Temel Problem-1

$A(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve doğrusal bağımsız $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ ile $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörlerinin taşıyıcı doğrularına paralel olan düzlemin denklemini yazınız.

Çözüm

Denklemini yazacağımız düzlem (E) ve bunun değişen bir noktası $P(x, y, z)$ olsun.

$\vec{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ olur.

$\vec{AP}$ vektörleri $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ vektörlerinin (E) düzlemindeki herhangi iki temsilcisinin doğrusal bileşimleri olarak yazılabileceğinden $\vec{AP}$, $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ vektörleri doğrusal bağımlı olacaklardır. Başka bir deyişle,

$$k_1 \cdot \vec{v_1} + k_2 \cdot \vec{v_2} + k_3 \cdot \vec{AP} = 0$$

eşitliğini sağlayan en az biri sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3 gerçek sayıları bulunabilecektir. Öyleyse; vektörlerin koordinatları ile oluşturacağımız,

$$\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

vektörler matrisinde satırlardan herhangi ikisi uygun kat sayılarla çarpılıp üçüncü satıra eklenirse bu satır sıfır yapılabilir. Bir satırı sıfır olan determinant sıfıra eşit olacağından,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

olur. x, y, z'ye göre 1. dereceden bu denklem (E) düzlemindeki tüm $P(x, y, z)$ noktalarının sağlayacağı denklem olup (E) düzleminin denklemidir.

Örnek-1

$A(-1, 0, 1)$ noktasından geçen ve

$\ell_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ ile $\ell_2 : \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$

doğrularına paralel olan düzlemin denklemini yazınız.

Çözüm

Denklemini yazacağımız düzlem (E) ve bunun değişen bir noktası $P(x, y, z)$ olsun.

$\vec{AP} = (x + 1, y, z - 1)$ ile $\vec{\ell_1}$ ve $\vec{\ell_2}$ doğrularının $\vec{d_1} = (1, -1, 2)$ ve $\vec{d_2} = (-1, 2, 1)$ doğrultu vektörleri doğrusal bağımlı olacaktır.

Düzlemin denklemi,

$$(E): \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ve buradan $(E): 5x + 3y - z + 6 = 0$ olur.

Temel Problem-2

$\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörlerinin ikisine de dik olan vektörlerden birini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ vektörlerinin taşıyıcılarına paralel olan ve $O(0, 0, 0)$ orijininden geçen (E) düzleminin denklemini yazalım:

Bu düzlemin değişen bir noktası $P(x, y, z)$ ise $\vec{OP} = (x, y, z)$, $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ vektörleri doğrusal bağımlıdır. Düzlemin denklemi,

$$(E): \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

olur. Determinantı açıp katsayıları a, b, c, d ile gösterelim. $(E): ax + by + cz + d = 0$ elde edilir. (E) düzleminin $\vec{n} = (a, b, c)$ normal vektörü verilen vektörlere dik bir vektördür.

2. yol

$\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörlerinin ikisine de dik olan vektörlerden biri, bu vektörlerin vektörel çarpımıdır.

$$\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \left(y_1 z_2 - y_2 z_1, -x_1 z_2 + x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1\right)$$

Örnek-2

$\overrightarrow{v_1}=(1,2,-1)$ ve $\overrightarrow{v_2}=(2,-1,1)$ vektörlerinin ikisine de dik olan vektörlerden birini bulunuz.

Çözüm
1. yol
$\overrightarrow{v_1}$ ve $\overrightarrow{v_2}$ vektörlerinin taşıyıcılarına paralel olan ve $O(0,0,0)$ orijininden geçen (E) düzleminin denklemi;

$$(E): \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ve buradan $(E): x-3y-5z=0$ olur. Bu düzlemin $\vec{n}=(1,-3,-5)$ normali verilen vektörlere dik bir vektördür.

2. yol

$$\vec{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=(1,-3,-5)$$

Not: Vektörel çarpım, artık programda olduğundan, artık bu 2. yolu kullanacağız.

Bir de aykırı iki doğru arasındaki en kısa uzaklığı bulalım:

Örnek-3

$\ell_1: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ ve

$\ell_2: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

Çözüm

I. Yol: $\overrightarrow{\ell_1}$ doğrusundan geçen ve $\overrightarrow{\ell_2}$ doğrusuna paralel olan düzleme $\overrightarrow{\ell_2}$ doğrusu üzerindeki bir noktanın uzaklığı aradığımız uzaklık olacaktır.

$\overrightarrow{\ell_1}$ doğrusu üzerinde hemen görebileceğimiz bir nokta $A(0,-1,1)$, $\overrightarrow{\ell_1}$ ve $\overrightarrow{\ell_2}$ doğrularının doğrultu vektörleri $\overrightarrow{d_1}=(-1,2,1)$ ve $\overrightarrow{d_2}=(2,1,-1)$ olur. Buna göre, $\overrightarrow{\ell_1}$ doğrusundan geçen ve $\overrightarrow{\ell_2}$ doğrusuna paralel olan düzlem;

$$(E): \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ve buradan $(E): 3x-y+5z-6=0$ olur.

$\overrightarrow{\ell_2}$ doğrusu üzerindeki $B(-1,2,0)$ noktasının (E) düzlemine uzaklığı;

$$d=\frac{|3\cdot(-1)-2+5\cdot 0-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2}}$$

$$\Rightarrow d=\frac{11\sqrt{35}}{35} \text{ bulunur.}$$

II. Yol: $\overrightarrow{\ell_1}$ doğrusu üzerindeki $A(0,-1,1)$, ve $\overrightarrow{\ell_2}$ üzerindeki $B(-1,2,0)$ noktalarının belirttiği $\overrightarrow{AB}$ vektörünün $\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}\right)$ düzleminin normali üzerindeki dik izdüşümü aranan uzaklık olur.

$\overrightarrow{AB}=\left(-1,3,-1\right)$;

$$\vec{n}=\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=(-3,1,-5)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_n}=\left(\frac{-3}{\sqrt{35}},\frac{1}{\sqrt{35}},\frac{-5}{\sqrt{35}}\right)$$

olur.

$\overrightarrow{\ell_1}$ ve $\overrightarrow{\ell_2}$ doğruları arasındaki uzaklık

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_n}\right|$$

$$\Rightarrow d=\left|(-1,3,-1)\cdot\left(\frac{-3}{\sqrt{35}},\frac{1}{\sqrt{35}},\frac{-5}{\sqrt{35}}\right)\right| \text{ ve}$$

$$\Rightarrow d=\frac{11\sqrt{35}}{35}$$

olarak bulunur.