4.12 – Oran ve Orantı

4.12.1 – Oran ve Orantının Tanımı

İlköğretim yıllarınızda;

- Aynı türden iki çokluktan birinin diğerine bölümünü gösteren kesre **oran** denildiğini;
- $\frac{a}{b}$ oranında a'nın b'ye bölünmesi ile elde edilen gerçek sayıya $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ oranının **değeri** denildiğini;
- $\frac{a}{b} = k$ ve $\frac{c}{d} = k \ (k \in R)$ olmak üzere, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliğine **orantı** denildiğini

öğrenmiştiniz.

Bu bölümde, bu tanımları modern matematik kavramları ile vereceğiz.

Tanım – 4.75

*RxR'nin her (a, b) ikilisine bir **oran** denir.*

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ oranı (a, b), $(a : b)$ veya $\frac{a}{b}$ biçiminde gösterilir; **a oran b** veya **a'nın b'ye oranı** diye okunur.

Örneğin; $\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{7}, \frac{0}{\sqrt{3}}, \frac{6}{0}, \frac{0}{0}, \ldots$ birer orandır.

$b \neq 0$ iken $\frac{a}{b}$ oranına, a'nın b'ye bölümü de denilebilir. Bu durumda $\frac{a}{b} = k \in R$ sayısına $\frac{a}{b}$ oranının **değeri** denir. Ancak; $\frac{2}{0}$ ve $\frac{0}{0}$ gibi oranlar bir bölüm olarak düşünülemez. Böyle oranların değerleri ya tanımsız ya da belirsizdir.

Tanım – 4.76

*RxR'de, $\beta = \{((a, b), (c, d)) \mid a \cdot d = b \cdot c\}$ bağıntısının elemanı olan her $((a, b), (c, d))$ ikilisine bir **orantı** denir.*

$b \cdot d \neq 0$ olmak üzere;

$$a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

$(a, b) = \frac{a}{b}$ ve $(c, d) = \frac{c}{d}$ olduğu düşünülürse, $b \cdot d \neq 0$ için $((a, b), (c, d)) \in \beta$ ise $(a, b) = (c, d)$ yazılabilir. $(a, b) = (c, d)$ eşitliğini –küçük bir pürüz dışında– $b \cdot d = 0$ olduğu durumlar için de yazabiliriz: a, b, c, d $\in$R olmak üzere;

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ dir.

$\left(\text{veya } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\right)$

Örnek – 4.180

a. $(3, 6) = (4, 8)$ $\quad (3 \cdot 8 = 6 \cdot 4)$

b. $\frac{0}{5} = \frac{0}{2}$ $\quad (0 \cdot 2 = 5 \cdot 0)$

c. $(2\sqrt{3}, \sqrt{6}) = (6, 3\sqrt{2})$ $\quad (2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot 6)$

d. $\frac{\sqrt{3}}{0} = \frac{3}{0}$ $\quad (\sqrt{3} \cdot 0 = 0 \cdot 3)$

e. $(a, b) = (ka, kb)$ $\quad (a \cdot kb = b \cdot ka)$

f. $\frac{a}{b} = \frac{0}{0}$ $\quad (a \cdot 0 = b \cdot 0)$

+ $(a, b) = (ka, kb)$ orantısına göre; her (a, b) oranı her k$\in$R sayısı ile genişletildiğinde, (a, b) oranına eşit olan oranlar elde edilir.

Örnek – 4.181

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ oranını -2, 0, 3 sayıları ile genişletelim:

$$\underset{(-2)}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{-2\sqrt{2}}{-6};\quad \underset{(0)}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{0}{0};\quad \underset{(3)}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{9} \text{ elde edilir.}$$

+ Her $\frac{a}{b}$ oranını $\frac{0}{0}$ a eşit saymamız, eşitliğin geçişme özeliği ile çelişir.

Örneğin; $\frac{2}{3} = \frac{0}{0}$ ve $\frac{0}{0} = \frac{3}{5}$ iken, $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$ tir.

Yukarıda sözü geçen **pürüz** budur. Bu pürüzü "$\frac{0}{0}$ oranı belirsizdir." diyerek gidereceğiz. $\frac{0}{0}$ oranını bir geçişme elemanı olarak kullanmayacağız.

Orantının özeliklerini ortaya koyduğumuzda, neden bazı sorunları göze alarak $\frac{a}{b}=\frac{0}{0}$ dediğimizi daha iyi anlayacaksınız. Böyle yapmakla, orantı kavramı ile ilgili olarak ortaya çıkabilecek daha önemli sorunları nasıl önlemiş; nasıl daha işlevsel bir orantı kavramı elde etmiş olduğumuzu göreceksiniz.

Etkinlik – 4.275

Aşağıdaki eşitliklerin birer orantı olmasını sağlayan x değerlerinin kümelerini bulunuz.

a. $\frac{x}{2}=\frac{0}{0}$ **b.** $\frac{0}{0}=\frac{5}{x}$ **c.** $\frac{0}{8}=\frac{x}{3}$

d. $\frac{-5}{0}=\frac{5}{x}$ **e.** $\frac{2}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **f.** $\frac{-3}{5}=\frac{1}{x}$

+ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ orantısında a, b, c, d sayılarına sırasıyla; orantının **I. terim**i, **II. terim**i, **III. terim**i, **IV. terim**i denir.

I. ve IV. terimlere **dışlar** (**yanlar**); II. ve III. Terimlere **içler** (**ortalar**) adı verilir.

(Yanlar)
Dışlar

$$a:b=c:d$$

İçler
(Ortalar)

Tanım gereği, dışların çarpımı içlerin çarpımına eşittir.

$$\mathbf{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c}$$

Tanım – 4.77

*$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ orantısında d'ye a, b, c sayılarının **dördüncü orantılı**sı denir.*

Örnek – 4.182

2, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ sayılarının dördüncü orantılısını bulalım:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{x}\Rightarrow 2x=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\Rightarrow x=3\sqrt{3}\ \text{tür.}$$

Tanım – 4.78

*a, b, c ∈ R^+ olmak üzere, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ orantısında b'ye a ile c sayılarının **orta orantılı**sı veya a ile c'nin **geometrik** ortası denir.*

Örnek – 4.183

$6-2\sqrt{3}$ ve $6+2\sqrt{3}$ sayıları arasında orta orantılı sayıyı bulalım:

$$\frac{6-2\sqrt{3}}{x}=\frac{x}{6+2\sqrt{3}}\Rightarrow x^2=\left(6-2\sqrt{3}\right)\left(6+2\sqrt{3}\right)$$
$$\Rightarrow x^2=36-12$$
$$\Rightarrow x=2\sqrt{6}\quad \text{olur.}$$

+ $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ ve $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ orantıları, ancak $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{0}{0}$ ise $\frac{a}{b}=\frac{a_2}{b_2}$ orantısını gerektirir. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{0}{0}$ iken $\frac{a}{b}$ oranı $\frac{a_2}{b_2}$ oranına eşit olmayabilir. Bu durumu, daha önce de $\frac{0}{0}$ ın belirsizliği ile açıklamıştık.

Tanım – 4.79

$a:a_1:a_2:\ldots=b:b_1:b_2:\ldots$ *eşitliği*

$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots$ *anlamına gelir.*

Örnek – 4.184

$2:x:0:y=4:5:z:6$ olduğuna göre x, y ve z sayılarını bulalım:

Verilen orantı $\frac{2}{4}=\frac{x}{5}=\frac{0}{z}=\frac{y}{6}$ dır.

$$\frac{2}{4}=\frac{x}{5}\Rightarrow 2\cdot 5=4\cdot x\Rightarrow x=\frac{5}{2};$$
$$\frac{2}{4}=\frac{0}{z}\Rightarrow 2\cdot z=4\cdot 0\Rightarrow z=0\quad \text{olur.}$$

y değeri $\frac{0}{0}=\frac{y}{6}$ orantısından değil, $\frac{2}{4}=\frac{y}{6}$ orantısından bulunmalıdır. (Neden?)

$$\frac{2}{4}=\frac{y}{6}\Rightarrow y=3\ \text{bulunur.}$$

Orantının Özelikleri

Teorem – 4.124

Bir orantıda içler kendi aralarında, dışlar kendi aralarında yer değiştirebilir.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \Rightarrow \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} \wedge \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} \wedge \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}} \text{ dir.}$$

Etkinlik – 4.276

Teorem-4.124'ü ispatlayınız.

Örnek – 4.185

a. $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ orantısına dayanarak

$\frac{10}{5}=\frac{6}{3}$, $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$, $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$ yazılır.

b. $\frac{0}{3}=\frac{0}{4}$ orantısına dayanarak

$\frac{4}{3}=\frac{0}{0}$, $\frac{3}{0}=\frac{4}{0}$, $\frac{3}{4}=\frac{0}{0}$ yazılır.

($\frac{0}{0}$ oranından söz etmeseydik. Bu örnekteki durumları açıklayamayacaktık.)

Örnek – 4.186

a. R'de $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2x-2}$ denklemini çözünüz.

b. $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2x-2}$ bir orantı olduğuna göre, x'in alabileceği değerlerin kümesini yazınız.

Çözüm

a. Eşitliğin iki yanını $2(x-1)$ ile çarpalım: $(x \neq 1)$

$\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2(x-1)}$

$\Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$ bulunur.

$x=1$ değeri kesrin paydasını sıfır yapar.

$\frac{1}{0} \notin R$ olduğundan $Ç=\varnothing$ dir.

b. $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{2x-2} \Rightarrow x\cdot 2(x-1)=2(x-1)$

$\Rightarrow 2x(x-1)-2(x-1)=0$

$\Rightarrow 2(x-1)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=1$ bulunur.

$x=1$ değeri için eşitlik bir orantıdır.

$x \in \{1\}$ $\left(\frac{1}{0}=\frac{2}{0}\right)$

Oranlar kümesinin gerçek sayılar kümesini kapsadığını söyleyebilir miyiz?

Örnek – 4.187

$\frac{2}{x}=\frac{5}{y}$ ve $x+y=63$ ise x ve y sayılarını bulunuz.

Çözüm

$\frac{2}{x}=\frac{5}{y} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{5}=k$ olsun.

$x=2k$ ve $y=5k$ olur.

$x+y=63 \Rightarrow 2k+5k=63$

$\Rightarrow k=9$ bulunur.

$x=2\cdot 9=18$ ve $y=5\cdot 9=45$ tir.

Teorem – 4.125

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *bir orantı olmak üzere,*

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{\mathbf{b}+\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{d}} \textit{ dir.}$$

Etkinlik – 4.277

Teorem-4.125'i ispatlayınız.

Örnek – 4.188

$\frac{3}{1-x}=\frac{-15}{3+x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm

Her kesir bir oran olduğuna göre, R'deki denklemlerin çözümünde orantının özeliklerinden yararlanılır.

$$\frac{3}{1-x}=\frac{-15}{3+x}=\frac{3+(-15)}{(1-x)+(3+x)}=\frac{-12}{4}=-3$$

$\Rightarrow \frac{3}{1-x}=-3 \Rightarrow -3+3x=3 \Rightarrow x=2$ bulunur.

Teorem-4.125, Teorem-4.124'ün genelleştirilmiş biçimidir.

Teorem – 4.126

$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ *ve* $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *olmak üzere;*

$$\mathbf{\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{ka+k_1a_1+k_2a_2}{kb+k_1b_1+k_2b_2}} \text{ dir.}$$

Etkinlik – 4.278

Teorem-4.126'yı ispatlayınız.

Örnek – 4.189

$\frac{2a+b+c}{3}=\frac{a+2b+c}{8}=\frac{a+b+2c}{9}$ olduğuna göre, $a:b:c$ oranını yazınız.

Çözüm

$$\underset{①}{\frac{2a+b+c}{3}}=\underset{②}{\frac{a+2b+c}{8}}=\underset{③}{\frac{a+b+2c}{9}}=\underset{①+②+③}{\frac{4(a+b+c)}{20}}$$

$$=\underset{④}{\frac{a+b+c}{5}}=\underset{①-④}{\frac{a}{-2}}=\underset{②-④}{\frac{b}{3}}=\underset{③-④}{\frac{c}{1}} \text{ bulunur.}$$

$a:b:c=-2:3:1$ dir.

Örnek – 4.190

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ ise $x-2y+z$ kaçtır?

Çözüm

I. yol

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$ olsun.

$x=2k,\ y=3k,\ z=4k$ olur.

$x-2y+z=2k-2\cdot 3k+4k \Rightarrow x-2y+z=0$ bulunur.

II. yol

$$\underset{(1)}{\frac{x}{2}}=\underset{(-2)}{\frac{y}{3}}=\underset{(1)}{\frac{z}{4}}=\frac{x-2y+z}{1\cdot 2-2\cdot 3+1\cdot 4}=\frac{x-2y+z}{0} \text{ olur.}$$

Bu orantı ancak $x-2y+z=0$ iken gerçekleşir.

$\left(\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{0}{0} \text{ dır.}\right)$

Teorem – 4.127

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *ise*

$\boxed{1.}$ $\mathbf{\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}}$ *dir.*

$\boxed{2.}$ $\mathbf{\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}}$ *dir.*

$\boxed{3.}$ $\mathbf{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$ *dir.*

$\boxed{4.}$ $\mathbf{\frac{xa+y\cdot b}{za+tb}=\frac{xc+yd}{zc+td}}$ *dir.*

Etkinlik – 4.279

Teorem-4.127'yi ispatlayınız.

Örnek – 4.191

$\frac{2a-b}{a+b}=\frac{x+y}{2x-y}$ olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ oranını x ve y türünden bulunuz.

Çözüm

I. yol

$$\frac{\overbrace{2a-b}^{①}}{\underbrace{a+b}_{②}}=\frac{\overbrace{x+y}^{③}}{\underbrace{2x-y}_{④}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{(2a-b)+(a+b)}^{①+②}}{\underbrace{-(2a-b)+2(a+b)}_{-① +2\cdot ②}} = \frac{\overbrace{(x+y)+(2x-y)}^{③+④}}{\underbrace{-(x+y)+2(2x-y)}_{-③ +2\cdot ④}}$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{3b} = \frac{3x}{3x-3y} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{x-y} \text{ olur.}$$

II. yol

$$\frac{2a-b}{a+b} = \frac{x+y}{2x-y}$$

$$\Rightarrow a(4x-2y) - b(2x-y) = a(x+y) + b(x+y)$$

$$\Rightarrow a(4x-2y-x-y) = b(x+y+2x-y)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3x}{3x-3y} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{x-y} \text{ olur.}$$

Örnek – 4.192

R'de $\frac{x+2}{2x} = \frac{x^2+2x-5}{x^2+4x-9}$ denklemini, orantının özeliklerinden yararlanarak çözünüz.

Çözüm

$$\frac{x+2}{2x} = \frac{x^2+2x-5}{x^2+4x-9}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2-(2x)}{2x} = \frac{x^2+2x-5-(x^2+4x-9)}{x^2+4x-9}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{2-x}^{①}}{\underbrace{2x}_{②}} = \frac{\overbrace{-2x+4}^{③}}{\underbrace{x^2+4x-9}_{④}} = \frac{\overbrace{0}^{-2\cdot ①+③}}{\underbrace{x^2-9}_{-2\cdot ②+④}} \text{ olur.}$$

$\frac{2-x}{2x} = \frac{0}{x^2-9}$ orantısı, $2-x=0$ veya $x^2-9=0$ eşitliklerini gerektirir.

Buna göre; $x=2$ veya $x=\mp 3$ olmalıdır. Bu x değerleri, verilen denklemdeki kesirleri gerçek sayı yaptığından $Ç=\{-3,2,3\}$ olur.

Etkinlik – 4.280

Aşağıdaki denklemleri, orantının özeliklerinden yararlanarak, R'de çözünüz.

a. $\frac{x-1}{4-x} = \frac{x+1}{8-x}$

b. $\frac{2}{x^2-3x+4} = \frac{5}{1+6x-2x^2}$

c. $\frac{1-x}{x^2-3x-4} = \frac{x+3}{12+3x-x^2}$

d. $\frac{2x}{x-1} = \frac{x^2-x+2}{x^2+x+4}$

Etkinlik – 4.281

$\frac{a+4}{b+2} = \frac{b-1}{c-1} = \frac{c-4}{a+7} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre,

$a+b+c$ toplamını bulunuz.

Etkinlik – 4.282

Aşağıda verilen orantılardan, istenilen oranları bulunuz.

a. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{3}{2}$ ise $a:b=?$

b. $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$ ise $a:b:c=?$

c. $\frac{a+b}{b+2c} = \frac{a+c}{a+2b} = \frac{b+c}{2a+c}$ ise $a:b:c=?$

d. $\frac{2a+b+c}{7} = \frac{a+2b}{1} = \frac{a+c}{5}$ ise $a:b:c=?$

e. $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{3a-b}{2a+2b}$ ise $a:b=?$

f. $\frac{2a+3b}{a+2b} = \frac{a+5b}{4b}$ ise $a:b=?$

4.12.2 – Orantılı Çokluklar

Doğru Orantılı Çokluklar

Etkinlik – 4.283

Ekmek sayıları ile bunların tutarları tabloda verilmiştir. x ekmek sayısı, y ekmeklerin tutarı, x_i ve y_i birbirlerine karşılık gelen ekmek sayısı ve tutarı olsun.

Ekmek sayısı	Tutarı(kr)
1 (x_1)	30 (y_1)
2 (x_2)	60 (y_2)
3 (x_3)	90 (y_3)
4 (x_4)	120 (y_4)
5 (x_5)	150 (y_5)
6 (x_6)	180 (y_6)

a. $\frac{x_2}{x_3}=\frac{y_2}{y_3}$; $\frac{x_3}{x_5}=\frac{y_3}{y_5}$; $\frac{x_4}{x_6}=\frac{y_4}{y_6}$ orantılarının varlığını gösteriniz.

b. $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=\frac{y_4}{x_4}=\frac{y_5}{x_5}=\frac{y_6}{x_6}$ olduğunu gösteriniz.

c. y ile x arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Tanım – 4.80

Değişen iki çokluktan birinin herhangi iki değerinin oranı, diğerinin bunlara karşılık gelen değerlerinin oranına eşit ise; bu çokluklara ***doğru orantılı*** *(ya da* ***orantılı****) çokluklar denir.*

Etkinlik-4.283'teki ekmeklerin sayısı ile ekmeklerin tutarı doğru orantılıdır.

x ile y doğru orantılı çokluklar olsun.

$x = x_1$ iken $y = y_1$ ve $x = x_2$ iken $y = y_2$ ise,

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2} \Rightarrow \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$ olur.

Karşılıklı tüm x ve y değerleri için

$\mathbf{\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=...=k}$ bulunur.

Demek ki; doğru orantılı iki çokluğun birbirlerine karşılık gelen değerleri x ve y ise $\mathbf{\frac{y}{x}=k}$ dır.

Bir y çokluğunun bir x çokluğu ile doğru orantılı olduğu "$\mathbf{y\alpha x}$" ile gösterilir ve "y orantılı x" diye okunur.

$y\alpha x \Rightarrow \frac{y}{x}=k$

$\Rightarrow \mathbf{y = kx}$ olur.

$x \neq 0$ iken $k\in R$'dir.

($\frac{y}{0}$ oranının değerinin $y = 0$ iken belirsiz, $y \neq 0$ iken tanımsız olduğunu hatırlayınız.)

Örnek – 4.193

a. Bir işçinin çalışma süresi ile bu süreye karşılık alacağı ücret doğru orantılıdır.

b. Satın aldığınız kalemlerin sayısı ile buna ödenecek para doğru orantılıdır.

c. Hızı değişmeyen bir hareketlinin aldığı yol ile bu yolu alma süresi doğru orantılıdır.

d. Denk işçilerin sayısı ile eşit sürede ürettikleri iş miktarı doğru orantılıdır.

Örnek – 4.194

Bir işçi 4 saatte 14 m^2 duvarı boyarsa, 10 saatte kaç m^2 duvarı boyar?

Çözüm

İşçinin çalıştığı sürelerin oranı, bu sürelerde boyanan duvarların alanlarının oranına eşittir.

$\frac{4 \text{ saat}}{10 \text{ saat}}=\frac{14\ m^2}{x} \Rightarrow x = 35\ m^2$ bulunur.

Bu tür problemlerde işlemleri uzatmamak için, yukarıdaki orantı problemin ifadesi içinde oluşturulur.

Şöyle ki;

İşçi 4 saatte 14 m^2 boyarsa

10 saatte x m^2 boyar.

Doğru Orantı $4 \cdot x = 10 \cdot 14$

(D.O.) $\Rightarrow x = 35$ bulunur.

(Okların işaret ettiği çoklukların çarpımları eşitlenir.)

Örnek – 4.195

4800 lirayı, 18 ve 30 yaşlarındaki iki kardeş yaşları ile orantılı olarak paylaşırsa; her birinin payı kaç lira olur?

Çözüm

Küçük kardeş x lira, büyük kardeş y lira alsın.

$\frac{x}{y}=\frac{18}{30} \Rightarrow \frac{x}{18}=\frac{y}{30}=k$

$\Rightarrow x = 18k$ ve $y = 30k$ olur.

$x + y = 4800 \Rightarrow 18k + 30k = 4800$

$\Rightarrow k = 100$

$\Rightarrow x = 1800$ ve $y = 3000$ bulunur.

Örnek – 4.196

$2x-3$ ve $y+5$ çoklukları doğru orantılıdır.

a. $x=2$ iken $y=1$ ise, $x=4$ iken y kaçtır?

b. $x=3$ iken $y=4$ ise
$y=-5$ iken x kaçtır?

c. $x=6$ iken $y=-5$ ise
$x=10$ iken y kaçtır?

Çözüm

a. **<u>I. yol</u>**

Doğru orantılı iki çokluğun oranı sabittir.

$\frac{2x-3}{y+5}=k$ dır.

$x=2$ ve $y=1$ için $\frac{2\cdot 2-3}{1+5}=k \Rightarrow k=\frac{1}{6}$ olur.

$\frac{2x-3}{y+5}=\frac{1}{6}$ orantısında $x=4$ iken,

$\frac{2\cdot 4-3}{y+5}=\frac{1}{6} \Rightarrow y=25$ bulunur.

<u>II. yol</u>

$2x-3$ 'ün alacağı değerlerin oranı, $y+5$ 'in bunlara karşılık gelen değerlerinin oranına eşit olacaktır.

$\frac{2x_1-3}{2x_2-3}=\frac{y_1+5}{y_2+5}$ tir.

$x_1=2,\ x_2=4$ ve $y_1=1$ değerleri yerlerine konulursa $\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 4-3}=\frac{1+5}{y_2+5} \Rightarrow y_2=25$ bulunur.

b. $x_1=3,\ y_1=4,\ y_2=-5$ ve

$$\frac{2x_1-3}{2x_2-3}=\frac{y_1+5}{y_2+5}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot 3-3}{2x_2-3}=\frac{4+5}{-5+5} \Rightarrow \frac{3}{2x_2-3}=\frac{9}{0}$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

c. $x_1=6,\ x_2=10,\ y_1=-5$ ve

$$\frac{2x_1-3}{2x_2-3}=\frac{y_1+5}{y_2+5}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot 6-3}{2\cdot 10-3}=\frac{-5+5}{y_2+5} \Rightarrow \frac{9}{17}=\frac{0}{y_2+5}$$

$$\Rightarrow y_2=-5 \text{ bulunur.}$$

Etkinlik – 4.284

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a. Bir araç 8 litre benzinle 100 km yol alırsa, 14 litre benzinle kaç km yol alır?

b. 9 işçinin 15 m^2 duvarı ördüğü sürede, 20 m^2 duvarı kaç işçi örer?

c. 48 kalem 7 ve 9 yaşlarındaki iki kardeş arasında, yaşlarıyla orantılı olarak paylaştırılıyor. Her birine kaç kalem düşer?

d. Üç kişi 60000 lirayı 2, 3, 5 sayıları ile orantılı olarak paylaşıyor. Her birinin payı kaç lira olur?

e. x ile y doğru orantılı çokluklardır.

I. $x=12$ iken $y=9$ ise,
$x=8$ iken y kaçtır?

II. $x=5$ iken $y=0$ ise,
$x=9$ iken y kaçtır?

III. $x=-2$ iken $y=6$ ise,
$x=0$ iken y kaçtır?

f. $2y-1$ ile x^2+3 doğru orantılı çokluklardır.
$x=4$ iken $y=29$ ise,
$x=6$ iken y kaçtır?

Etkinlik – 4.285

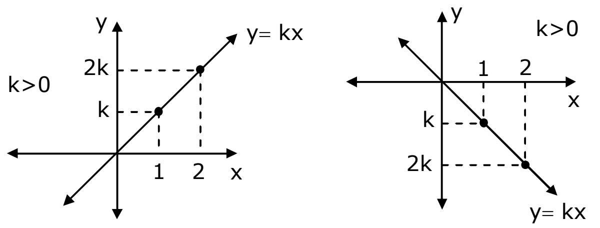
Bir balıkçı elinde kalan 6 kg balığı Ali ve Veli'ye, paraları ile doğru orantılı olarak paylaştıracaktır.

a. Ali'nin 4 lirası, Veli'nin 8 lirası varsa;

b. Ali'nin 5 lirası varsa, Veli'nin parası yoksa;

c. Ali'nin de Veli'nin de parası yoksa,
balıkçı paylaştırmayı nasıl yapar?

+ Doğru orantılı x ve y çoklukları arasında $y=kx$ bağıntısı olduğundan, y'nin x'e göre değişiminin grafiği orijinden geçen bir doğrudur.



x çokluğu hep sıfır olarak kalıyorsa, grafik $x=0$ doğrusu;

y çokluğu hep sıfır olarak kalıyorsa, grafik $y=0$ doğrusu olur.

Ters Orantılı Çokluklar

Etkinlik – 4.286

60 tane elmanın değişik sayıdaki kişiler arasında paylaşılmasında, kişi başına düşen elma sayıları tabloda gösterilmiştir.

Kişi sayısı	Kişi başına elma sayısı
1 (x_1)	60 (y_1)
2 (x_2)	30 (y_2)
3 (x_3)	20 (y_3)
4 (x_4)	15 (y_4)
5 (x_5)	12 (y_5)
6 (x_6)	10 (y_6)

x kişi sayısı, y kişi başına düşen elma sayısı; x_i ve y_i birbirlerine karşılık gelen kişi sayısı ve kişi başına düşen elma sayısı olsun.

a. $\frac{x_2}{x_3} = \left(\frac{y_2}{y_3}\right)^{-1}$, $\frac{x_3}{x_5} = \left(\frac{y_3}{y_5}\right)^{-1}$, $\frac{x_4}{x_6} = \left(\frac{y_4}{y_6}\right)^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

b. $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = x_4 \cdot y_4 = ...$ olduğunu gösteriniz.

c. x ile y arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Tanım – 4.81

Değişen iki çokluktan birinin herhangi iki değerinin oranı, diğerinin bunlara karşılık gelen değerlerinin oranının tersine eşit ise; bu çokluklara ***ters orantılı çokluklar*** *denir.*

Etkinlik-4.286'daki kişi sayısı ile kişi başına düşen elma sayısı ters orantılıdır.

x ile y ters orantılı çokluklar olsun.

$x = x_1$ iken $y = y_1$ ve $x = x_2$ iken $y = y_2$ ise,

$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ olur.

Karşılıklı tüm x ve y değerleri için,

$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot x_3 = ... = k$ bulunur.

Demek ki; ters orantılı iki çokluğun birbirlerine karşılık gelen değerleri x ve y ise, $\mathbf{x \cdot y = k}$ dır.

$\forall k \in R$ için, $x \cdot y = k \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{k}{x}$ yazılabilir.

$\frac{y}{1} = \frac{k}{x} \Rightarrow y = k \cdot \frac{1}{x}$ olduğundan y, x ile ters orantılı ise; $\frac{1}{x}$ ile doğru orantılıdır.

Örnek – 4.197

a. Belli bir işin bitirilmesi süresi, denk işçilerin sayısı ile ters orantılıdır.

b. Belli bir yolu alma süresi,y hareketlinin hızı ile ters orantılıdır.

Örnek – 4.198

9 işçi belli bir işi 10 günde yaparsa, 6 işçi aynı işi kaç günde yapar?

Çözüm

I. yol

İşçi sayısı, çalışılan gün sayısı ile ters orantılıdır.

6 işçi işi x günde yapsın.

$\frac{9}{6} = \left(\frac{10}{x}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{9}{6} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 15$ bulunur.

II. yol

İşçi sayısı, çalışılan gün sayısı ile ters orantılı olduğundan, bunların çarpımı sabittir.

9 işçi $\leftrightarrow$ 10 günde yaparsa,

6 işçi $\leftrightarrow$ x günde yapar.

Ters orantı (T.O.) $6 \cdot x = 9 \cdot 10$

$\Rightarrow x = 15$ bulunur.

Örnek – 4.199

80000 liralık ödül, bir takımın iki kalecisine yedikleri gollerin sayısı ile ters orantılı olarak paylaştırılacaktır. Kalecilerden biri 7 gol, diğeri 9 gol yediğine göre; her birinin payı kaç lira olur?

Çözüm

I. yol

Kalecilerden 7 gol yiyeni x lira, 9 gol yiyeni y lira alsın.

$\frac{x}{y} = \left(\frac{7}{9}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{7}$

$\Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{7} = k$

$\Rightarrow x = 9k$ ve $y = 7k$ olur.

$x + y = 80000 \Rightarrow 9k + 7k = 80000$

$\Rightarrow k = 5000$

$\Rightarrow x = 45000$ TL

$y = 35000$ TL bulunur.

7 gol yiyen kaleci 45000 TL, diğeri 35000 TL alacaktır.

II. yol

7 gol yiyen kaleci x lira, diğeri $80000 - x$ lira alsın. Bir kalecinin yediği gollerin sayısı alacağı para ile ters orantılı olduğundan, bunların çarpımı sabittir.

$7 \cdot x = 9 \cdot (80000 - x)$

$\Rightarrow x = 45000$ TL bulunur.

Örnek – 4.200

x, y, z çoklukları sırasıyla 2, 3, 4 sayıları ile ters orantılıdır.

x, y, z'nin orantılı olduğu en küçük sayma sayılarını bulunuz.

Çözüm

2, 3, 4 ile ters orantılı olan sayılar $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ile doğru orantılıdır.

$x : y : z = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ olur.

Oranlar 12 ile genişletilirse;

$x : y : z = 6 : 4 : 3$ bulunur.

Etkinlik – 4.287

Aşağıdaki problemleri çözünüz.

a. 6 kişi bir miktar peyniri paylaşacaktır. Paylaşıma 3 kişi daha katılsaydı, kişi başına düşen peynir miktarı 1 kg azalacaktı.
Paylaşılacak peynir kaç kg dır?

b. 63000 TL, 32 ve 40 yaşlarındaki iki kardeş arasında yaşları ile ters orantılı olarak paylaştırılırsa, küçük kardeşin payı kaç TL olur?

c. 138 elma 1, 3, 5 sayıları ile ters orantılı olarak üçe bölünürse, her grupta kaçar elma bulunur?

d. $2x + 1$ ve $3y + 4$ ters orantılı çokluklardır. $x = 4$ iken $y = 2$ olduğuna göre $x = 2$ iken y kaçtır?

Etkinlik – 4.288

Miray, Senay ve Giray'ın programlarında 8 farklı ders bulunmakta ve karnelerindeki notlar 4 ve 5'lerden oluşmaktadır.

Karnelerdeki notların dağılımı tabloda verilmiştir.

	4'lerin sayısı	5'lerin sayısı	Toplam
Miray	1	7	39
Senay	1	7	39
Giray	4	4	36

Babaları toplam 4104 liralık ödülü,

a. 4'lerin sayısı ile ters orantılı olarak paylaştırırsa;

b. 5'lerin sayısı ile doğru orantılı olarak paylaştırırsa;

c. not toplamları ile doğru orantılı olarak paylaştırırsa

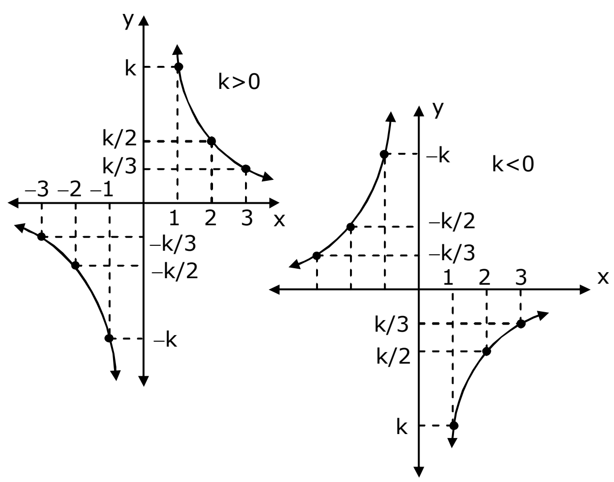
her birine kaç lira düşer?

Etkinlik – 4.289

Etkinlik-4.287 deki soruları yandaki tabloya göre yanıtlayınız.

	4'lerin sayısı	5'lerin sayısı	Toplam
Miray	0	8	40
Senay	4	4	36
Giray	8	0	32

+ Ters orantılı x ve y çoklukları arasında $x \cdot y = k$ bağıntısı bulunduğundan, y'nin x'e göre değişiminin grafiği aşağıdakiler gibidir.



$k=0$ için grafik, $x=0$ ve $y=0$ doğrularının oluşturduğu şekildir.

Bileşik Orantı

Teorem – 4.128

Bir z çokluğu x ve y çoklukları ile ayrı ayrı doğru orantılı ise, $x\cdot y$ çokluğu ile de doğru orantılıdır.

İspat

$z\alpha x\cdot y \Leftrightarrow z=k\cdot x\cdot y$ dir.

$z=k\cdot x\cdot y$ eşitliğinde x sabit tutulursa,

$z=\underbrace{k\cdot x}_{k_1}\cdot y \Leftrightarrow z=k_1y$

$\Leftrightarrow z\alpha y$;

y sabit tutulursa,

$z=\underbrace{k\cdot y}_{k_2}\cdot x \Leftrightarrow z=k_2x$

$\Leftrightarrow z\alpha x$ olur.

Teorem-4.127'den şu sonuçlar çıkarılır:

1. U, x, y, z, t birer değişken ve k sabit olmak üzere,

$U=k\cdot\dfrac{xy^mz^n}{t}$ ise U değişkeni x, y^m ve z^n ile ayrı ayrı doğru orantılı; t ile ters orantılıdır.

2. Bir z çokluğu x ve y ile doğru, t ile ters orantılı olsun.

$x=x_1$ iken $y=y_1$, $t=t_1$, $z=z_1$ ve

$x=x_2$ iken $y=y_2$, $t=t_2$, $z=z_2$ ise

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1}{x_2}\cdot\dfrac{y_1}{y_2}\cdot\dfrac{t_2}{t_1}$ dir.

Örnek – 4.201

6 işçinin günde 8 saat çalışarak 10 günde bitirebilecekleri işi, 5 işçi günde 6 saat çalışarak kaç günde bitirir?

Çözüm

I. yol (Bire indirgeme yöntemi)

6 işçi günde 8 saat çalışarak 10 günde bitirirse

1 " " 8 " " $6\cdot 10$ günde

1 " " 1 " " $6\cdot 10\cdot 8$ günde

5 " " 1 " " $\dfrac{6\cdot 10\cdot 8}{5}$ günde

5 " " 6 " " $\dfrac{6\cdot 10\cdot 8}{5\cdot 6}=16$ günde

bitirir.

II. yol

Problemi iki aşamada çözelim:

6 işçi;

günde 8 saat çalışarak $\leftrightarrow$ 10 günde bitirirse

günde 6 saat çalışarak $\leftrightarrow$ x günde bitirir.

T.O. $6\cdot x=8\cdot 10$

$\Rightarrow x=\dfrac{40}{3}$ gün olur.

Günde 6 saat çalışarak;

6 işçi $\leftrightarrow$ $\dfrac{40}{3}$ günde bitirirse

5 işçi $\leftrightarrow$ y günde bitirir.

T.O. $5\cdot y=6\cdot\dfrac{40}{3}$

$\Rightarrow y=16$ gün bulunur.

III. yol

Bileşik orantıdaki değişen çoklukların her biri bilinmeyen çoklukla karşılaştırılır. Bunların doğru orantılı mı, ters orantılı mı oldukları belirlenir.

6 işçi $\leftrightarrow$ günde 8 saat çal. $\leftrightarrow$ 10 günde bitirirse

5 işçi $\leftrightarrow$ günde 6 saat çal. $\leftrightarrow$ x günde bitirir.

T.O. T.O.

(Gün sayısı ile) (Gün sayısı ile)

İşçi sayısının aynı kaldığı düşünülürse; günlük çalışma süresi ile gün sayısı ters orantılıdır. Buna göre, 6 ile x ve 8 ile 10 çarpılacaktır. Bu, orantıda oklarla gösterilmiştir.

Günlük çalışma süresinin aynı kaldığı düşünülürse; işçi sayısı ile gün sayısı (ya da toplam çalışma süresi) ters orantılıdır. Buna göre, 5 ile $6\cdot x$ ve 6 ile $8\cdot 10$ çarpılıp eşitlenecektir. Bu da orantıda oklarla gösterilmiştir.

Açıklamalarımızı işleme dökersek,

$5\cdot 6\cdot x=6\cdot 8\cdot 10 \Rightarrow x=16$ bulunur.

IV. yol

III. yolda yaptığımız açıoklamaları daha özlü biçimde yapabiliriz:

Çalışılan gün sayısı, işçi sayısı ve günlük çalışma süresi ile ters orantılıdır.

Çalışılan gün sayısı g, işçi sayısı i, günlük çalışma süresi s ile gösterilirse;

$\frac{g_1}{g_2} = \frac{i_2}{i_1} \cdot \frac{s_2}{s_1}$ olur.

$\frac{g_1}{g_2} = \frac{i_2}{i_1} \cdot \frac{s_2}{s_1} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{8}$

$\Rightarrow x = 16$ bulunur.

Biz, bu tür problemlerde IV. yolu öneriyoruz.

V. yol

6 işçi günde 8 saat çalışarak 10 günde

$6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$ saatlik iş yapar.

5 işçi bir günde $5 \cdot 6 = 30$ saatlik iş yapacağına göre, 480 saatlik işi $480 : 30 = 16$ günde bitirir.

Etkinlik – 4.290

x, y, z, t, u çoklukları arasında $x \cdot y^2 = z \cdot t \cdot u^3$ bağıntısı bulunduğuna göre, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a. x ile t doğru orantılıdır.

b. x ile y ters orantılıdır.

c. z ile t ters orantılıdır.

d. t ile u^3 ters orantılıdır.

Etkinlik – 4.291

Aşağıdaki problemleri, Örnek-4.201'de belirtilen yollarla çözünüz.

a. 3 işçi 4 dönüm tarlayı 10 saatte çapalarsa, 5 işçi 6 dönüm tarlayı kaç saatte çapalar?

b. 8'er tonluk 6 kamyonun 12 seferde taşıdığı kömürü, 9'ar tonluk 4 kamyon kaç seferde taşır?

c. Her biri birim zamanda 3 birim iş üreten 10 işçi günde 8 saat çalışarak 120 birim işi 9 günde üretirse; her biri birim zamanda 5 birim iş üreten 9 işçi günde 6 saat çalışarak 180 birim işi kaç günde üretir?

d. 6 işçi her biri 50 cm^2 olan parkelerle 8 saatte 120 m^2 tabanı döşerse; 4 işçi her biri 60 cm^2 olan parkelerle 5 saatte kaç m^2 tabanı döşer?
(Farklı parkelerin döşenme süreleri eşittir.)

e. Her işçi birim zamanda eşit sayıda parça üretmektedir.
Birim zamanda ürettiği parçalardan biri bozuk çıkan 6 işçi 540 sağlam parçayı 5 günde;
birim zamanda ürettiği parçalardan 2'si bozuk çıkan 5 işçi 510 sağlam parçayı 6 günde ürettiğine göre;
birim zamanda ürettiği parçalardan 3'ü bozuk çıkan 10 işçi 640 sağlam parçayı kaç günde üretir?

f. 8 ton demirden, çapı 3 cm olan 1500 m uzunluğunda demir çubuk üretilirse; 6 ton demirden çapı 5 cm olan kaç m uzunluğunda demir çubuk üretilir?

! Üretilen iş miktarı, (y)

- İşçi sayısı ile; (n)
- Bir işçinin birim zamanda yaptığı iş miktarı ile; (p)
- Günlük çalışma süresi ile; (r)
- Çalışılan gün sayısı ile (t)

doğru orantılıdır.

Buna göre;

Her biri birim zamanda p_1 birim iş yapan n_1 işçi günde r_1 saat çalışarak y_1 birim işi t_1 günde;

her biri birim zamanda p_2 birim iş yapan n_2 işçi günde r_2 saat çalışarak y_2 birim işi t_2 günde yaparsa,

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{t_1}{t_2}$ olur.

Bu sonuç;

$$\frac{\text{I. iş miktarı}}{\text{II. iş miktarı}} = \frac{\text{I. işle ilgili değişkenlerin çarpımı}}{\text{II. İşle ilgili değişkenlerin çarpımı}}$$

biçiminde sağlıksız bir genellemeye yol açabilir. Bu genelleme ile problem çözmeye alışan bir öğrenci kolayca yanıltılabilir. Doğru olanı, her değişkenin iş miktarı ile doğru orantılı mı, ters orantılı mı olduğunu ayrı ayrı belirlemektir.

Örnek – 4.202

8 işçi her biri 2 birim zamanda yapılan 600 parça işi 12 saatte yaparsa;

6 işçi her biri 3 birim zamanda yapılan 500 parça işi kaç saatte yapar?

Çözüm

Yapılan parça sayısı, işçi sayısı ve çalışma süresi ile doğru orantılı; bir parçanın üretilme süresi ile ters orantılıdır.

Buna göre;

$$\frac{600}{500}=\frac{8}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\frac{12}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{600}{500}=\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{x}$$

$\Rightarrow x=20$ saat bulunur.

Örnek – 4.203

$2y-1$ çokluğu, $x+2$ ve $3p+2$ ile doğru; $2t+3$ ile ters orantılıdır.

$x=7,\ p=1$ ve $t=3$ iken $y=3$ ise;

$x=1,\ p=11$ ve $t=2$ iken y kaçtır?

Çözüm

I. yol

$2y-1=k\cdot\dfrac{(x+2)(3p+2)}{2t+3}$ yazılır.

$x=7,\ p=1,\ t=3,\ y=3$ iken;

$2\cdot3-1=k\cdot\dfrac{(7+2)\cdot(3\cdot1+2)}{2\cdot3+3}\Rightarrow k=1$ olur.

$x=1,\ p=11$ ve $t=2$ iken;

$2y-1=1\cdot\dfrac{(1+2)(3\cdot11+2)}{2\cdot2+3}\Rightarrow y=8$ bulunur.

II. yol

$$\frac{2y_1-1}{2y_2-1}=\frac{x_1+2}{x_2+2}\cdot\frac{3p_1+2}{3p_2+2}\cdot\frac{2t_2+3}{2t_1+3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot3-1}{2y_2-1}=\frac{7+2}{1+2}\cdot\frac{3\cdot1+2}{3\cdot11+2}\cdot\frac{2\cdot2+3}{2\cdot3+3}$$

$\Rightarrow y_2=8$ bulunur.

Etkinlik – 4.292

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a. y çokluğu, x ile doğru ve t ile ters orantılıdır.
$x=6$ ve $t=3$ iken $y=8$ ise,
$y=12$ ve $x=15$ iken t kaçtır?

b. y^2 çokluğu x ve t^3 ile doğru orantılıdır.
$x=1$ ve $t=3$ iken $y=9$ ise,
$x=3$ ve $t=9$ iken y kaçtır?

Etkinlik – 4.293

Aşağıdaki problemleri çözünüz.

a. x tane makine günde y saat çalışarak z parça işi 18 günde yapmaktadır. Makina sayısı $\frac{1}{3}$ ü kadar artırılır, günlük çalışma süresi $\frac{1}{4}$ ü kadar azaltılır ve iş miktarı $\frac{5}{3}$ katına çıkarılırsa iş kaç günde biter?

b. Bir terzi 2 ceket diktiği sürede 5 pantolon dikebilmektedir.
12 terzi 420 pantolonu 6 günde dikerse;
15 terzi 280 ceketi kaç günde diker?

c. 3 ceket için gereken kumaş ile 5 pantolon dikilebilmektedir.
72 m kumaşla 60 pantolon dikilirse, 90 m kumaşla kaç ceket dikilir.

d. A tipi muslukların birim zamanda akıttıkları suyun, B tipi muslukların birim zamanda akıttıkları suya oranı $\frac{2}{3}$ tür.
C tipi kovaların hacimlerinin D tipi kovaların hacimlerine oranı $\frac{3}{5}$ tir.
A tipi 5 musluktan 6 saatte C tipi 1200 kova doldurulursa; B tipi 8 musluktan 10 saatte D tipi kaç kova doldurulur?

Etkinlik – 4.294

Aşağıdaki problemleri çözünüz.

a. Bir grup işçinin günde 8 saat çalışarak belli bir sürede yapabileceği işi bu işçilerin $\frac{5}{6}$ sı günde 6 saat çalışarak 6 gün daha uzun sürede bitirmiştir.
İş kaç günde bitirilmiştir?

b. 4 çırak ile 2 usta 24 parça işi 18 günde, 7 çırak ile 3 usta 32 parça işi 15 günde bitirmiştir.
1 çırak ile 1 usta 16 parça işi kaç günde bitirir?

Alıştırmalar ve Problemler – 4.13

1. Aşağıdaki eşitliklerin birer orantı olmalarını sağlayan x değerlerinin kümelerini bulunuz.

a. $\frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}}$ **b.** $\frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{x}$

c. $\frac{3,\overline{6}}{1,\overline{8}} = \frac{x}{17}$ **d.** $\frac{0}{x} = \frac{0}{0}$

e. $\frac{0}{0} = \frac{x+2}{x-2}$ **f.** $\frac{3}{x} = \frac{x}{x}$

2. Aşağıdaki orantılarda bilinmeyen terimleri bulunuz.

a. $\sqrt{3} : x = \sqrt{6} : 3$

b. $2 : (-3) : 6 = 3 : x : y$

c. $2\sqrt{3} : 0 : (-2) : 12 = x : y : z : 2\sqrt{3}$

d. $x : 2 : y : 8 = -6 : 4 : 8 : z$

3. Aşağıdaki sayıların dördüncü orantılılarını bulunuz.

a. $\sqrt{2};\ \sqrt[3]{2};\ \sqrt[4]{2}$ **b.** $1,\overline{3};\ 1,\overline{6};\ 1,\overline{9}$

c. $1-\sqrt{2};\ 1-\sqrt{3};\ 1-\sqrt{6}$

d. $\sqrt{9-6\sqrt{2}};\ 3\sqrt{6};\ \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

4. Aşağıdaki sayıların orta orantılılarını bulunuz.

a. 3; 6 **b.** $\sqrt{20-8\sqrt{6}};\ \sqrt{45+18\sqrt{6}}$

c. $\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}$ **d.** 50; 72

5. Aşağıda verilen orantılardan, istenilen oranları bulunuz.

a. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{4}{1}$ ise $a : b = ?$

b. $\frac{2a-3b}{3a+5b} = \frac{1}{4}$ ise $(a+2b) : (3a+4b) = ?$

c. $\frac{2a+b}{a} = \frac{2a+3b}{b}$ ise $a : b = ?$

d. $\frac{a-b}{a} = \frac{b-a}{b}$ ise $a : b = ?$

e. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ ise $\frac{2a-b+c}{3a+2b-c} = ?$

f. $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{4}{5}$ ise $a : b : c = ?$

g. $\frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{3} = \frac{a+b+c}{6}$ ise $a : b : c = ?$

h. $\frac{a+b+c}{11} = \frac{2b+c}{8} = \frac{a+c}{9}$ ise $a : b : c = ?$

i. $\frac{a+2b}{c} = \frac{3a+c}{b} = \frac{2b+3c}{a}$ ise $a : b : c = ?$

j. $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$ ise $a : b : c = ?$

6. Aşağıda verilen orantılarda $a : b : c$ oranlarını, mutlak değerleri en küçük olan tam sayılarla ifade ediniz.

a. $2a : 3b : c = 1 : 2 : 3$

b. $a : 2b : 4c = -3 : 4 : 5$

c. $a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$

d. $3a : 4b : 6c = -\frac{3}{4} : \frac{2}{3} : 1$

7. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ ve $\frac{a+b}{b} \cdot \frac{b+c}{c} \cdot \frac{c+d}{d} = 64$ olduğuna göre $\frac{a}{d}$ oranını bulunuz.

8. Aşağıda verilen orantılardan $x : y : z$ oranlarını bulunuz.

a. $\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{1} = \frac{x+z}{10}$ **b.** $\frac{xy}{3} = \frac{yz}{-6} = \frac{xz}{4}$

9. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{2a+3b}{2b+15} = 3$ ise $a+b+c$ kaçtır?

10. $\frac{4a+b+6}{6a+2c+9} = \frac{2}{3}$ ise $\frac{b}{c}$ kaçtır?

11. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ve $\frac{2a+c}{2b+d} + \frac{a+b}{b} + \frac{a-c}{b-d} = 7$ olduğuna göre $\frac{c}{d}$ oranı kaçtır?

12. $2x = 3y = 4z$ ve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$ ise $3x - y + 2z$ kaçtır?

13. $ax = by = cz = 18$ ve $x + y + z = 6$ olduğuna göre, $\frac{abc}{ab + bc + ac}$ oranı kaçtır?

14. $\frac{xy}{2} = \frac{xz}{-6} = \frac{yz}{3}$ ve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{-1}{12}$ olduğuna göre; x, y, z değerlerini bulunuz.

15. Aşağıda verilenlere göre; x, y ve z'nin değerlerini bulunuz.

a. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$ ve $y + z = 40$

b. $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ve $2x - y + z = 12$

c. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{5}$ ve $2x - y = 80$

d. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{5}$ ve $x + y - z = 10$

16. $\frac{a-5}{3} = \frac{b+2}{4} = \frac{c+1}{5}$ ve $b < c < a$ olduğuna göre, a'nın alabileceği gerçek sayı değerlerinin kümesini bulunuz.

17. Aşağıda verilen orantılardan yararlanarak $\frac{a}{b}$ oranlarını bulunuz.

a. $\frac{2a + b}{3a - 2b} = \frac{x + 2y}{2x - y}$

b. $\frac{3a - b}{2b - a} = \frac{2x - 3y}{5x + y}$

18. $3x = 4y = 5z$ ve $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{18}$ olduğuna göre; (x, y, z) üçlülerinin kümesini bulunuz.

19. Aşağıdaki denklemleri, orantının özeliklerinden yararlanarak, R'de çözünüz.

a. $\frac{x-3}{x-2} = \frac{x+1}{x+4}$

b. $\frac{5-x}{x^2-1} = \frac{7-x}{x^2+1}$

c. $\frac{x^2-1}{x^2-x+2} = \frac{2x^2-5}{2x^2-2x}$

d. $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2+2x-5}{2x-4}$

e. $\frac{x^2+2x+3}{x^2+9} = \frac{x+2}{5}$

f. $\frac{x^2-x+2}{x^2+6} = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+12}$

20. Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a. x ile y doğru orantılı çokluklardır.
$x = 12$ iken $y = 9$ ise, $x = 8$ iken y kaçtır?

b. x ile y ters orantılı çokluklardır.
$x = 9$ iken $y = 8$ ise, $x = 6$ iken y kaçtır?

c. $x - 2$ ile $2y + 5$ doğru orantılı çokluklardır.

I. $x = 3$ iken $y = 11$ ise
$x = 5$ iken y kaçtır?

II. $x = 4$ iken $y = 12$ ise
$x = 2$ iken y kaçtır?

III. $x = 5$ iken $y = \frac{-5}{2}$ ise
$x = 3$ iken y kaçtır?

d. $x^2 - 9$ ile $y + z$ ters orantılı çokluklardır.

I. $x = 1$ için $y = 4$ ise
$x = 5$ için y kaçtır?

II. $x = 3$ için $y = 5$ ise
$x = 4$ için y kaçtır?

III. $x = 6$ için $y = -2$ ise
$y = 2$ için x kaçtır?

e. y çokluğu x ve t ile doğru orantılıdır.
$x = 2$ ve $t = 3$ iken $y = 18$ ise
$x = 1$ ve $y = 15$ iken t kaçtır?

f. $y + 2$ çokluğu $x^2 - 1$ ile doğru, $2t + 3$ ile ters orantılıdır.

$x = 2$ ve $t = 3$ iken $y = 1$ ise
$t = -1$ ve $y = 70$ iken x kaçtır?

g. y çokluğu $2x - 1$ ve $t + 2$ ile doğru, $z - 3$ ile ters orantılıdır.
$x = t = 1$ ve $z = 5$ iken $y = 9$ ise,
$x = z = 0$ ve $t = 2$ iken y kaçtır?

h. p çokluğu x^2 ve $y - 1$ ile doğru, z^3 ve $t + 1$ ile ters orantılıdır.
$x = y = z = 2$ ve $t = 4$ iken $p = 2$ ise,
$y = 4,\ z = 1,\ t = 8$ ve $p = 60$ için x kaçtır?

21. $x^2y = k \cdot \dfrac{p^3 \cdot z}{t + 2}$ eşitliğinde k sabittir.
x, y, p, z, t değişkenlerinin ikişer ikişer ters orantılı mı, doğru orantılı mı olduklarını belirtiniz.

22. Aşağıdaki sayılarla doğru orantılı olan çokluklar, mutlak değeri en küçük hangi tam sayılarla ters orantılıdır?

a. 2, 3 **b.** 2, 4, 5
c. -2, 3, 4 **d.** 1, 3, 4, 6

23. Aşağıdaki sayılarla ters orantılı olan çokluklar, mutlak değeri en küçük hangi tam sayılarla doğru orantılıdır?

a. 2, 3, 6 **b.** 3, -4, 8
c. 2, 3, 4, 6 **d.** $\frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$

24. Aşağıdaki çoklukları, verilen sayılarla doğru orantılı parçalara ayırınız.

a. 180 ceviz; 3, 5, 7
b. 460 lira; $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$
c. 24 kg fındık; 0, 3, 5

25. Aşağıdaki çoklukları, verilen sayılarla ters orantılı parçalara ayırınız.

a. 6200 lira; 2, 3, 5
b. 50 kg bal; 1, $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$
c. 14 elma; 0, 1, $\frac{5}{3}$

26. Aşağıdaki problemleri çözünüz.

a. 9 tanesi 21 lira olan kalemlerin 12 tanesi kaç lira olur?

b. 4 kişinin 15 günde bitirebileceği yiyeceği, 5 kişi kaç günde bitirir?

c. 6 işçi toplam 6 m^2 halıyı 6 günde dokursa, 9 işçi toplam 9 m^2 halıyı kaç günde dokur?

d. Alanı 300 cm^2 olan fayanslarla her biri 12 m^2 olan 6 parça yüzey 8 saatte döşenirse; alanı 400 cm^2 olan fayanslarla her biri 18 m^2 olan 8 parça yüzey kaç saatte döşenir? (Farklı fayansların döşenme süreleri eşittir.)

27. Aşağıdaki problemleri çözünüz.

a. 9 işçinin yapacağı bir işin bitirilmesi, 3 işçinin gelmemesi yüzünden 4 gün gecikiyor. Bu işi 8 işçi kaç günde yapardı?

b. Bir işi Gevher 9 günde, Tunca 12 günde yapmaktadır.
Gevher tek başına 3 gün çalışırsa, kalan işi Tunca kaç günde tamamlar?

c. Bir grup işçi 12 dönümlük bahçenin fındığını 8 günde toplarken, bu işçilerin 3 fazlası 18 dönümlük bahçenin fındığını 6 günde toplamıştır.
Bu işçilerden 8'i, 24 dönümlük bahçenin fındığını kaç günde toplar?

d. Bir balıkçı grubu 160 kg balığı paylaşacaktır. Gruptaki balıkçı sayısı 2 fazla olsaydı, kişi başına 4 kg daha az balık düşecekti.
Gruptaki balıkçı sayısı 3 eksik olsaydı, kişi başına kaç kg balık düşerdi?

28. Aşağıdaki problemleri çözünüz.

a. Alüminyumun yoğunluğunun demirin yoğunluğuna oranı $\frac{9}{26}$ dır.
1080 kg alüminyum ile kalınlığı 2 mm olan 200 m^2 levha üretilirse, 2340 kg demir ile kalınlığı 3 mm olan kaç m^2 levha üretilir?

b. Bir çırağın 2 birim iş ürettiği sürede, bir usta 5 birim iş üretmektedir. Hem çırak hem usta 2 pantolon diktiği sürede 3 gömlek dikmektedir.

3 usta 8 saatte 20 pantolon dikerse,

8 çırak 12 saatte kaç gömlek diker?

c. ν hızıyla hareket eden bir otomobilin, frene basıldıktan sonra durana kadar aldığı yolun uzunluğu; ν^2 ile doğru orantılı, lastiklerle yol arasındaki sürtünme katsayısı ile ters orantılıdır.

80 km/h hızla giden bir otomobil sürtünme katsayısının k olduğu bir yolda 40 m'de durabiliyorsa;

100 km/h hızla giden bir otomobil sürtünme katsayısının $\frac{k}{2}$ olduğu bir yolda kaç m'de durabilir?