olabilir.

II. Bir orantıda içler kendi aralarında dışlar kendi aralarında yer değiştirebilir.
$\frac{0}{3}=\frac{0}{5}$ orantısına bu kuralı uygularsak $\frac{0}{0}=\frac{3}{5}$ ve $\frac{5}{0}=\frac{3}{0}$ orantılarını elde ederiz.
Burada "Yok; bu olmadı. Terimlerden bazıları sıfır olunca bu kuralı uygulayamayız." deyip terimlerin değerlerine göre değişik kurallar mı koyacağız.

III. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ orantısına dayanarak, $\forall k\in R$ için $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+kc}{b+kd}$ orantısı yazılabilir.
$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ orantısından elde edeceğimiz $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{2+k}{4+2k}$ orantısında $k=-2$ için $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{0}{0}$ olmaz mı?
Yine; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$ değil midir? Buna dayanarak; $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=\frac{2-2}{3-3}=\frac{0}{0}$ yazılmaz mı?

IV. $A(2,-1,0)$ noktasından geçen, $\vec{d}=(0,1,-1)$ doğrultusundaki ℓ doğrusunun denklemi şu düşünceye dayanılarak yazılır:
ℓ doğrusuna ait, değişen bir nokta $P(x,y,z)$ ise $\overrightarrow{AP}$ ve $\vec{d}$ vektörleri doğrusal bağımlı olup karşılıklı koordinatları orantılıdır. $\overrightarrow{AP}=(x-2,y+1,z)$ ve $\vec{d}=(0,1,-1)$ olduğundan ℓ doğrusunun denklemi

$$\ell:\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$$

orantısı olarak yazılır. Örneğin; $B(2,1,-2)$ noktası ℓ doğrusunun üzerinde olduğundan bu denklemi sağlar.
$\frac{0}{0}=\frac{2}{1}=\frac{-2}{-1}$ olur. Verilen oran eşitliği, ancak $x-2=0$ için doğru olur.
Doğru ve düzlem denklemlerinde karşılaşılabilecek, paydanın sıfır olduğu böyle durumlar, tamamen orantının özelliklerine dayanılarak kolayca açıklanabilir.

Biraz da $\frac{0}{0}$ oranının sağladığı kolaylıklardan söz edelim:

I. R'de $\frac{x+2}{2x}=\frac{x^2+2x-5}{x^2+4x-9}$ denklemini, orantının özeliklerinden yararlanarak çözelim:

$$\frac{x+2}{2x}=\frac{x^2+2x-5}{x^2+4x-9} \quad\Rightarrow\frac{x+2-(2x)}{2x}=\frac{x^2+2x-5-\left(x^2+4x-9\right)}{x^2+4x-9}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overbrace{2-x}^{①}}_{} \over \underbrace{2x}_{②}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{2-x}^{①}}{\underbrace{2x}_{②}} = \frac{\overbrace{-2x+4}^{③}}{\underbrace{x^2+4x-9}_{④}} = \frac{\overbrace{0}^{-2\cdot ①+③}}{\underbrace{x^2-9}_{-2\cdot ②+④}} \quad \text{olur.}$$

$\frac{2-x}{2x} = \frac{0}{x^2-9}$ orantısı, $2-x=0$ veya $x^2-9=0$ eşitliklerini gerektirir.

Buna göre; $x=2$ veya $x=\mp 3$ olmalıdır. Bu x değerleri, verilen denklemdeki kesirleri gerçek sayı yaptığından $Ç=\{-3,2,3\}$ olur.

Burada dikkat ediniz!

Orantının özelliklerinden yararlanırken, oranları birer kesir olarak düşünmedik. Ancak bulduğumuz değerlerin

denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol ederken, verilen denklemin iki tarafının birer kesir olduğunu dikkate aldık.

II. $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{3a-b}{2a+2b}$ ise $a:b$ oranı kaçtır?

$$\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{3a-b}{2a+2b} = \frac{4a+b}{4a+b} \quad \text{olur.}$$

$4a+b \neq 0$ iken;

$$\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{1}{1} \Rightarrow 2a-b = a+2b$$
$$\Rightarrow a = 3b$$
$$\Rightarrow a:b = 3:1 \quad \text{bulunur.}$$

$4a+b=0$ iken;

$$4a+b=0 \Rightarrow 4a=-b$$
$$\Rightarrow a:b = -1:4 \quad \text{olur.}$$

Verilen orantıya göre; $a:b=3:1$ veya

$a:b=-1:4$ tür.

{ $4a+b=0$ iken;

$$\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{3a-b}{2a+2b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+2(-4a)}{2a-(-4a)} = \frac{3a-(-4a)}{2a+2(-4a)}$$

$$\Rightarrow \frac{-7}{6} = \frac{7}{-6}$$ olup verilen orantı sağlanır.}

Daha da fazlası için, lütfen “Oran ve Orantı” dosyalarımızı inceleyiniz.