1.1 – Mantık Nedir?

Etkinlik – 1.1

Sözlüğünüzden, aşağıda verilen sözcüklerin anlamlarını öğreniniz. Sözlüğe baktıktan sonra bu sözcüklerin anlamları ile ilgili düşünceleriniz değişti mi?

Sözcüklerin anlamları üzerinde tartışınız.

a. Doğru	**b.** Yanlış	**c.** Tanım
d. Kavram	**e.** Yargı	**f.** Çıkarım

Mantık doğru yargılar yapmayı öğreten bilimdir. Doğru yargılar, doğru düşünce ve davranışlara temel oluştururlar. Yargıların aktarılmasında en önemli aracın sözcükler olduğu dikkate alınırsa, kullanılan sözcüklerin anlamlarının iyi bilinmesinin ne derece önemli olduğu anlaşılır.

Etkinlik – 1.2

"Ali kalem kutusundaki kurşun kalemlerden 3'ünü almış; uçlarının açık olmadığını görünce kutuya geri koymuştur."

Yukarıda anlatılanların doğru olduğunu varsayarak, kutudaki kalemlerle ilgili aşağıdaki **yargı**ların **doğru**luğunu tartışınız.

a. Kutuda açık uçlu kalem yoktur.

b. Kutuda açık uçlu kalem vardır.

c. Kutuda, uçları açık olmayan kalemlerin sayısı 3'tür.

d. Kutudaki kalemlerden en az 3'ünün uçları açık değildir.

Etkinlik – 1.3

*Eldeki **yargı**lardan sonuç çıkarma işlemine **çıkarım** denir. Eldeki yargılara **öncül** adı verilir. Örneğin;*

"Çalışmayan sınıfını geçemez.

Yiğit çalışıyor.

O halde; Yiğit sınıfını geçer."

*bir **çıkarım**dır. Bu çıkarımda ilk iki yargı **öncül,** son yargı **sonuç**tur.*

Mantıkta, çıkarımların geçerliliğini denetleme (çıkarımların doğru olup olmadığını belirleme) yollarını öğreneceksiniz.

Çıkarımların geçerliliğini denetleme yollarını bilmediğiniz şu anda, sizce aşağıdaki çıkarımlardan hangileri geçerlidir? Geçersiz bulduklarınızı hangi gerekçelerle geçersiz sayıyorsunuz? Tartışınız.

a. 3 ile 5 birer asal sayı olup toplamı çifttir.
O hâlde, iki asal sayının toplamı çifttir.

b. Çift iki doğal sayının çarpımı çift olduğuna göre, tek iki doğal sayının çarpımı tektir.

c. Tanıdığım her Rize'li iyi insandı.
Rize'liler iyi insanlardır.

d. Çalışan kazanır.
Kazandıysa çalışmıştır.

e. Ünye'liler cömerttir.
Ayşe Ünye'lidir.
Öyleyse, Ayşe cömerttir.

f. Ünye'liler cömerttir.
Nazlı da cömerttir.
Öyleyse, Nazlı Ünye'lidir.

g. Ünye'liler cömerttir.
Zeynep cömert değildir.
Öyleyse, Zeynep Ünye'li değildir.

h. Ünye'liler cömerttir.
Soner Ünye'li değildir.
Öyleyse, Soner cömert değildir.

Doğru düşünme konusunda henüz bilimsel bir birikiminizin olmamasına karşın, yukarıda verilen çıkarımlardan hangilerinin geçerli, hangilerinin geçersiz olduklarını bulmuşsunuz-dur. Demek ki, doğru düşünme yeteneği insanın doğasında vardır. Bununla birlikte doğru düşünmenin derli toplu kurallarının konulmasının gerektiğini de sezmişsinizdir.

İşte mantık biliminde bu yapılır.

Mantık, doğru düşünmenin – doğru çıkarımlar yapmanın, yapılan çıkarımların doğruluğunu denetlemenin – kurallarını koyan bilim dalıdır.

Doğru düşünme yeteneği insanın doğasında var olduğuna göre, doğru düşünme kurallarını ilk insanların da uyguladıklarını söyleyebiliriz. Bunla birlikte, bu kuralları sistemli bir biçimde ilk kez ortaya koyan – ya da derleyip toparlayan- İlk Çağ'ın Yunan filozoflarından **Aristo**'dur. Aristo, sizin **Etkinlik-1.3**'te incelediğiniz türden çıkarımları konu edinmiştir. O'nun koyduğu kurallar bütünü günümüzde **klasik mantık** diye bilinir.

Mantık ve Dil

"Mantık" sözcüğü Arapça kökenli olup *"konuşma, dile getirme"* anlamına gelen *"nutuk"* sözcüğünden türetilmiştir. Bu isim bile mantık ile dilin nasıl sıkı sıkıya bağlı olduklarını anlatmaya yeter. Gerçekten, düşüncelerin belirtilmesinde en önemli araç dildir. Bununla birlikte, yargıların doğru aktarılmasını sağlamada sözler zaman zaman yetersiz kalabilir. Sözlerle belirtilen düşünceler sözlerin söyleniş biçiminden, sözcüklere değişik kişilerce değişik anlamlar yüklenmesinden etkilenebilir.

Etkinlik – 1.4

Aşağıdaki cümlelerin her biri iki anlama gelebilir. Gerekli değişiklikleri yaparak, bu cümleleri yalnız bir anlama gelen biçimlere dönüştürünüz.

a. Bu gece gezintileri onu yordu.

b. İpek iki kulplu tencere satın almış.

c. Ülkü teyzesiyle oynasın.

d. Çocuk kitabı okuyor.

Etkinlik – 1.5

"Çalışırsan kazanırsın." cümlesini öyle bir vurgulama ile söyleyiniz ki, *"Ancak çalışırsan kazanırsın."* anlamına gelsin.

Etkinlik – 1.6

Alper, *"Temmuzda Bodrum'a veya Fethiye'ye gideceğim."* demişse, sizce aşağıdakilerden hangisini anlatmak istemiştir?

a. *"Temmuzda ya Bodrum'a ya da Fethiye'ye gideceğim."*

b. *"Temmuzda ya Bodrum'a ya Fethiye'ye ya da hem Bodrum'a hem de Fethiye'ye gideceğim."*

Aynı dili konuşan insanların bile sözlerle aktarılan yargıları nasıl farklı algılayabileceği ortada iken bir de, bir dilde yapılan çıkarımların başka bir dile çevrildiğini düşününüz. Sözcüklerin diğer dildeki tam karşılıklarını bulmada büyük sorunlar yaşanabilecektir. Oysa, çıkarımlar dil ve kültür farklılıklarından etkilenmemelidir. Bütün bunlar, yargıları açık ve kesin olarak aktaracak evrensel bir dilin gerekliliğini ortaya koymuştur. Bu sorun, mantıkta **sözcüklerin veya sözlerin yerine sembollerin kullanılması** ile çözümlenmiştir.

Aristo da zaman zaman sembol kullanmıştır. Ancak mantıkta ve matematikte sembolik evrensel bir dil oluşturma çabaları Alman filozofu G.W. Leibniz (1646–1716) ile başlar. Leibniz'in çalışmaları bugünkü bilgisayar biliminin de temelini oluşturur.

Matematiksel mantık veya sembolik mantık diye de adlandırılan bugünkü modern mantığın kurucuları, Leibniz'in açtığı yolda çalışmalar yapan İngiliz matematikçi ve mantıkçı G. Boole (1815–1864) ile Alman matematikçi ve mantıkçı G. Frege (1848–1925) dir.

İngiliz filozof ve matematikçileri A.N. Whitehead (1861–1937) ve B. Russell (1972–1970) da mantık bilimini geliştirerek tüm matematiği mantığa indirgeyen çalışmalar yapmışlardır.

Bugün sembolik mantık doğru düşünmenin bilimi olmasının yanında matematiğin de dili durumundadır.

Terim, Tanımsız Terim

Etkinlik – 1.7

Aşağıdaki sözcüklerin günlük dildeki anlamları ile matematikteki anlamlarını açıklayınız.

a. Nokta	**b.** Doğru	**c.** Daire
d. Işın	**e.** Küp	**f.** Küme

Etkinlik – 1.8

Matematikte, günlük konuşma dilindeki anlamlarından başka özel anlamlar yüklenerek kullanılan sözcüklere örnekler veriniz.

Tanım – 1.1

Bir bilim dalında, o bilim dalına özgü kavramlara ad olarak getirilmiş sözcüklere veya sözlere o bilim dalının ***terim****leri denir.*

Bir terim günlük konuşma dilinden alınmış bir sözcük olabileceği gibi, yalnız o bilim dalında geçerli bir anlamı olan bir sözcük de olabilir. Günlük dildeki bir sözcüğün bir bilim dalında bir kavrama karşılık getirilmesi, doğal olarak bu kavramla o sözcüğün anlamı arasında bir benzerlik kurulması sonucu olur. Matematikteki nokta ile *"bilet satış noktası"*ndaki noktayı; matematikteki ışın ile *"ışık ışınları"*ndaki ışını düşününüz. Aynı benzerlikler kurularak, bir bilim dalında anlamı olan bir terim de zamanla günlük dilde kullanılan bir sözcük durumuna gelebilir.

Bir terimin anlamının açıklanmasına o terimin **tanım**lanması denir. Bir terimi tanımlamak için başka terimleri kullanırız. Örneğin; matematikte *"açı"* terimi, *"Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimidir."* biçiminde tanımlanır. Bu tanımda geçen *"nokta"*, *"ışın"*, *"birleşim"* terimleri önceden tanımlanmış olmalıdır. Burada karşımıza bir sorun çıkar. Her terimi tanımlanmış terimlerle tanımlamaya kalkışırsak, elimizde tanımlanmış terim kalmaz. Bu yüzden bazı temel kavramları tanımsız terimlerle adlandırma zorunluluğu vardır. Tanımsız olarak alınan terimler, sözler veya şekillerle mümkün olduğu kadar açıklanır; bunların algılanması sezgiye bırakılır.

Nokta, **doğru**, **düzlem**, **küme**, **değişken**, **eşitlik** terimleri matematikteki tanımsız terimlerden bazılarıdır.

1.2 – Önermeler Mantığı

1.2.1 – Önermenin Tanımı

Etkinlik – 1.9

Aşağıdaki ifadelerden hangileri için doğru, hangileri için yanlış diyebilirsiniz?

a. İki kere iki dört etmez.

b. 1 ile 3'ün toplamı 5'ten küçüktür.

c. $3 \cdot 4 - 2 = 6$

d. Kitap en iyi arkadaştır.

e. Zeynep çok akıllıdır.

f. Bu şarkı harika.

g. Kaç yaşındasın?

h. Günaydın.

i. Ders çalışırken masanızda bir sözlük bulundurunuz.

j. Sözlük ve ansiklopedi kullanmanız, çalışmanızın verimliliğini arttırır.

Tanım – 1.2

Doğru ya da yanlış bir yargı (hüküm) bildiren ifadeye ***önerme*** *denir.*

Örneğin;

"Kızılırmak Karadeniz'e dökülür.";

"$2 + 3 = 7$"

ifadeleri birer önermedir. Bunlardan birincisi doğru, ikincisi yanlış bir yargı bildirir.

- Önermeler p, q, r, … gibi küçük harflerle gösterilirler.
- **Doğru** ve **yanlış** nitelemelerine önermenin **doğruluk değerleri** adı verilir.

  Bir önermenin **doğru** olması durumu **D** harfi ya da **1** rakamı ile; **yanlış** olması durumu **Y** harfi ya da **0** rakamı ile belirtilir.

  Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya **doğruluk tablosu** denir.
- **p** doğru bir önermeyi, **q** yanlış bir önermeyi, **r** doğruluğu ya da yanlışlığı belirtilmeyen bir önermeyi gösteriyorsa, bunların doğruluk tabloları aşağıdaki gibi olur.

p
D

ya da

p
1

;

q
Y

ya da

q
0

;

r
D
Y

ya da

r
1
0

- Doğruluk değerleri belirtilmeyen p ve q gibi iki önermeden p doğru iken q doğru ya da yanlış; p yanlış iken q yine doğru ya da yanlış olabilir. O hâlde, iki önermenin birlikte doğruluk değerleri yandaki gibidir.

p	**q**
1	1
1	0
0	1
0	0

Etkinlik – 1.10

a. Üç önermenin doğruluk değerleri kaç değişik durumda olabilir? Bu durumları **doğruluk tablosu**nda gösteriniz.

b. Dört önermenin doğruluk değerleri kaç değişik durumda olabilir? Bu durumları doğruluk tablosunda gösteriniz.

c. **n** önermenin doğruluk değerleri kaç değişik durumda olabilir?

- Bazı önermelerin doğruluk değeri belli bir **yorumlama** yapılmazsa belirsizdir. Örneğin, *"Ali Can'dan uzun boyludur."* önermesine ilk bakışta "**doğru**dur" ya da "**yanlış**tır" denemez. Ancak Ali ile Can'ın boyları belirtilirse bu önerme doğruluk değeri kazanır.

  Bir önermenin doğruluk değerinin belirlenmesi için ek bilgilerin verilmesi işlemine **anlam belirlemesi** veya **yorumlama** denir. Bu durumda önerme tanımını genişleterek aşağıdaki gibi yaparız:

  *"Belli bir yorumlama ile bir doğruluk değeri kazanan ifadelere **önerme** denir."*

- Polonyalı bilgin Mikolaj Kopernik (1473–1543) 16. yüzyılda,

  "Dünya, Güneş'in etrafında dönüyor."

  demiştir. O günlerde birkaç kişi bu önermeyi **doğru** diye nitelerken, bunların dışındaki herkes **yanlış** diye niteliyordu.

  Bir sözün kimilerince doğru, kimilerince yanlış sayılması, o sözün önerme olup olmadığını belirlemek için bir ölçüt değildir. Dünya, Güneş'in etrafında ya dönüyordur ya da dönmüyordur. Kopernik'in sözü ya doğrudur ya da yanlıştır. Öyleyse bu söz bir önermedir.

  Bazı önermelerin doğruluk değerini belirlemek için **gözlem**ler ve **deney**ler yapmak gerekebilir.

- Bir sözün önerme olması için **nesnel** bir yargı taşıması gerekir. Örneğin;

  "Ayşegül'ü seviyorum."

  türünden **öznel** bir yargı taşıyan söze "doğru" ya da "yanlış" diyemezsiniz.

- *"Ali'nin çalışırsa sınıfını geçeceği doğru ve Ali'nin sınıfını geçtiği doğru ise Ali çalışmıştır."*

  türünden bir önermenin doğruluk değeri bir **mantık hesabı** ile belirlenir. Bunu ilerdeki sayfalarımızda yapacağız.

- *"Son peygamber Hz. Muhammet'tir."*.

  önermesini müslümanlar doğru, müslüman olmayanlar yanlış kabul eder.

  "20. yüzyılın en büyük devlet adamı K. Atatürk'tür."

  önermesi de aynı türden bir önermedir.

  Ancak; mantık biliminin dil, din, kültür ve ırk farklılıklarından etkilenmemesi gerektiği düşünülürse, bu tür önermelerin mantıkta ele alınmayacağı anlaşılır. Mantıkta inceleyeceğimiz önermeler, doğruluk değeri üzerinde herkesin birleştiği önermeler olacaktır.

Bir Önermenin Olumsuzu

Tanım – 1.3

Bir önermenin bildirdiği yargının yerine bunun olumsuzunun konulmasıyla elde edilen önermeye ilk önermenin olumsuzu (değili) denir.

- **p** önermesinin olumsuzu $\mathbf{p}'$ ile gösterilir.

  p doğru ise p' yanlış; p yanlış ise p' doğrudur.

p	$\mathbf{p}'$
1	0
0	1

Örnekleri inceleyiniz:

p	: 15 asal sayıdır.	(0)
p'	: 15 asal sayı değildir.	(1)
q	: Ünye Karadeniz bölgesindedir.	(1)
q'	: Ünye Karadeniz bölgesinde değildir.	(0)
r	: $23+4=27$	(1)
r'	: $23+4\neq 27$	(0)
t	: Her kuş uçar.	(0)*
t'	: Her kuşun uçtuğu doğru değildir.	(1)

*(*) "Her kuş uçar." önermesi ile bunun olumsuzunu **niceleyiciler mantığı** bölümünde yeniden ele alacağız.*

İki önermenin denkliği

Tanım – 1.4

Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye denk önermeler denir.

p önermesi q önermesine denk ise $p \equiv q$ biçiminde; değilse $p \not\equiv q$ biçiminde gösterilir.

Örneğin; p, q, r, s önermeleri

p :	Ay Dünya'dan küçüktür.	(1)
q :	$2+3\neq 5$	(0)
r :	Bir hafta 7 gündür.	(1)
s :	Ankara bir başkent değildir.	(0)

olarak verilirse,

$p\equiv q$, $q\equiv s$ ve $p\not\equiv q$ olur.

Etkinlik – 1.11

Etkinlik–1.9'da verilen ifadelerden hangileri **önerme**dir? Önerme olanların **olumsuz**larını yazınız.

Etkinlik – 1.12

Aşağıda verilen ifadelerden hangileri önermedir? Önerme olanların olumsuzlarını yazınız. Denk olan önermeler varsa belirtiniz.

a. Her gün süt içerim.
b. Yarın İstanbul'a kar yağacak.
c. Terimlerin tanımlarını öğrenmeliyim.
d. Beşiktaş Ankara'nın ilçesidir.
e. $C+O_2\rightarrow CO_2$
f. Bu problem böyle mi çözülür?
g. $126\neq 2\cdot 3^2\cdot 7$
h. Fatih Sultan Mehmet ceylân eti yedi.
i. Meltem derslerini dikkatle izlemelidir.
j. Alper çok akıllıdır.
k. Erol dün okula gitmemiş.
l. $6^2+8^2=10^2$ olduğu doğru değildir.
m. Murat'ın başkan olmasını öneriyorum.
n. Murat'ın başkan olmasını önerdim.
o. Bu etkinlikteki her önerme yanlıştır.
p. Bu etkinlikteki her önerme doğrudur.

Etkinlik – 1.13

Bir önermenin olumsuzunun olumsuzu kendisine denktir.

Yandaki tabloyu tamamlayarak $(p')'\equiv p$ olduğunu gösteriniz.

p	p'	$(p')'$
1		
0		

Etkinlik – 1.14

Önerme olan ve önerme olmayan ifadeler yazınız. Bunlardan önerme olanlarının olumsuzlarını da yazınız.

1.2.2 – Bileşik önermeler

Etkinlik – 1.15

Aşağıdaki önermeleri inceleyiniz. Bu önermeleri daha basit önermelere ayırabiliyor musunuz?

a. Alper **ve** Murat müdürle görüştü.
b. Alper **ile** Murat müdürle görüştü.
c. Alper veya Murat müdürle görüştü.
d. Alper müdürle görüştü **ise** Murat da görüşmüştür.
e. **Ancak ve ancak** Alper müdürle görüştü **ise** Murat da görüşmüştür.
f. Alper'in müdürle görüştüğü doğru **değil**dir.

Tanım – 1.5

*Bir veya daha fazla önermeden yeni önermeler elde etmek için kullanılan **ve**, **veya**, **ise**, **değil**, **ancak ve ancak ... ise** gibi sözcük ya da sözcük gruplarına **önerme eklemi** denir.*

Günlük dilde **önerme eklemi** olarak kullanılan sözcükler genellikle çok anlamlı olduğu gibi, aynı eklem için farklı sözcükler de kullanılır. Bu durumdan doğabilecek çok anlamlılığı önlemek için mantıkta önerme eklemi olarak tek anlamlı özel semboller kullanılır.

Mantıkta **Tanım–1.5**'te verilenlerden başka önerme eklemleri de kullanılır. Ancak matematikte burada verilenler yeterli olacağı için biz sadece bu eklemlerden söz edeceğiz.

Tanım – 1.6

*Önerme eklemleri kullanılarak elde edilen yeni önermelere **bileşik önermeler**; bir bileşik önermeyi oluşturan önermelere de bu bileşik önermenin **bileşen**leri denir. Bileşenlerine ayrılamayan önermelere **basit önerme**ler adı verilir.*

Örneğin,

1 *"Arda evde **değil**dir.";*
2 *"Arda **ve** Yüksel evdedirler.";*
3 *"Arda **veya** Yüksel evdedirler";*
4 *"Arda evde **ise** Yüksel evdedir.";*
5 *"**Ancak ve ancak** Arda evde **ise** Yüksel evdedir.";*

önermeleri birer bileşik önermedir. Bu bileşik önermeleri oluşturan,

p: *"Arda evdedir."* ile
q: *"Yüksel evdedir."*

önermeleri birer basit önermedir.

Mantıkta **ve** eklemi yerine "$\wedge$" sembolü; **veya** eklemi yerine "$\vee$" sembolü kullanılır. Buna göre,

2 önermesi $\mathbf{p \wedge q}$ biçiminde;
3 önermesi $\mathbf{p \vee q}$ biçiminde gösterilir.
1 önermesinin $\mathbf{p'}$ biçiminde gösterildiğini biliyorsunuz.

4 ve 5 önermelerini **koşullu önermeler** başlığı altında inceleyeceğiz.

Bileşik önermelerin doğruluk değerleri

Mantıkta; "$\vee$" ve "$\wedge$" eklemlerine, hemen hemen günlük dildeki anlamları yüklenerek, $\mathbf{p \vee q}$ ve $\mathbf{p \wedge q}$ önermelerinin aşağıda verilen doğruluk değerleri aksiyom olarak alınmıştır.

Doğru olarak kabul edilen önermeye **aksiyom**; doğru bir yargılama ile doğruluğunun gösterilmesi gereken önermeye **teorem** denildiğini şimdiden söyleyelim.

Aksiyom – 1.1

***p** ve **q** birer önerme, $\wedge$ önerme eklemi olduğuna göre $\mathbf{p \wedge q}$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.*

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

q

	$\wedge$	**1**	**0**
p	**1**	1	0
	0	0	0

Tabloda görüldüğü gibi; $p \wedge q$ önermesi bileşenlerinin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

Aksiyom – 1.2

***p** ve **q** birer önerme, $\vee$ önerme eklemi olduğuna göre $\mathbf{p \vee q}$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.*

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

q

	$\vee$	**1**	**0**
p	**1**	1	1
	0	1	0

Tabloda görüldüğü gibi; $p \vee q$ önermesi bileşenlerinin her ikisi de yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

"$\vee$" ve "$\wedge$" işlemlerinin özelikleri

a ve b gibi iki sayı arasına "+" işareti koyarak $a+b$ sayısını elde ederiz. Burada "+" işareti **toplama işlemi**ni "$a+b$" de **toplam**ı gösterir.

p ve q gibi iki önermeden önerme eklemleri kullanarak bir bileşik önerme elde etme eylemi de bir **işlem** yapmadır.

Bu yaklaşımla;

- "$\wedge$" sembolü ile gösterilen işleme
  kesişme işlemi,
  $\mathbf{p \wedge q}$ önermesine **kesişim**;
- "$\vee$" sembolü ile gösterilen işleme
  birleşme işlemi,
  $\mathbf{p \vee q}$ önermesine **birleşim**;
- $(...)'$ sembolü ile gösterilen işleme
  değilleme işlemi,
  $(...)'$ önermesine **... nin değili** denir.

Biz **kesişme işlemine** kısaca "$\wedge$ **işlemi**", **birleşme işlemine** "$\vee$ **işlemi**" diyeceğiz.

Tek kuvvet özeliği

Teorem – 1.1

$\mathbf{p}$ bir önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.

a. $\mathbf{p} \wedge \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}$ *($\wedge$ işleminin tek kuvvet özeliği)*

b. $\mathbf{p} \vee \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}$ *($\vee$ işleminin tek kuvvet özeliği)*

Etkinlik – 1.16

a. Yandaki doğruluk tablosunu tamamlayarak $\mathbf{p} \wedge \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}$ olduğunu gösteriniz.

p	**p**	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}$
1	1	
0	0	

b. Doğruluk tablosu yardımıyla $\mathbf{p} \vee \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}$ olduğunu gösteriniz.

Değişme özeliği

Teorem – 1.2

$\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$ birer önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.

a. $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \equiv \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ *($\wedge$'nin değişme özeliği)*

b. $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \equiv \mathbf{q} \vee \mathbf{p}$ *($\vee$'nın değişme özeliği)*

Etkinlik – 1.17

a. Yandaki doğruluk tablosunu tamamlayarak $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \equiv \mathbf{q} \vee \mathbf{p}$ olduğunu gösteriniz.

p	**q**	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\mathbf{q} \vee \mathbf{p}$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

b. Doğruluk tablosu yardımıyla $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \equiv \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ olduğunu gösteriniz.

Birleşme özeliği

Teorem – 1.3

$\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{r}$ birer önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.

a. $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r}$ *($\wedge$'nin birleşme özeliği)*

b. $\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}$ *($\vee$'nın birleşme özeliği)*

Etkinlik – 1.18

a. Aşağıdaki doğruluk tablosunu tamamlayarak $\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}$ olduğunu gösteriniz.

p	**q**	**r**	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\mathbf{q} \vee \mathbf{r}$	$\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$	$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}$
1	1	1				
1	1	0				
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

b. Doğruluk tablosu yardımıyla $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r}$ olduğunu gösteriniz.

- **Teorem–1.3**'e dayanılarak, art arda $\wedge$ işlemleri ile art arda $\vee$ işlemleri arasındaki parantezler atılabilir:

  $p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$ ve

  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$ gibi.

- "$\wedge$" ve "$\vee$" işlemlerinin hem değişme hem de birleşme özelikleri olduğundan, aşağıdaki denklikler geçerlidir:

  1 $p \wedge q \wedge r \equiv p \wedge r \wedge q \equiv q \wedge p \wedge r \equiv r \wedge p \wedge q \equiv \ldots$

  2 $p \vee q \vee r \equiv p \vee r \vee q \equiv q \vee p \vee r \equiv r \vee p \vee q \equiv \ldots$

Dağılma özeliği

Teorem – 1.4

$\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{r}$ birer önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.

a. $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})$

($\wedge$'nin $\vee$ üzerine soldan dağılma özeliği)

b. $\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$

($\vee$'nın $\wedge$ üzerine soldan dağılma özeliği)

c. $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee \mathbf{r} \equiv (\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$

($\vee$'nın $\wedge$ üzerine soldan dağılma özeliği)

d. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r} \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})$

($\wedge$'nin $\vee$ üzerine soldan dağılma özeliği)

Etkinlik – 1.19

Doğruluk tablosu yardımıyla,

a. $\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$ olduğunu gösteriniz.

b. $\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})$ olduğunu gösteriniz.

Kesişim ve birleşimin değilleri

Teorem – 1.5

De Morgan Teoremi

p *ile* **q** *birer önerme olduğuna göre aşağıdaki denklikler geçerlidir.*

a. $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})' \equiv \mathbf{p}' \vee \mathbf{q}'$

b. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})' \equiv \mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}'$

Etkinlik – 1.20

a. Aşağıdaki doğruluk tablosunu tamamlayarak $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})' \equiv \mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}'$ olduğunu gösteriniz.

p	**q**	**p′**	**q′**	**p ∨ q**	**(p ∨ q)′**	**p′ ∧ q′**
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

b. Doğruluk tablosu yardımıyla $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})' \equiv \mathbf{p}' \vee \mathbf{q}'$ olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 1.21

"**1**" doğru bir önermeyi,

"**0**" yanlış bir önermeyi,

"**p**" bir önermeyi gösterdiğine göre;

aşağıdaki denklikleri doğruluk tablosu yardımıyla gösteriniz.

a. $p \wedge 1 \equiv p$ **b.** $p \wedge 0 \equiv 0$ **c.** $p \vee 1 \equiv 1$

d. $p \vee 0 \equiv p$ **e.** $p \vee p' \equiv 1$ **f.** $p \wedge p' \equiv 0$

g. $p \vee p \equiv p$ **h.** $p \wedge p \equiv p$

Örnek – 1.1

$(p \vee q)' \vee (q' \wedge r)' \equiv 0$ olduğuna göre,

$s \equiv \left[(p \wedge q') \wedge (p' \vee q')'\right] \vee \left[p \wedge (q \wedge r)'\right]'$

önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Çözüm

$(p \vee q)' \vee (q' \wedge r)' \equiv 0$ ise

$(p \vee q)' \equiv 0$ ve $(q' \wedge r)' \equiv 0$ olur.

Bu denkliklerden

$p \vee q \equiv 1$ ve $q' \wedge r \equiv 1$ olduğu;

bunlardan da,

$p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $r \equiv 1$ olduğu bulunur.

Bu doğruluk değerleri s önermesinde yerlerine konulursa;

$s \equiv \left[(1 \wedge 0') \wedge (1' \vee 0')\right]' \vee \left[1 \wedge (0 \wedge 1)'\right]'$

$\Rightarrow s \equiv \left[(1 \wedge 1) \wedge (0 \vee 1)'\right] \vee [1 \wedge 0']'$

$\Rightarrow s \equiv (1 \wedge 1') \vee (1 \wedge 1)'$

$\Rightarrow s \equiv (1 \wedge 0) \vee 1'$

$\Rightarrow s \equiv 0 \vee 0$

$\Rightarrow s \equiv 0$ bulunur.

("⇒" işareti **ise** anlamında kullanılmıştır.)

Örnek – 1.2

p'nin doğru bir önerme olduğu bilindiğine göre,

$s \equiv [(p \wedge q') \wedge (p' \vee q')] \vee [p \wedge (q \wedge r)]$

önermesini en sade biçimde yazınız.

Çözüm

$p \equiv 1$ değerini s önermesinde yerlerine koyarsak;

$s \equiv [(1 \wedge q') \wedge (0 \vee q')] \vee [1 \wedge (q \wedge r)]$

$\Rightarrow s \equiv (q' \wedge q') \vee (q \wedge r)$

$\Rightarrow s \equiv q' \vee (q \wedge r)$ *(tek kuvvet özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv (q' \vee q) \wedge (q' \vee r)$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv 1 \wedge (q' \vee r)$

$\Rightarrow s \equiv q' \vee r$ bulunur.

Örnek – 1.3

Aşağıdaki denkliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

b. $(p \wedge q) \vee q \equiv q$

c. $[(p' \wedge q) \vee p] \wedge q' \equiv p \wedge q'$

Çözüm

Verilen denkliklerin doğruluğu, doğruluk tabloları ile gösterilebilir. Bunu siz yapınız.

Biz işlemlerin özeliklerinden yararlanacağız :

a. $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \wedge p) \vee (p \wedge q)$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow p \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (p \wedge q)$ *(tek kuvvet özeliği)*

elde edilir.

$p \vee (p \wedge q)$ önermesinde dağılma özeliği bir kere daha kullanılırsa yeniden $p \wedge (p \vee q)$ elde edilir. Bir kısır döngüye girilmiş olur. Başka bir yol düşünelim.

$p \equiv p \vee 0$ denkliğini kullanalım:

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee 0) \wedge (p \vee q)$

$\Rightarrow p \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (0 \wedge q)$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow p \wedge (p \vee q) \equiv p \vee 0$

$\Rightarrow p \wedge (p \vee q) \equiv p$ bulunur.

b. $(p \wedge q) \vee q \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge 1)$ $(q \equiv q \wedge 1)$

$\Rightarrow (p \wedge q) \vee q \equiv (p \wedge q) \vee (1 \wedge q)$ *(değişme özeliği)*

$\Rightarrow (p \wedge q) \vee q \equiv (p \vee 1) \wedge q$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow (p \wedge q) \vee q \equiv 1 \wedge q$

$\Rightarrow (p \wedge q) \vee q \equiv q$ bulunur.

c. $s \equiv [(p' \wedge q) \vee p] \wedge q'$ diyelim.

$\Rightarrow s \equiv [(p' \vee p) \wedge (q \vee p)] \wedge q'$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv [1 \wedge (q \vee p)] \wedge q'$

$\Rightarrow s \equiv (q \vee p) \wedge q'$

$\Rightarrow s \equiv (q \wedge q') \vee (p \wedge q')$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv 0 \vee (p \wedge q')$

$\Rightarrow s \equiv p \wedge q'$ bulunur.

Örnek – 1.4

$$s \equiv \left[p' \wedge (q' \wedge r)'\right]' \vee (p \vee q')'$$

önermesini en sade biçimde yazınız.

Çözüm

$$s \equiv \left[p' \wedge (q' \wedge r)'\right]' \vee (p \vee q')'$$

$\Rightarrow s \equiv [p \vee (q' \wedge r)] \vee (p' \wedge q)$ *(De Morgan Teoremi)*

$\Rightarrow s \equiv p \vee (q' \wedge r) \vee (p' \wedge q)$ *(birleşme özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv (q' \wedge r) \vee p \vee (p' \wedge q)$ *(değişme özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv (q' \wedge r) \vee [(p \vee p') \wedge (p \vee q)]$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv (q' \wedge r) \vee [1 \wedge (p \vee q)]$

$\Rightarrow s \equiv (q' \wedge r) \vee (p \vee q)$

$\Rightarrow s \equiv [(q' \wedge r) \vee q] \vee p$ *(birleşme ve değişme özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv [(q' \vee q) \wedge (r \vee q)] \vee p$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv [1 \wedge (r \vee q)] \vee p$

$\Rightarrow s \equiv r \vee q \vee p$ elde edilir.

Etkinlik – 1.22

Önerme işlemlerinin özeliklerinden yararlanarak, aşağıda verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz. Doğruluk tablosu yardımıyla, bulduğunuz denkliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $(p \vee q) \vee p'$ **b.** $p \wedge (q \wedge p')$

c. $(p \wedge q) \vee q'$ **d.** $(p \vee q) \wedge q'$

e. $(p \vee q) \wedge (p' \vee q)$ **f.** $(p \wedge q) \vee (p \wedge q')$

Etkinlik – 1.23

$(p \vee q) \wedge (q' \vee r)$ doğru bir önerme olduğuna göre, $p \vee r$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Etkinlik – 1.24

$(p \wedge q) \vee q' \equiv 1$ ise, $p' \wedge q$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

1.2.3 – Koşullu önermeler

Etkinlik – 1.25

A okulu ile B okulu futbol maçı yapacaklardır. A takımındaki Volkan'ın, sakatlığı nedeniyle maç kadrosuna girmesi şüphelidir. A okulundan Sezen arkadaşlarına, *"Volkan oynarsa, maçı kazanırız."* diyor.

Bu önermenin, *"Volkan oynayacak **ise** maçı kazanacağız."* anlamına geldiğine dikkat ediniz.

a. Sezen'in sözü, *"Maçı kazanmamızın tek yolu Volkan'ın oynamasıdır."* anlamına mı gelir? Tartışınız.

b. Maç oynanıp bittiğinde; Volkan oynamış ve maçı A takımı kazanmış ise Sezen'in sözü doğrulanmış olur mu?

c. Volkan oynamış ve maçı A takımı kazanamamış ise Sezen'in sözü doğrulanmış olur mu?

d. Volkan oynamamış ve maçı A takımı kazanmış ise Sezen'in sözü yanlış mı olur?

e. Volkan oynamamış ve maçı A takımı kazanamamış ise Sezen'in sözü yanlış mı olur?

f. *"Volkan oynar**sa** A takımı maçı kazanır."* önermesini, *"Volkan oynayacak"* bileşenini **p** ile; *"A takımı maçı kazanacak."* bileşenini **q** ile; **ise** eklemini "⇒" sembolü ile göstererek **p ⇒ q** biçiminde sembolleştirebiliriz.

Tartışmalarınızın sonuçlarına göre, **p ⇒ q** önermesinin doğruluk değerlerini aşağıdaki tablolara yerleştiriniz.

p	q	p ⇒ q
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

	⇒	**1**	**0**
p	**1**		
	0		

(q sütunlarda)

Tanım – 1.7

*p ve q gibi iki önermenin, **koşul eklemi** adı verilen **ise** sözcüğü ile birleştirilmesiyle elde edilen bileşik önermeye **koşullu önerme** denir.*

✚ **p ise q** önermesi **p ⇒ q** biçiminde gösterilir. **p ⇒ q** önermesinde:

- **p** bileşenine **hipotez**;
- **q** bileşenine **hüküm**

adı verilir. Hipotez hükmün **yeterli koşul**u; hüküm hipotezin **gerekli koşul**udur.

Buna göre, **p ⇒ q** önermesi,

- ***"q için p yeterlidir."*** ya da
- ***"p için q gereklidir."***

biçimlerinde de ifade edilebilir.

Örneğin,

- *"**Erol'un çalışması** sınıfını geçmesi için **yeterlidir.**"*
- *"Erol çalışırsa **sınıfını geçmesi gereklidir.**"*

önermeleri aynı anlamı taşır.

"Erol çalışırsa sınıfını geçer." önermesi, Erol'un sınıfını geçmesi için tek yolun **çalışması** olduğunu bildirmez. "Erol çalışmaz **ama başka yollarla da** sınıfını geçebilir." anlamını saklı tutar.

Mantıkta, p ⇒ q önermesinin aşağıda verilen doğruluk değerleri aksiyom olarak alınmıştır.

Aksiyom – 1.3

p *ve* **q** *birer önerme,* ⇒ *önerme eklemi olduğuna göre* **p ⇒ q** *önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.*

p	q	p ⇒ q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

	⇒	**1**	**0**
p	**1**	1	0
	0	1	1

(q sütunlarda)

Tabloda görüldüğü gibi; p ⇒ q önermesi p'nin doğru ve q'nun yanlış olması durumunda yanlış; diğer durumlarda doğrudur.

Etkinlik – 1.26

Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu nasıl açıklarsınız?

a. Paris Amerika'da ise Ankara Türkiye'dedir.

b. Aristo Türk ise ben otobüsüm.

Etkinlik – 1.27

p : Erol çalışacak.
q : Erol sınıfını geçecek.

önermeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki önermeleri sembolleştiriniz.

a. Erol çalışırsa sınıfını geçer.
b. Erol çalışmaz veya sınıfını geçer.
c. Erol çalışmazsa sınıfını geçemez.
d. Erol sınıfını geçecekse çalışacaktır.
e. Erol sınıfını geçmeyecekse çalışmayacaktır.
f. Erol çalışacak ve sınıfını geçemeyecektir.

Etkinlik – 1.28

p : Sulama yapılacak.
q : Ürün bol olacak.

önermeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki önermeleri sözle ifade ediniz.

a. $p \Rightarrow q$ **b.** $q \Rightarrow p$ **c.** $p' \Rightarrow q'$
d. $q' \Rightarrow p'$ **e.** $p' \vee q$ **f.** $p \wedge q'$

$\Rightarrow$ işleminin özelikleri

Teorem – 1.6

p *ile* **q** *birer önerme olduğuna göre,*

$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q} \equiv \mathbf{p}' \vee \mathbf{q}$

denkliği geçerlidir.

$p \Rightarrow q$ önermesinin $p' \vee q$ biçiminde gösterilmesine, **p ⇒ q önermesinin indirgenmesi** denir.

Örneğin ;

“Hastalanırsam doktora giderim.” önermesi,

“Hastalanmam veya doktora giderim.” önermesi ile aynı anlamı taşır.

Etkinlik – 1.29

Doğruluk tablosu kullanarak,

$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q} \equiv \mathbf{p}' \vee \mathbf{q}$

olduğunu gösteriniz.

Tanım – 1.8

1 $\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}$ *önermesine* $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ *’nun* ***karşıtı;***
2 $\mathbf{p}' \Rightarrow \mathbf{q}'$ *önermesine* $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ *’nun* ***tersi;***
3 $\mathbf{q}' \Rightarrow \mathbf{p}'$ *önermesine* $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ *’nun* ***karşıt tersi***
denir.

Örneğin,

“Yağmur yağmış ise çamaşırlar ıslanmıştır.”

önermesinin **karşıtı**,

“Çamaşırlar ıslanmışsa yağmur yağmıştır.”;

tersi,

“Yağmur yağmamış ise çamaşırlar ıslanmamıştır.”;

karşıt tersi,

“Çamaşırlar ıslanmamışsa yağmur yağmamıştır.”

önermeleridir.

Teorem – 1.7

p *ile* **q** *birer önerme olduğuna göre,*

$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q} \equiv \mathbf{q}' \Rightarrow \mathbf{p}'$

denkliği geçerlidir.

Etkinlik – 1.30

$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q} \equiv \mathbf{q}' \Rightarrow \mathbf{p}'$ denkliğinin doğruluğunu hem işlem özeliklerinden hem de doğruluk tablosundan yararlanarak gösteriniz.

Etkinlik – 1.31

Hem doğruluk tablosundan hem de işlem özeliklerinden yararlanarak aşağıdaki denkliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $p \Rightarrow p \equiv 1$ **b.** $p \Rightarrow p' \equiv p'$ **c.** $p \Rightarrow 1 \equiv 1$
d. $p \Rightarrow 0 \equiv p'$ **e.** $1 \Rightarrow p \equiv p$ **f.** $0 \Rightarrow p \equiv 1$

Koşullu önermenin olumsuzu

$p \Rightarrow q$ önermesinin olumsuzu,

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ *(Teorem–1.6)*

denkliğinden yararlanılarak bulunabilir:

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

$\Rightarrow (p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)'$

$\Rightarrow (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q})' \equiv \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}'$ elde edilir.

Örneğin,

“Para kazanırsam tatile giderim.”

önermesinin olumsuzu

“Para kazanırım ve tatile gitmem.” olur.

$\Rightarrow$ işleminin dağılma özeliği

$\Rightarrow$ işleminin $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri üzerine soldan dağılma özeliği vardır.

Teorem – 1.8

p, **q** *ve* **r** *birer önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.*

a. $\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{r})$

b. $\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \vee (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{r})$

Etkinlik – 1.32

Teorem–1.8'i oluşturan önermelerin doğru olduğunu hem işlem özeliklerinden hem de doğruluk tablosundan yararlanarak gösteriniz.

Örnek – 1.5

$\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}') \Rightarrow r$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \equiv p' \vee (q \vee r)$

$\equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}')' \vee r$

$\equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}') \Rightarrow r$

Örnek – 1.6

$(p' \wedge q) \Rightarrow (r \Rightarrow q') \equiv 0$ olduğuna göre,

$s \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge r]' \Rightarrow [(p \wedge q) \vee r]$

önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Çözüm

$(p' \wedge q) \Rightarrow (r \Rightarrow q') \equiv 0$ ise

$p' \wedge q \equiv 1$ ve $r \Rightarrow q' \equiv 0$ olmalıdır.

Buna göre; $p \equiv 0$, $q \equiv 1$, $r \equiv 1$ olur.

Bu değerler s'de yerlerine konursa,

$\Rightarrow s \equiv [(0 \Rightarrow 1) \wedge 1]' \Rightarrow [(0 \wedge 1) \vee 1]$

$\Rightarrow s \equiv (1 \wedge 1)' \Rightarrow (0 \vee 1)$

$\Rightarrow s \equiv 1' \Rightarrow 1$

$\Rightarrow s \equiv 0 \Rightarrow 1$

$\Rightarrow s \equiv 1$ bulunur.

Örnek – 1.7

$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (s \Rightarrow p) \equiv 0$ olduğuna göre,

$t \equiv [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \vee (q \wedge r)$ önermesini

en sade biçimde yazınız.

Çözüm

$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (s \Rightarrow p) \equiv 0$ ise

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 1$ ve $s \Rightarrow p \equiv 0$ olmalıdır.

Bu denklikler $p \equiv 0$ ve $s \equiv 1$ iken sağlanır. q ile r'nin değerleri bulunamaz.

t önermesinde $p \equiv 0$ değerini yerine koyarsak,

$t \equiv [(r \Rightarrow 0) \Rightarrow (q \Rightarrow 0)] \vee (q \wedge r)$

$\Rightarrow t \equiv (r' \Rightarrow q') \vee (q \wedge r)$

$\Rightarrow t \equiv r \vee q' \vee (q \wedge r)$ *($\Rightarrow$'nin indirgenmesi)*

$\Rightarrow t \equiv r \vee [(q' \vee q) \wedge (q' \vee r)]$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow t \equiv r \vee [1 \wedge (q' \vee r)]$

$\Rightarrow t \equiv r \vee q' \vee r$

$\Rightarrow t \equiv q' \vee r$ *(değişme ve tek kuvvet özeliği)*

elde edilir.

Örnek – 1.8

$s \equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \vee (p \Rightarrow r)$

önermesini en sade biçimde yazınız.

Çözüm

$s \equiv \left[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r\right] \vee (p \Rightarrow r)$

$\Rightarrow s \equiv \left[(p' \vee q) \Rightarrow r\right] \vee (p' \vee r)$ *(⇒'nin indirgenmesi)*

$\Rightarrow s \equiv (p' \vee q)' \vee r \vee p' \vee r$ *(⇒'nin indirgenmesi)*

$\Rightarrow s \equiv (p \wedge q') \vee p' \vee r$ *(De Morgan,değişme,tek kuvvet)*

$\Rightarrow s \equiv \left[(p \vee p') \wedge (q' \vee p')\right] \vee r$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow s \equiv \left[1 \wedge (p' \vee q')\right] \vee r$

$\Rightarrow s \equiv p' \vee q' \vee r$ elde edilir.

Etkinlik – 1.33

$(p \vee q') \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre,

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \left[(q \vee r) \Rightarrow p'\right]$

önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Etkinlik – 1.34

$\left[(p \vee q) \wedge p'\right] \Rightarrow q'$

önermesini en sade biçimde yazınız.

İki yönlü koşullu önermeler

Etkinlik – 1.35

q : Ali sınıfını geçecek.
p : Babası Ali'ye bisiklet alacak.

önermeleri verilmiş olsun.

a. $p \Rightarrow q$ önermesini sözle ifade ediniz.

b. $q \Rightarrow p$ önermesini sözle ifade ediniz.

c. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesi verilmiş olsun.
Bu önermede,
*"**p** bileşeni **q** bileşeninin hem yeterli hem gerekli koşulu"* mudur?
Aynı zamanda,
*"**q** bileşeni **p** bileşeninin hem yeterli hem gerekli koşulu"* mudur?

d. *"**p** bileşeni **q** bileşeninin hem yeterli hem gerekli koşuludur."* demekle *"**q** bileşeni **p** bileşeninin hem yeterli hem gerekli koşuludur."* demiş olur musunuz?

e. c ve d etkinliklerindeki çıkarımlarınıza dayanarak
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesini
"p'nin yeterli ve gerekli koşulu q'dur." veya
"p için gerekli ve yeterli koşul q'dur."
biçiminde yazabilir misiniz?

f. Aşağıdaki tabloyu tamamlayarak
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk değerlerini, p ile q'nun doğruluk değerlerine göre bulunuz.

p	**q**	$\mathbf{p \Rightarrow q}$	$\mathbf{q \Rightarrow p}$	$(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p})$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Tanım – 1.9

*Bir koşullu önerme ile bunun karşıtının kesişimine **iki yönlü koşullu önerme** denir.*

Tanım 1.9'un sembollerle ifadesi,
"$(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p})$ önermesine iki yönlü koşullu önerme denir." biçimindedir.

Etkinlik–1.35'te sizin de keşfettiğiniz gibi; $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinde p bileşeni q bileşeninin hem yeterli hem gerekli koşulu durumundadır.

Buna göre; $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesi,

"**p için gerekli ve yeterli koşul q'dur.**"

biçiminde yazılabilir. Buradaki

1 "**... için gerekli ve yeterli koşul ... dır.**"

eklemi yerine, aynı anlama gelmek üzere

2 "**... ancak ve ancak ... ise.**"

eklemi de kullanılır.

Mantıkta, 1 ve 2 eklemleri ve bunlarla aynı anlama gelen eklemler "⇔" sembolü ile gösterilirler.

O hâlde; $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesini kısaca $\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$ biçiminde gösterebiliriz. $\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$ önermesi "**p ancak ve ancak q ise**" diye okunur.

$(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}) \equiv \mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$ diyebiliriz.

⇔ ekleminin tanımına göre $\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

		q	
	$\Leftrightarrow$	**1**	**0**
p	**1**	1	0
	0	0	1

Buradaki doğruluk değerlerini **Etkinlik–1.35'**te $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk değerleri olarak bulmuştunuz.

İki yönlü koşullu önermenin olumsuzu

Teorem – 1.9

p *ile* **q** *birer önerme ve "⇔" önerme eklemi ise,*

$(\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q})' \equiv (\mathbf{p}' \Leftrightarrow \mathbf{q}) \equiv (\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}')$

denkliği geçerlidir.

Etkinlik – 1.36

Teorem–1.9 olarak verilen önermenin doğruluğunu hem işlem özeliklerinden hem de doğruluk tablosundan yararlanarak gösteriniz.

Totoloji ve çelişme

Tanım – 1.10

*Bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için doğru olan bileşik önermeye **totoloji** veya **geçerli önerme**;*

*Bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için yanlış olan bileşik önermeye **çelişme** veya **tutarsız önerme**;*

*Doğruluk değerlerinden en az biri yanlış olan bileşik önermeye **geçersiz önerme**;*

*Doğruluk değerlerinden en az biri doğru olan bileşik önermeye **tutarlı önerme** denir.*

Tanım–1.10'a göre, verilen bir önermenin totoloji ya da çelişme olup olmadığının, bu önermenin doğruluk tablosundan anlaşılacağı açıktır. Bunun yanında; verilen önerme sadeleştirilerek bunun "1" ya da "0" a denk olup olmadığı da araştırılabilir.

$p \Rightarrow q$ biçimindeki önermelerin totoloji olup olmadığını anlamak için $q \equiv 0$ durumu incelenir. $q \equiv 0$ iken $p \equiv 0$ olmuyorsa önermenin totoloji olmadığı ortaya çıkar.

Örnek – 1.9

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$

önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm

1. yol

Doğruluk tablosu ile gösterelim:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee r$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1

Totoloji

2. yol

Önermeyi sadeleştirerek gösterelim:

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv (p \wedge q)' \vee (p \vee r)$

$\Rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv p' \vee q' \vee p \vee r$

$\Rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv \underbrace{p' \vee p}_{1} \vee q' \vee r$

$\Rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv 1$

olduğundan önerme totolojidir.

3. yol

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ önermesi, yalnız $p \vee r \equiv 0$ iken $p \wedge q \equiv 1$ ise yanlıştır. $(1 \Rightarrow 0 \equiv 0)$

$p \vee r \equiv 0$ iken $p \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ olup,

$p \wedge q \equiv 0 \wedge q \equiv 0$ olur.

O hâlde, verilen önermenin yanlış olduğu hiç bir durum yoktur.

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ önermesi bir totolojidir.

Etkinlik – 1.37

$\left[(p \vee q) \Rightarrow r\right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

önermesinin totoloji (geçerli önerme) olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 1.38

Aşağıdaki önermelerden hangileri geçerli (totoloji), hangileri geçersiz ama tutarlı, hangileri tutarsız (çelişme)dır?

a. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

b. $(p \vee q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

c. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$

d. $(p \Rightarrow q) \vee p$

e. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

f. $\left[(p \vee q) \Rightarrow r\right] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Önerme deyimleri

Tanım – 1.11

Sonlu sayıda önermeden sonlu sayıda işlem kullanılarak elde edilen önermeye bir ***önerme deyimi*** *denir.*

Basit önermeler **p**, **q**, **r**, ... gibi küçük harflerle gösterilirken önerme deyimleri **A**, **B**, **C** ... gibi büyük harflerle gösterilirler.

Tanım–1.11'e göre aşağıdakilerden her biri bir önerme deyimidir.

- p
- p'
- $p \wedge q$
- $p' \vee q$
- $p \Rightarrow q'$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

A, B, C birer önerme deyimi ise aşağıda verilenler de birer önerme deyimi olur.

- A'
- $A \wedge B'$
- $A \wedge B \Rightarrow C'$
- $(A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow B')$

Çok bileşenli önermeleri *"önerme deyimleri"* diye adlandırmak bunlarla işlemler yapmada kolaylık sağlar.

İşlem önceliği

Basit önermelerden bileşik önermeler elde edilirken yapılan **değilleme**, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ işlemlerinden hangisinin önce yapılacağı genellikle parantez kullanılarak belirtilir.

Parantezlerle işlem önceliği belirtilmemişse işlem sırası şöyle olmalıdır:

1. **değilleme**
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$

Buna göre; örneğin,

$A \equiv \left[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\right] \Rightarrow (q \vee r)$ deyimi

parantezler kaldırılarak,

$p \wedge q \vee p \wedge r \Rightarrow q \vee r$ biçiminde yazılabilir.

"Ancak ... ise" eklemi

"p **ancak ve ancak** q **ise**." denilmesi gereken yerde, neden "p **ancak** q **ise**." denemez?

Bunu merak etmişsinizdir.

Bu durumda "**ancak ... ise**" eklemini tanıtmamız gerekir.

"**Ancak**" sözcüğü, önüne konulduğu bileşenin gerekli koşul olduğunu; "**ancak ve ancak**" deyimi ise hem yeterli hem de gerekli koşul olduğunu belirtir.

"p **ise** q" önermesinde, q gerekli koşul olarak tanıtılmıştı. Buna göre, "p **ise** q" önermesi ile "p **ancak** q **ise**" önermesi tam olarak aynı anlamdadır.

"**Ancak** p **ise** q" önermesinde ise gerekli koşulun p olduğu belirtilmiştir. O zaman, bu önerme "q **ise** p" anlamına gelir.

O hâlde şu denklikleri yazabiliriz:

(p **ancak** q **ise**) $\equiv$ (p **ise** q)

(**Ancak** p **ise** q) $\equiv$ (q **ise** p)

"**ise**", "**ancak ... ise**", "**ancak ve ancak ... ise**" eklemlerinin önermeye nasıl farklı anlamlar kattığını bir örnekle açıklayalım:

"Çalışırsan sınıfını geçersin." önermesi, *"Çalışırsan sınıfını geçmemen mümkün değildir. Bunun yanında başka bir yolla da sınıfını geçmen mümkün olabilir."* anlamına gelir.

"Ancak çalışırsan sınıfını geçersin." önermesi, *"Belki çalışsan da geçemeyeceksin. Ama sınıfını geçmenin çalışmandan başka yolu yok."* anlamındadır.

"Ancak ve ancak çalışırsan sınıfını geçersin." demek ise *"Çalışırsan sınıfını geçmemen mümkün değildir. Sınıfını geçmişsen çalışmamış olman mümkün değildir."* demektir.

Etkinlik – 1.41

Babası, Cem'e bir bilgisayar alacağını aşağıda verilen önermelerden biriyle bildirmiş olsun.

1. Sınıfını geçersen sana bilgisayar alırım.
2. Ancak sınıfını geçersen sana bilgisayar alırım.
3. Ancak ve ancak sınıfını geçersen sana bilgisayar alırım.

Cem'e bilgisayar alınması olasılığı bu önermelerden hangisine göre en yüksek; hangisine göre en düşüktür?

Etkinlik – 1.42

Her dilde, mantıkta kullanılan **değil, ve, veya, ise, ancak ve ancak ... ise** gibi önerme eklemleri ile eş anlamlı çok sayıda başka önerme eklemi kullanılır.

Aşağıdaki önermelerde böyle eklemler kullanılmıştır. Bu önermelerde kullanılan önerme eklemlerinin, mantıkta öğrendiğiniz hangi önerme eklemlerine karşılık getirilebileceğini belirterek, önermeleri sembolleştiriniz.

a. Kalemim **yok**.

b. Nazlı okula gel**me**di.

c. Metin **ne** aradı **ne** sordu.

d. Selim **hem** dersaneye gitti **hem** özel ders aldı **ise de** bir okula giremedi.

e. Ali **de** Can **da** banyo yapacak.

f. Arayan **ya** Simge'dir **ya** Haluk.

g. Derslerine çalış**madan** sınıfını geçe**mezsin**.

h. Her istediğin yere gideriz, **yeter ki** sen gel.

i. Sınıfını geçmen için derslerine çalışman **şart**.

j. Maçı kazanmamızın **tek koşulu** Volkan'ın oynamasıdır.

Gerektirme

Tanım – 1.12

p, q, r, ... önermelerinden oluşan P ve Q önerme deyimleri verilmiş olsun.

p, q, r, ... önermelerinin P önerme deyimini doğru kılan tüm doğruluk durumları için Q önerme deyimi de doğru oluyorsa; P önerme deyimi Q önerme deyimini ***gerektirir,*** *denir.*

Bu tanıma göre, P'nin Q'yu gerektirmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbf{P \Rightarrow Q}$ önermesinin bir **totoloji** olmasıdır.

Tanım – 1.13

P ile Q birer önerme deyimi olmak üzere, $\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$ *önermesi bir totoloji ise; P önerme deyimi Q önerme deyimini* ***çift gerektirir,*** *denir.*

$P \Leftrightarrow Q$ önermesinin doğruluk değerleri dikkate alınırsa; P'nin Q'yu çift gerektirmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbf{P \equiv Q}$ olmasıdır.

Etkinlik – 1.43

Aşağıda verilen P önerme deyimlerinin, yanlarında verilen Q önerme deyimlerini gerektirdiğini gösteriniz.

a. $P \equiv (p \vee q) \wedge p'$; $Q \equiv q$

b. $P \equiv (p \Rightarrow q) \wedge p$; $Q \equiv q$

c. $P \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$; $Q \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

d. $P \equiv (p \Leftrightarrow q) \wedge q$; $Q \equiv p \wedge q$

Etkinlik – 1.44

Aşağıda verilen önermelerden birinin diğerini çift gerektirdiğini gösteriniz.

a. $p \Rightarrow (p \wedge q)$; $p \Rightarrow q$

b. $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge r)$; $(p \Rightarrow q') \vee r$

Yorumlama

Önermenin tanımı üzerinde çalışırken, "Bir önermenin doğruluk değerinin belirlenmesi için ek bilgiler verilmesine **anlam belirlemesi** veya **yorumlama** denir." demiştik. "$p \Rightarrow q$" gibi sembolik bir önermenin doğruluk değerinin belirlenmesi için de ek bilgilerin verilmesi gerekir. Burada, ek bilgiler verilmesi, p ile q'nun yerine doğruluk değerleri belli olan önermeler koyulmasıdır.

Demek ki, bir sembolik önermede bileşenlerin yerine doğruluk değerleri belli olan önermeler koymak da bir **yorumlama**dır.

Örneğin,

"$3 = 5$ ise $6 = 9$" önermesi "$p \Rightarrow q$" sembolik önermesinin bir yorumlamasıdır.

1.2.4 – Çıkarımlar ve geçerliliklerinin denetlenmesi

Eldeki yargılardan, bir **sonuç** çıkarılmasına **çıkarım** denir. Veri durumundaki önermelerden oluşan eldeki yargılara çıkarımın **öncül**leri adı verilir.

Bir çıkarımda sonuç **o hâlde**, **demek ki**, **buna göre**, … gibi sözlerle öncüllere bağlanır.

Örneğin;

A: $p \wedge q \Rightarrow r$

B: $p \vee q$

O hâlde,

C: $p \Rightarrow r$

biçimindeki bir **akıl yürütme** (usa vurma) bir **sembolik çıkarım**dır.

Bu çıkarımda, A ve B önermeleri **öncül**ler, C önermesi **sonuç**tur.

Bu öncüllerden bu sonuca varılması doğru mudur?

Bu sorunun yanıtının araştırılmasına **çıkarımın geçerliliğinin denetlenmesi** denir. Mantıkta bunun çeşitli yolları vardır. Biz burada bu yollara girme-yeceğiz. Çıkarımların geçerliliğini **gerektirme** kavramından yararlanarak denetleyeceğiz. Öncül-lerin kesişimi sonucu gerektiriyorsa **çıkarım geçerlidir**, diyeceğiz.

Örneğimizde öncüllerin kesişimi $A \wedge B$'dir. $A \wedge B$'nin C'yi gerektirip gerektirmediğini araştıracağız.

$A \wedge B \Rightarrow C$

$\equiv \underbrace{(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)}_{?} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{0}$ dir.

$p \Rightarrow r \equiv 0$ iken $p \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ dır.

Bu durumda,

$A \wedge B \equiv (1 \wedge q \Rightarrow 0) \wedge (1 \vee q)$

$\Rightarrow A \wedge B \equiv (q \Rightarrow 0) \wedge 1$

$\Rightarrow A \wedge B \equiv q'$ olur.

$q' \equiv 1$ ve $p \Rightarrow r \equiv 0$ iken $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi yanlış olacağından, önerme bir totoloji değildir.

$A \wedge B$, C'yi gerektirmez. O hâlde, A ve B öncüllerinden C sonucunu çıkarmak doğru değildir.

Çıkarım geçersizdir.

Başka bir örnek verelim:

A: *"Yağmur yağdıysa yerler ıslanmıştır."*

B: *"Yağmur yağmadı."*

O hâlde,

C: *"Yerler ıslak değildir."*

biçimindeki bir akıl yürütme **yorumlanmış** bir **çıkarım**dır.

Yorumlanmış bir çıkarımın geçerli olması için, bir sembolik karşılığının geçerli olması gerekir.

A, B ve C önermelerini sembolleştirelim:

p: *"Yağmur yağdı."* ve

q: *"Yerler ıslandı."* diyelim.

A: $p \Rightarrow q$, B: p' ve C: q' olur.

$A \wedge B$ önermesi C'yi gerektiriyorsa, yani $A \wedge B \Rightarrow C$ totoloji ise çıkarım geçerlidir; totoloji değilse geçerli değildir.

$A \wedge B \Rightarrow C \equiv \underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge p'}_{?} \Rightarrow \underbrace{q'}_{0}$

$q' \equiv 0$ iken $(p \Rightarrow q) \wedge p' \equiv (p \Rightarrow 1) \wedge p' \equiv p'$ olur.

$p' \equiv 1$ iken $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi yanlış olduğundan bir totoloji değildir.

Çıkarım geçersizdir.

Örnek – 1.10

A: *"Kar beyazdır ve kömür siyahtır."*

O hâlde,

B: *"Kan kırmızıdır."*

çıkarımının geçerliliğini denetleyelim:

p: *"Kar beyazdır."*

q: *"Kömür siyahtır."*

r: *"Kan kırmızıdır."* diyelim.

$A \Rightarrow B \equiv p \wedge q \Rightarrow r$ olup bunun bir totoloji olmadığı açıktır. Öyleyse; A, B'yi gerektirmez.

Bu akıl yürütme doğru değildir.

Dikkat ediniz!

"Kar beyaz ve kömür siyah ise kan kırmızıdır."

$[(1 \wedge 1) \Rightarrow 1 \equiv 1]$

önermesi doğru olduğu hâlde, bir gerektirme değildir.

Karın beyaz ve kömürün siyah olması kanın kırmızı olmasını gerektirmez.

"Kar beyaz ve kömür siyah ise kar beyazdır."

önermesi bir gerektirmedir.

(Çünkü $p \wedge q \Rightarrow p$ totolojidir.)

"Kar beyaz veya kömür siyah ise kar beyazdır."

önermesi bir gerektirme değildir.

(Çünkü $p \vee q \Rightarrow p$ totoloji değildir.)

O hâlde, $p \Rightarrow q$ biçimdeki her doğru önerme bir gerektirme olmak zorunda değildir.

Örnek – 1.11

A: Eğer hava soğuk ve nemli olursa yağmur yağacağı,

B: Eğer hava sıcak ise havanın nemli olacağı,

C: Bugün havanın nemli olduğu

bilinmektedir.

Bugün yağmur yağıp yağmayacağını belirtiniz.

Çözüm

D: *"Bugün yağmur yağacak"* olsun.

p: *"Hava sıcaktır."*,

q: *"Hava nemlidir."*,

r: *"Yağmur yağacak."* dersek;

A: $(p \wedge q) \Rightarrow r$

B: $p \Rightarrow q$

C: q

D: r olur.

$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$ bir totoloji ise yağmur yağacak, değilse yağıp yağmayacağı belirsiz olacaktır.

$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$

$\equiv (p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow r$ olup

$p \equiv 0$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ için

$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$ önermesi yanlış,

$r \equiv 1$ için doğrudur.

$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$ önermesi bir totoloji değildir. O hâlde, yağmur yağıp yağmayacağı belirsizdir.

Örnek – 1.12

A: Hava sıcak ve nemli olduğunda Burcu kendini mutlu hissetmez.

B: Hava sıcaktır.

C: Burcu kendini mutlu hissediyor.

Buna göre, havanın nemli olup olmadığını belirtiniz.

Çözüm

D: *"Hava nemli değildir."* olsun.

p: *"Hava sıcaktır."*,

q: *"Hava nemlidir."*,

r: *"Burcu kendini mutlu hissediyor."* dersek;

A: $p \wedge q \Rightarrow r'$

B: p

C: r

D: q' olur.

$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$

$\equiv (p \wedge q \Rightarrow r') \wedge p \wedge r \Rightarrow q'$ olup

$q' \equiv 0$ iken

$(p \wedge q \Rightarrow r') \wedge p \wedge r \equiv (p \wedge 1 \Rightarrow r') \wedge p \wedge r$

$\equiv (p \Rightarrow r') \wedge p \wedge r \equiv (p' \vee r') \wedge p \wedge r$

$\equiv [(p' \wedge p) \vee (r' \wedge p)] \wedge r \equiv r' \wedge p \wedge r \equiv 0$ dır.

O hâlde, $A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$ önermesi totolojidir. Öyleyse, hava nemli değildir.

✚ "P. O hâlde Q." çıkarımında;

- $P \Rightarrow Q$ önermesi bir totoloji ise çıkarım geçerlidir.
- $P \Rightarrow Q$ önermesi totoloji değilse çıkarım geçersiz olup sonuç belirsizdir.

Etkinlik – 1.45

A: Banka faizleri yükselirse gayrimenkul fiyatları düşer.

B: Gayrimenkul fiyatları düşerse insanlar mutsuz olur.

C: Banka faizleri yüksektir.

Buna göre, insanların mutsuz olup olmadığını belirtiniz.

Örnek – 1.13

A: "$3 < 5$ ise $4 < 3$ tür."

B: "$3 < 5$ veya $4 < 3$ tür."

O hâlde,

C: "$4 < 3$ tür."

çıkarımı geçerli midir?.

Çözüm

Örnek–1.10, Örnek–1.11 ve Örnek–1.12de olduğu gibi, önermeleri sembolleştirip $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesinin bir totoloji olup olmadığını araştıracağız.

p: "$3 < 5$" ve q: "$4 < 3$" dersek

A: $p \Rightarrow q$

B: $p \vee q$

C: q olur.

$A \wedge B \Rightarrow C$

$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$ olup

$q \equiv 0$ iken

$(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q) \equiv 0$ dır.

O hâlde, $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi totoloji olduğundan çıkarım geçerlidir.

Etkinlik – 1.46

"$2 < 3$ ise $4 < 5$ tir.

$4 < 5$ tir.

O hâlde, $2 < 3$ tür." çıkarımı geçerli midir?

Alıştırmalar ve Problemler – 1.1

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri önermedir.

a. Fikret her sabah spor yapar.
b. Öğrenciler derslerine çalışmalıdır.
c. Evrendeki yıldızların sayısı sonsuzdur.
d. $2^{75} + 1$ bir asal sayıdır.
e. Sorumluluğunu bilen insanları severim.
f. Türkiye 2050 yılında Avrupa Birliği'ne girmiş olacak.
g. $13 < 9$ dur ve şımarıkları sevmem.
h. İstiyorsan çalışalım.
i. $2 = 3$ olması $4 = 5$ olması için yeterlidir.
j. Türkiye'nin iki kıtada olması Ankara'nın Avrupa'da olması için gereklidir.

2. p : Güneş bir yıldızdır.

q : Dünya Güneş'in etrafında döner.

r : Ay Güneş'in etrafında döner.

önermeleri verildiğine göre aşağıdaki bileşik önermeleri sözlerle ifade ediniz. Bunların doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p \wedge q$ **b.** $p \wedge r'$ **c.** $p \wedge (q \vee r)$

d. $q' \vee r$ **e.** $(p' \wedge q) \vee r'$ **f.** $(p \vee q)' \vee r$

3. Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını yazınız. Doğruluk değerleri belli olanlarının doğruluk değerlerini bulunuz.

a. Hakan çalışacak veya sınıfını geçemeyecek.
b. Akın ve Ferit okula gitti.
c. 23 sayısı asal veya tektir.
d. $3^3 = 9$ ve $2^4 > 8$
e. 8 < 5 veya Okan uzun boyludur.
f. Gülse'nin bisiklet ve bilgisayar aldığı doğru değildir.

4. p yanlış, q ve r doğru önermelerdir. Buna göre aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p \vee q'$ **b.** $p' \wedge r$
c. $p \vee (q \wedge r)$ **d.** $(p' \vee q) \wedge r$
e. $(p \wedge q')' \vee (q \vee r')$ **f.** $(r' \wedge q)' \wedge (r \vee p')'$

5. Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını yazınız.

a. $p \wedge (q \vee r')$ **b.** $(p' \vee q)' \vee r'$
c. $p' \vee q \vee r'$ **d.** $p \wedge q' \wedge r'$
e. $(p \wedge r') \vee (q' \vee r)'$ **f.** $\left[(q \wedge r)' \wedge p\right]' \wedge r$

6. "1" doğru bir önermeyi, "0" yanlış bir önermeyi gösterdiğine göre; aşağıdaki önermeleri en sade biçimde yazınız.

a. $p \vee 0$ **b.** $p \wedge 0$ **c.** $1 \vee p$
d. $p \wedge 1$ **e.** $p \wedge p'$ **f.** $p \vee p'$

7. Önerme işlemlerinin özeliklerinden yararlanarak aşağıdaki önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz. Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu, doğruluk tabloları ile gösteriniz.

a. $p \wedge (p' \vee q)$ **b.** $q \vee (p \wedge q')$
c. $(p \wedge q)' \vee (p \vee r)$ **d.** $(p \wedge q)' \wedge (p' \vee q)$
e. $(p \wedge q') \vee \left[(p \wedge q)' \vee q'\right]$ **f.** $p \vee \left[(p \wedge q)' \wedge (p \vee q)'\right]$

8. Aşağıdaki denkliklerin doğruluğunu, hem doğruluk tablosundan hem de önerme işlemlerinin özeliklerinden yararlanarak bulunuz.

a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
b. $(p \vee q) \wedge q \equiv q$
c. $\left[(p \vee q') \wedge p'\right] \vee q \equiv p' \vee q$
d. $\left[p \vee (p \wedge q')\right] \wedge (p \vee q') \equiv p$
e. $(p \vee q) \wedge \left[(p \wedge q) \vee (p' \wedge q')\right] \equiv p \wedge q$
f. $(p \wedge q) \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q') \equiv p' \vee q$

9. $(p \wedge q')' \vee r'$ yanlış bir önerme olduğuna göre aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $\left[(p \vee r') \wedge (q \wedge r')'\right] \vee (q' \vee p)$
b. $\left[(p \vee r)' \vee q\right]' \wedge (q' \vee r)$
c. $\left[r \wedge (q \vee p)'\right] \vee \left[(q' \vee p') \wedge (p \vee r)\right]$
d. $\left[(p' \wedge q) \wedge (q \vee r')'\right] \wedge \left[(q' \vee r') \wedge p\right]$

10. $(p \vee q')' \wedge r \equiv 1$ olduğunu varsayarak 9. alıştırmada verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

11. $(p \vee q) \wedge (q \wedge r) \equiv 1$ olduğunu varsayarak 9. alıştırmada verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

12. $p \vee (p \wedge q' \wedge r) \equiv 0$ olduğunu varsayarak 9. alıştırmada verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

13. Aşağıdaki önermelerin birer totoloji (geçerli önerme) olduğunu gösteriniz.

a. $p \vee (p \wedge q)'$
b. $(p \wedge q) \vee (p' \wedge q) \vee q'$
c. $\left[(p \vee q) \wedge p'\right]' \vee q$
d. $p \vee \left[(p' \vee q) \wedge (p \wedge q)'\right]$

14. Aşağıdaki önermelerin birer çelişki (tutarsız önerme) olduğunu gösteriniz.

a. $(p \wedge q') \wedge (p \vee q)'$
b. $p \wedge (p' \vee q) \wedge (p \wedge q)'$
c. $p \wedge q' \wedge (p' \vee q)$
d. $(p' \vee q) \wedge (q' \vee r) \wedge (p \wedge r')$

15. $(p \wedge q) \Rightarrow (q' \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre, aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $(p' \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$

b. $(p \wedge q') \Rightarrow [(q \vee r') \Rightarrow p']$

c. $(p \wedge r) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)]$

d. $(p \Leftrightarrow r') \Rightarrow [(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)]$

16. $(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (q' \Rightarrow r') \equiv 0$ olduğunu varsayarak 15. alıştırmada verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

17. $(p \vee q') \Rightarrow (q \vee r') \equiv 0$ olduğunu varsayarak 15. alıştırmada verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

18. $[p \vee (q \wedge r)] \Rightarrow p' \equiv 0$ olduğunu varsayarak 15. alıştırmada verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

19. Aşağıda verilen önermelere denk olan en sade önermeleri yazınız.

a. $p \Rightarrow p$	**b.** $p \Rightarrow p'$	**c.** $p \Rightarrow 1$
d. $p \Rightarrow 0$	**e.** $1 \Rightarrow p$	**f.** $0 \Rightarrow p$
g. $p \Leftrightarrow p$	**h.** $p \Leftrightarrow p'$	**i.** $p \Leftrightarrow 0$
j. $p \Leftrightarrow 1$	**k.** $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow p')$	**l.** $(p \Leftrightarrow p') \Leftrightarrow p$

20. p : Hava soğuktur.
q : Kalın giyineceksin.

önermeleri verildiğine göre; $p \Rightarrow q$ önermesinin,

a. karşıtını **b.** tersini

c. karşıt tersini **d.** olumsuzunu

sembollerle ve sözlerle ifade ediniz.

21. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz. Olumsuzlarını yazınız.

a. $3 < 5$ ise $-3 < -5$ tir.

b. Ankara Türkiye'de ise Roma İtalya'dadır.

c. $-2^4 = 16$ ise $-3^3 = -27$ dir.

d. $2 < 5$ ise $4 < 25$ tir.

22. Önerme işlemlerinin özeliklerinden yararlanarak aşağıdaki önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz. Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu doğruluk tabloları ile gösteriniz.

a. $(p \wedge q)' \wedge q' \Rightarrow p$

b. $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$

c. $p \vee q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

d. $[(p \wedge q') \Rightarrow p] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge q]$

23. Aşağıdaki önermelerin birer totoloji olduğunu gösteriniz.

a. $p \Rightarrow p \vee q$

b. $(p \wedge q)' \wedge q \Rightarrow p'$

c. $(p' \Rightarrow q') \wedge q \Rightarrow p$

d. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

e. $[(p \vee q) \Rightarrow r] \vee [(p \wedge q) \Rightarrow r']$

f. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

24. Aşağıdaki önermelerden hangileri çelişmedir?

a. $(p \vee q) \Rightarrow (p' \wedge q')$

b. $(p \Rightarrow q) \wedge p' \Rightarrow q'$

c. $(p \wedge q') \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

d. $[p \Rightarrow (p \vee q)] \Rightarrow [(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow q')]$

25. Aşağıda verilen P önerme deyimlerinin, yanlarında verilen Q önerme deyimlerini gerektirdiğini gösteriniz.

a. $P \equiv (p \vee q) \Rightarrow q$; $Q \equiv p \Rightarrow q$

b. $P \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$; $Q \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$

c. $P \equiv p \wedge q$ $Q \equiv p \Leftrightarrow q$

d. $P \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ $Q \equiv p \Rightarrow r$

26. Aşağıdaki denklikleri ispatlayınız.

a. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv p \Leftrightarrow q$

b. $(p \Rightarrow q) \wedge p \equiv p \wedge q$

c. $(p \vee q) \Rightarrow p' \equiv p'$

d. $(p \Rightarrow q) \wedge q \equiv q$

27. Aşağıdaki denklikleri ispatlayınız.

a. $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv p \Rightarrow q$

b. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv p$

c. $(p \Rightarrow q) \wedge q' \equiv p \Rightarrow q'$

d. $(p \Rightarrow q) \wedge (p' \Rightarrow q') \equiv p \Leftrightarrow q$

e. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \vee p \equiv p \vee r$

f. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$

28. A: *“Erdem doğru beslenir ve spor yaparsa sağlıklı olur.”*

B: *“Erdem doğru beslenmekte ancak spor yapmamaktadır.”*

önermeleri doğru sayıldığına göre,

C: *“Erdem sağlıklı değildir.”*

sonucu doğru olmak zorunda mıdır?

Bu soruyu;

p : *“Erdem doğru beslenmektedir.”*

q : *“Erdem spor yapmaktadır.”*

r : *“Erdem sağlıklıdır.”*

A: $(p \wedge q) \Rightarrow r$

B: $p \wedge q'$

C: r'

sembolleştirmelerini yapıp $A \wedge B$ önerme deyiminin C’yi gerektirip gerektirmediğini belirterek yanıtlayınız.

29. A: *“Gürbüz spor yapmazsa kilo veremez.”*

B: *“Gürbüz spor yapıyor.”*

önermeleri doğru sayıldığına göre,

C: *“Gürbüz kilo verecek.”*

sonucu doğru olmak zorunda mıdır?

Soruyu A, B, C önerme deyimlerini sembolleştirip $A \wedge B$ nin C’yi gerektirip gerektirmediğini belirterek yanıtlayınız.

30. A: *“Bertrand Russell iyi bir mantıkçı ise iyi bir filozoftur. “*

B: *“Bertrand Russell iyi bir filozoftur.”*

önermeleri doğru sayıldığına göre,

C: *“Bertrand Russell iyi bir mantıkçıdır.”*

sonucu doğru olmak zorunda mıdır?

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

31. A: *“Ali iyi bir öğrenci ise derslerine çalışır.”*

B: *“Ali çok televizyon seyrederse derslerine çalışamaz.”*

önermeleri veriliyor.

A ve B önermeleri doğru sayılırsa aşağıdaki sonuçlardan hangileri doğru olmak zorundadır?

a. C: *“Ali iyi bir öğrenci ise çok televizyon seyretmez.”*

b. D: *“Ali iyi bir öğrenci değilse çok televizyon seyrediyordur.”*

c. E: *“Ali çok televizyon seyrediyorsa iyi bir öğrenci değildir.”*

d. F: *“Ali çok televizyon seyretmiyorsa iyi bir öğrencidir.”*

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

32. A: *“Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır.”*

önermesini doğru sayalım.

Aşağıda verilen B önermeleri de doğru sayılırsa, hangi C sonuçları doğru olmak zorundadır?

a. B : *“Yağmur yağmıştır.”*

C : *“Çamaşırlar ıslanmıştır.”*

b. B : *“Çamaşırlar ıslanmıştır.”*

C : *“Yağmur yağmıştır.”*

c. B : *“Çamaşırlar ıslanmamıştır.”*

C : *“Yağmur yağmamıştır.”*

d. B : *“Yağmur yağmamıştır.”*

C : *“Çamaşırlar ıslanmamıştır.”*

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

1.3 – Niceleme Mantığı

Etkinlik – 1.47

p : *"Rize'liler yardımseverdir."*

q : *"Ayhan Rize'lidir."*

r : *"Ayhan yardımseverdir."*

önermeleri verilmiş olsun.

$p \wedge q$ önermesi r önermesini gerektirir mi?

İlk iki önermenin kesişiminin üçüncü önermeyi gerektirdiğini sezginizle, hiç kuşkuya kapılmadan söyleyebilirsiniz.

Ancak, $p \wedge q \Rightarrow r$ sembolik önermesinin bir gerektirme olmadığı da açıktır.

Bu çelişki üzerinde tartışınız.

Önermeler mantığında önermelerin iç yapılarına değinmemiş sadece doğruluk değerleri ile ilgilenmiştik.

Etkinlikte–1.47'de verilen önermelerin iç yapıları incelendiğinde, bunların birbirleriyle ilişkili oldukları görülür. Böyle önermeleri p, q, r, ... diye sembolleştirmekle, aralarındaki ilişkileri yok saymış, bunları birbirlerine yabancılaştırmış oluruz. **Etkinlikte–1.47**'de sezginizle sembollerin çelişmesi bu yüzdendir.

Demek ki; böyle önermeleri, aralarındaki ilişkileri ortaya çıkaracak biçimde daha ayrıntılı sembolleştirmek gerekmektedir.

Bir basit önermeyi – iç yapısını ortaya çıkaracak biçimde – sembolleştirmek için, önermeyi **özne** ve **yüklem** diye iki kısma ayırırız.

Mantıkta; bir önermenin, öznesi dışındaki kısmına **yüklem** denir. Genellikle, özneyi a, b, c, ... ; yüklemi p, q, r, ... gibi harflerle göstererek önermeyi $p(a)$ biçiminde sembolleştiririz.

Örnekleri inceleyiniz.

$\underbrace{\text{Ahmet}}_{\text{özne (a)}}\ \underbrace{\text{doktordur.}}_{\text{yüklem (p)}}$

$p(a)$: Ahmet doktordur.
$p(a)$, $p(\text{Ahmet})$ biçiminde de yazılabilir.

$\underbrace{\text{Meltem'in öğretmeni}}_{\text{özne (c)}}\ \underbrace{\text{Zehra Hanım'dır.}}_{\text{yüklem (r)}}$

r(c) : Meltem'in öğretmeni Zehra Hanım'dır.

$\underbrace{\text{3}}_{\text{özne (a)}}$, $\underbrace{\text{5'ten küçüktür.}}_{\text{yüklem (q)}}$

q(a) : 3, 5'ten küçüktür.

q(a), q(3) diye de yazılabilir.

✚ Önümüzdeki sayfalarda göreceğiniz gibi; konunun bu kısmında, önermelerin özneleri yerine geçebilecek terimlerin kümelerinin eleman sayıları ve önermelerin yüklemleri ile ilgileneceğiz. Bu yüzden mantığın bu kısmına **niceleme mantığı** veya **yüklemler mantığı** adı verilir.

Niceleme mantığında, ilköğretim okulunda öğrendiğiniz **küme** kavramından da yararlanacağız.

Açık Önermeler

Etkinlik – 1.48

Aşağıdaki ifadeler birer önerme midir? İfadelerdeki "x" lerin yerine değişik terimler koyarak doğru veya yanlış önermeler elde ediniz.

a. x evcil bir hayvandır.

b. x pozitif bir tam sayıdır.

c. $3x + 6 = 0$

d. $2x + y = 9$

"x bir asal sayıdır." ifadesi ile *"... bir asal sayıdır."* ifadesi aynı anlamdadır. Birincideki "x", ikincide **boş** – ya da **açık** – bırakılan yeri belirtmek için kullanılmış bir işarettir. İfade, bu biçimiyle bir yargı bildirmediğinden bir önerme değildir. **Açık** bırakılan yere ifadeyi anlamsız kılmayacak değişik terimler konulursa değişik önermeler elde edilir.

"2 bir asal sayıdır."

"6 bir asal sayıdır." gibi.

"2 bir asal sayıdır." önermesi $p(2)$ biçiminde sembolleştirildiğine göre,

"x bir asal sayıdır." ifadesi de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ biçiminde sembolleştirilir.

Değişik terimlerin konulabileceği **açık** yeri belirten **x** işaretine **değişken** adı verilir.

Tanım – 1.14

İçerisinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkene verilen değerlere göre önerme olan ifadelere ***açık önerme****ler denir.*

Tanım – 1.15

Bir açık önermede değişkenlerin yerlerine konulabilecek terimlerin kümesine, bu açık önermenin ***evrensel küme****si;*

Açık önermeyi doğru kılan terimlerin kümesine de, bu açık önermenin ***doğruluk kümesi*** *veya* ***çözüm kümesi*** *denir.*

Evrensel kümeyi **E** ile, çözüm kümesini **Ç** ile göstereceğiz.

Etkinlik – 1.49

$p(x)$: " $x^2 + 2x - 5 \leq 0$ "

açık önermesi veriliyor. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p(-4)$ **b.** $p(0)$ **c.** $p(2)$ **d.** $p(4)$

Etkinlik – 1.50

$p(x,y)$: " $x^2 + y < 0$ "

açık önermesi veriliyor. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p(1,-3)$ **b.** $p(-3,5)$ **c.** $p(-2,4)$

Etkinlik – 1.51

$p(x,y,z)$: " $x^2 - 2y < z + 3$ "

açık önermesi veriliyor. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p(-2,2,-1)$ **b.** $p(-5,4,3)$

Etkinlik – 1.52

Aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a. $p(x)$: " $x \in Z$, $x^2 < 5$ "

b. $q(x)$: " $x \in N$, $x(x-2)(x+3) = 0$ "

c. $r(x)$: " $x \in \{1,2,3,4\}$, x asal sayıdır."

d. $s(x)$: "x sınıfımızdaki gözlüklü kız öğrencidir."

e. $t(x,y)$: " $x, y \in$ {Haftanın günleri}, x, y'nin ertesidir."

f. $u(x,y)$: " $x, y \in N$, $2x + y = 4$ "

Etkinlik – 1.53

$p(x)$: " $5 < x^2 < 35$ " önermesinin,

a. Doğal sayılar kümesindeki doğruluk kümesini bulunuz.

b. Tam sayılar kümesindeki doğruluk kümesini bulunuz.

c. $E = \{5,6,7,8\}$ kümesindeki doğruluk kümesini bulunuz.

d. $E = \{-2,-1,0,1,2\}$ kümesindeki doğruluk kümesini bulunuz.

Niceleyiciler

Etkinlik – 1.54

Pazartesi, Salı, Çarşamba ve Perşembe günleri 3'er saat ders çalışan bir öğrenci aşağıdakilerden hangilerini söylerse doğru söylemiş olur?

a. Her gün ders çalışırım.

b. Her gün ders çalışmam.

c. Bazı günler ders çalışırım.

d. Bazı günler ders çalışmam.

e. Hiçbir gün ders çalışmam.

f. Her gün ders çalışmadığım doğru değildir.

g. Bazı günler ders çalışmadığım doğru değildir.

h. Bazı günler ders çalıştığım doğru değildir.

i. Hiçbir gün ders çalışmadığım doğru değildir.

j. Her gün ders çalıştığım doğru değildir.

Mantıkta, özne'nin niceliğini (çokluğunu) belirten **bütün, her, bazı, en az bir, hiçbir** gibi sözcüklere **niceleyici**ler denir.

Konuşma dilinde bu sözcüklerin kullanıldığı, özellikle bazı olumsuz cümleler iki anlama gelebilir. Ancak, mantıkta sembolleştirme ile tek anlamlılık sağlanır.

Evrensel Niceleyici

E evrensel kümesinde bir $p(x)$ açık önermesi verilmiş olsun. $p(x)$ açık önermesinin önüne *"Her x için"*, sonuna da *"doğrudur."* sözlerini koyarak *"Her x için* $p(x)$ *doğrudur."* ifadesini yazalım. Bu ifade bir doğruluk değeri taşıdığından bir önermedir.

Bu önerme sembolik olarak, $\forall$**x için p**$(\mathbf{x})$ ya da $\forall$**x, p**$(\mathbf{x})$ biçiminde yazılır.

Buradaki "$\forall$" sembolü genellikle(!) **her** diye okunur; **her**, **bütün**, **tüm**, **herhangi bir** niceleyicilerine karşılık gelir.

"$\forall$**x, p**$(\mathbf{x})$" önermesi $p(x)$'i yanlış yapan en az bir x değerinin bulunması durumunda yanlış; $p(x)$'i yanlış yapan hiçbir x değerinin bulunmaması durumunda doğru olur.

Örnek – 1.14

Tam sayılar kümesinde, aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $\forall x,\ x^2 > 0$ **b.** $\forall x,\ x^2 > x - 1$

Çözüm

a. $x = 0$ için $x^2 > 0$

önermesi yanlış olacağından;

$\forall x,\ x^2 > 0$ yanlıştır.

b. x'in her tam sayı değeri için $x^2 \geq x$ olur.

O hâlde;

$\forall x,\ x^2 \geq x - 1$ doğrudur.

Varlık Niceleyicisi

E evrensel kümesinde bir $p(x)$ açık önermesi verilmiş ise;

"Bazı x'ler için $p(x)$ *doğrudur."*

ifadesi bir önermedir.

Aynı anlama gelen **bazı**, **kimi**, **en az bir** niceleyicilerine "$\exists$" sembolü karşılık getirilerek, bu önerme;

$\exists$**x için p**$(\mathbf{x})$ ya da $\exists$**x, p**$(\mathbf{x})$

biçiminde sembolleştirilir.

"$\exists$**x için p**$(\mathbf{x})$" önermesi $p(x)$'i doğru yapan en az bir x değerinin bulunması durumunda doğru; $p(x)$'i doğru yapan hiçbir x değerinin bulunmaması durumunda yanlış olur.

"$\exists$" sembolü genellikle **bazı** diye okunur. Varlık belirttiğinden **varlık niceleyicisi** diye adlandırılır.

Örnek – 1.15

$E = \{0, 1, 3, 5, 9\}$ evrensel kümesinde, aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerleri yanlarına yazılmıştır.

a. $\forall x$, x çifttir. (0) (Neden?)

b. $\exists x$, x çifttir. (1) (Neden?)

c. $\forall x$, $x + 2$ asaldır. (1) (Neden?)

d. $\exists x$, $x + 2$ asaldır. (1) (Neden?)

e. $\forall x$, x çifttir $\vee$ x asaldır. (0) (Neden?)

f. $\exists x$, x çifttir $\vee$ x asaldır. (1) (Neden?)

Örnek – 1.16

Aşağıdaki açık önermelerden hangileri bir gerektirmedir?

a. $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

b. $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

c. $x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$ veya $x = 3$

d. $x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ ve $x = 2$

Çözüm

a. 1. yol

$x = 2$ açık önermesi, x yerine sadece 2 konulduğunda doğru olur.

$2 = 2 \Rightarrow 2^2 = 4$

önermesi doğru olduğundan

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

açık önermesi bir gerektirmedir.

2. yol

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2$

$\Rightarrow p(x) \Rightarrow p(x) \vee q(x)$ **1**

1 açık önermesinde $x = a$ konularak,

$p(a) \Rightarrow p(a) \vee q(a)$ ya da
$p \Rightarrow p \vee q$ önermesi elde edilir.

$p \Rightarrow p \vee q$ totoloji olduğundan $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ bir gerektirmedir.

b. $x = -1$ için $x^2 = 1$ doğru, $x = 1$ yanlış olup,
$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ önermesi yanlış olur.
$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ bir gerektirme değildir.

c. $x^2 = 9$ önermesini doğru yapan x değerleri -3 ve 3 tür.
$(-3)^2 = 9 \Rightarrow (-3 = -3) \vee (-3 = 3)$ doğru;
$3^2 = 9 \Rightarrow (3 = -3) \vee (3 = 3)$ doğru
olduğundan açık önerme bir gerektirmedir.

d. $(x = -2) \wedge (x = 2)$ çelişmedir.
$x = -2$ ya da $x = 2$
önermelerinden biri doğru iken
$x^2 = 4 \Rightarrow (x = -2) \wedge (x = 2)$
önermesi yanlış olur.
Açık önerme bir gerektirme değildir.

Niceleyicilerin Değillenmesi

Teorem – 1.10

Aşağıdaki denklikler geçerlidir.

a. $\left[\forall \mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x})\right]' \equiv \exists \mathbf{x}, \mathbf{P}'(\mathbf{x})$

b. $\left[\exists \mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x})\right]' \equiv \forall \mathbf{x}, \mathbf{P}'(\mathbf{x})$

$\left[\forall \mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x})\right]' \equiv \exists \mathbf{x}, \mathbf{P}'(\mathbf{x})$ denkliğinin doğruluğunu gösterelim:

$\forall \mathbf{x}$, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ önermesi **Her x için p(x) doğrudur.** demek olduğundan, bunu **değillemek** için **en az bir x için p(x)'in yanlış olduğunu** söylemek gerekir.

Bu da $\exists \mathbf{x}$, $\mathbf{p}'(\mathbf{x})$ demekle aynı anlamdadır.

Aynı şekilde, $\left[\exists \mathbf{x}, \mathbf{P}(\mathbf{x})\right]' \equiv \forall \mathbf{x}, \mathbf{P}'(\mathbf{x})$ denkliğinin doğruluğunu da siz gösteriniz.

Örnek – 1.17

Aşağıda verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

a. p: "$\exists x \in R,\ x^2 < x$"

b. q: "$\forall x \in R,\ x^2 > 0$"

c. r: "$(\exists x \in Z,\ 2x + 1 = 0) \vee (\forall x \in Z,\ x \text{ tektir.})$"

d. s: "$(\forall x \in R,\ x - 2 < 0) \Rightarrow (\exists x \in R,\ x + 2 > 0)$"

Çözüm

a. p' : "$\forall x \in R,\ x^2 \geq x$"

b. q' : "$\exists x \in R,\ x^2 \leq 0$"

c. r' : "$(\forall x \in Z,\ 2x + 1 \neq 0) \wedge (\exists x \in Z,\ x \text{ tek değil})$"

d. s' : "$(\forall x \in R,\ x - 2 < 0) \wedge (\forall x \in R,\ x + 2 \leq 0)$"

Niceleyicilerin İki Anlamlılığı

Etkinlik – 1.55

Mert, ev ödevi olarak verilen 5 problemden yalnız 3'ünü çözebilmiştir.

$E = \{x \mid x \text{ ödev problemlerinden biri}\}$

$p(x)$: "x problemini Mert çözmüştür."

olarak verildiğine göre, aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

Bunları sözlerle ifade ediniz.

a. $\exists x,\ p(x)$ **b.** $\forall x,\ p(x)$ **c.** $\exists x,\ p'(x)$

d. $\forall x,\ p'(x)$ **e.** $[\exists x,\ p(x)]'$ **f.** $[\forall x,\ p(x)]'$

Etkinlik – 1.56

Aşağıda verilen önermelerin anlamları üzerinde tartışınız. Uygun evrensel kümeler belirleyerek bunları sembolleştiriniz.

a. Her sakallı, deden değildir.
b. Her babayiğit bu bileği bükemez.
c. Her kuşun eti yenmez.
d. Her gün çalışmam.

Sembolik önermelerin tek anlamlı oldukları açıktır. Ancak, "**her**" niceleyicisinin kullanıldığı olumsuz yüklemli önermelerin sözlü ifadeleri iki anlamlıymış gibi görünebilir. Bunu bir örnek üzerinde açıklayalım:

Öğretmeninizin tahtaya bir problem yazıp sınıftaki öğrencileri kastederek *“Her öğrenci bu problemi çözemez.”* dediğini varsayalım.

$E = \{x \mid \text{ x sınıftaki bir öğrencidir.}\}$

$p(x)$: “x bu problemi çözebilir.”

olsun.

Şöyle düşünülerek önerme aşağıdaki gibi sembolleştirilebilir.

Ali bu problemi çözemez.

Bora bu problemi çözemez.

Zeynep bu problemi çözemez.

⋮

$\underbrace{\text{Her öğrenci}}_{\forall x}\ \underbrace{\text{bu problemi çözemez.}}_{p'(x)}$

Ancak konuşma dilimizde, öğretmenin söylediği “$\forall \mathbf{x}, \mathbf{p}'(\mathbf{x})$” anlamına gelmemektedir. Eğer öğretmeniniz “$\forall x, p'(x)$” anlamını vermek isteseydi, *“Hiçbir öğrenci bu problemi çözemez.”* derdi.

Halbuki öğretmeninizin söylediği *“Bazı öğrenciler bu problemi çözebilir, ancak her öğrenci değil.”* anlamındadır.

Başka bir deyişle, konuşma dilimizdeki *“Her öğrenci bu problemi çözemez.”* önermesinin tam karşılığı *“Her öğrencinin bu problemi çözebileceği doğru değildir.”* biçimindedir.

Bu son biçimiyle önerme $[\forall \mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x})]'$ biçiminde sembolleştirilir.

Bu açıklamaya göre, bir yanlış anlamaya yol açmamak için “$\forall \mathbf{x}, \mathbf{p}'(\mathbf{x})$” önermesinin sözlü ifadesi,

“Her x için $p(x)$ *değildir.”* biçiminde değil,

“Hiçbir x için $p(x)$ *değildir.”* biçiminde olmalıdır.

Örnek – 1.18

t: *“Her tavuk yumurtlamaz.”*

önermesini sembolleştirelim:

$E = \{x \mid \text{ x tavuktur.}\}$

$p(x)$: “x yumurtlar.” dersek

t: $[\forall x,\ p(x)]'$ olur.

$[\forall x,\ p(x)]' \equiv \exists x,\ p'(x)$ olduğundan

“Her tavuk yumurtlamaz.” önermesi

“Bazı tavuklar yumurtlamaz.”

önermesine denktir.

Buna göre,

t: *“Her tavuk yumurtlamaz.”*

önermesinin olumsuzu

t′ : *“Her tavuk yumurtlar.”* olur.

!Bazı sözcüğü konuşma dilinde genellikle **en az bir fakat hepsi değil** anlamında kullanılır. Ancak, mantıkta **en az bir veya hepsi** anlamındadır.

Örneğin; konuşma dilinde pek kullanılmasa da mantıkta “2, 3, 5, 7 sayılarından bazıları asaldır.” denilebilir ve bu doğru olur.

Etkinlik – 1.57

Etkinlik−1.56’da verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

Etkinlik – 1.58

$E = \{x \mid \text{ x haftanın bir günüdür.}\}$

$p(x)$: “x günü çalışırım.”

diyerek **Etkinlik−1.54**’te verilen önermeleri sembolleştiriniz. Bu önermelerin doğruluk değerlerini bularak, önceki yanıtlarınızla karşılaştırınız.

Etkinlik – 1.59

Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p : (\exists x \in R,\ x^2 < 1) \vee (\forall x \in R,\ |x| > 0)$

b. $q : \left(\forall x \in R,\ \dfrac{x}{x} = 1\right) \wedge (\exists x \in R,\ x^2 = 1)$

c. $r : \left(\forall x \in Z,\ \sqrt{x^2} = x\right) \Rightarrow (\forall x \in N,\ x \le x^2)$

d. $s : (\exists x \in N,\ 2x = 3) \Leftrightarrow (\exists x \in R,\ x^2 + 2 = 0)$

Etkinlik – 1.60

Etkinlik−1.59’da verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

Etkinlik – 1.61

p: *"Her x gerçek sayısı için,* $2x+y=0$ *eşitliğini sağlayan en az bir y gerçek sayısı vardır."* önermesi

p: " $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R},\ \exists \mathbf{y} \in \mathbf{R},\ \mathbf{2x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$ "

biçiminde sembolleştirilir.

Bir de şu önermeyi sembolleştirelim:

q: *"En az bir y gerçek sayısı için;* $2x+y=0$ *eşitliğini her x gerçek sayısı sağlar."*

q: " $\exists \mathbf{y} \in \mathbf{R},\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R},\ \mathbf{2x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$ "

olur. p ile q önermelerinin denk olmadığını görüyorsunuz.

Demek ki;

$\forall \mathbf{x},\ \exists \mathbf{y},\ \mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \not\equiv \exists \mathbf{y},\ \forall \mathbf{x},\ \mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ dir.

Bu bilgiyi dikkate alarak;

a. Yukarıda verilen p ve q önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

b. *"Her başarılı erkeğin arkasında bir kadın vardır."* önermesini sembolleştiriniz.

c. Yazdığınız sembolik önermede $\forall$ ve $\exists$ sembollerinin yerlerini değiştiriniz. Elde ettiğiniz son önermeyi sözle ifade ediniz.

d. $[\forall \mathbf{x}, \exists \mathbf{y}, \mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y})]' \equiv \exists x, \forall y, \mathbf{p}'(\mathbf{x},\mathbf{y})$

olduğunu dikkate alarak, **b.** ve **c.**'de yazılan önermelerin olumsuzlarını sözle ifade ediniz.

Etkinlik – 1.62

A : Rizeliler yardımseverdir.

B : Ayhan Rize'lidir.

önermeleri doğru sayıldığına göre,

C : Ayhan yardımseverdir.

sonucu doğru olmak zorunda mıdır?

Bu soruyu aşağıdaki sembolleştirmeleri yapıp $A \wedge B$ nin C'yi gerektirip gerektirmediğini belirterek yanıtlayınız.

$E=\{x \mid x \text{ T.C. vatandaşıdır.}\}$

$p(x)$: x Rize'lidir.
$q(x)$: x yardımseverdir.

$p(a)$: Ayhan Rize'lidir.

$q(a)$: Ayhan yardımseverdir.

$$\left.\begin{array}{l} A: \forall x, [p(x) \Rightarrow q(x)] \\ B: p(a) \\ C: q(a) \end{array}\right\}$$

$a \in E$ (Ayhan T.C. vatandaşıdır.) olduğundan " $\forall \mathbf{x}, [\mathbf{p}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{q}(\mathbf{x})]$ önermesi doğrudur." demek " $\mathbf{p}(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{q}(\mathbf{a})$ önermesi doğrudur." demektir.

Buna göre; A, B, C önermeleri,

$$\left.\begin{array}{l} A: p(a) \Rightarrow q(a) \\ B: p(a) \\ C: q(a) \end{array}\right\}$$

biçiminde sembolleştirilebilir.

Etkinlik – 1.63

A : Rizeliler yardımseverdir.

B : Mert yardımseverdir.

önermeleri doğru sayıldığına göre

C : Mert Rize'lidir.

önermesi doğru olmak zorunda mıdır?

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

Etkinlik – 1.64

A : Rizeliler yardımseverdir.

B : Giray Rize'li değildir.

önermeleri doğru sayıldığına göre

C : Giray yardımsever değildir.

önermesi doğru olmak zorunda mıdır?

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

Alıştırmalar ve Problemler – 1.2

1. p(x) : $2^x - x^2 < 0$ açık önermesi veriliyor. Buna göre, aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p(-1)$ **b.** $p\left(\frac{1}{2}\right)$ **c.** $p(2)$ **d.** $p(11)$

2. $p(x,y):\ x^2 + x = y^2 - y$ açık önermesi veriliyor. Buna göre, aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p(-2,2)$ **b.** $p(3,4)$ **c.** $p(5,5)$ **d.** $p(1,1)$

3. Aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a. $p(x)$: " $x \in N,\ 3x + 6 = 0$ "

b. $q(x)$: " $x \in Z,\ (2x+1)(3x-1)(x-3) = 0$ "

c. $r(x)$: " $x \in Z,\ (x^2 > 4) \Rightarrow (x > 2)$ "

d. $s(x,y)$: " $x, y \in Z,\ x^2 + y^2 = 10$ "

e. $t(x,y)$: " $x, y \in Z,\ (x^2 \le 7) \wedge (y^2 = 4)$ "

f. $u(x,y)$: " $x, y \in R,\ (2x = 5) \wedge (4x + y = 5)$ "

4. Uygun evrensel kümeler belirleyerek aşağıdaki önermeleri sembolleştiriniz.

a. Bazı hayvanlar iki ayaklıdır.
b. Her taşıt tekerleklidir.
c. Hiçbir öğrenci tembel değildir.
d. Her insan karanlıktan korkmaz.
e. Her horoz ötmez.
f. Her öğrenci dikkatsizdir.
g. Bazı dikdörtgenler kare değildir.
h. Bazı köpekler ısırmaz.

5. 4. alıştırmada verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

6. Aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $\exists x \in R,\ x - 2 < x + 1$

b. $\forall x \in R,\ x^2 \ge x$

c. $\forall x \in N,\ \dfrac{x+2}{x+2} = 1$

d. $\forall x \in R,\ \dfrac{2x-1}{2x-1} = 1$

e. $(\exists x \in N,\ x^2 \ne x) \vee (\forall x \in R,\ x^2 \ne 3)$

f. $(\exists x \in R,\ x^2 < 1) \wedge (\forall x \in N,\ x^2 > 0)$

g. $(\exists x \in R,$ x asaldır.$) \Rightarrow (\exists x \in R,$ x çifttir.$)$

h. $\exists x \in R,$ (x asaldır.) $\Rightarrow$ (x çifttir.)

i. $\forall x \in R,\ (x^2 > 1) \Rightarrow (x > 1)$

j. $\forall x \in Z,$ (x tektir.) $\Leftrightarrow$ ($x + 1$ çifttir.)

7. 6. alıştırmada verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

8. Aşağıda verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

a. $\forall x,\ p(x)$

b. $\exists x,\ p(x)$

c. $\forall y,\ p'(y)$

d. $\exists z,\ p'(z)$

e. $[\forall x,\ p(x)] \wedge [\forall y,\ q(y)]$

f. $[\exists x,\ p(x)] \vee [\forall x,\ q(x)]$

g. $[\forall x,\ p(x)] \Rightarrow [\exists y,\ q(y)]$

h. $[\exists x,\ p(x)] \Leftrightarrow [\forall x,\ q(x)]$

i. $\forall x,\ [p(x) \wedge q(x)]$

j. $\exists x,\ [p(x) \vee q(x)]$

k. $\forall x,\ [p(x) \Rightarrow q(x)]$

l. $\exists x,\ [p(x) \Leftrightarrow q(x)]$

m. $\forall x,\ \exists y,\ p(x,y)$

n. $\exists x,\ \forall y,\ [p(x,\ y) \vee q(x,\ y)]$

o. $[\forall x,\ p(x)] \wedge [\exists x,\ q(x)] \Rightarrow [\exists x, r(x)]$

9. Aşağıda verilen önermeleri, uygun evrensel kümeler belirleyerek sembolleştiriniz. Sembolleştirmeden yararlanarak, bu önermelerin olumsuzlarını sözlerle ifade ediniz.

a. 5 ile bölünebilen doğal sayılardan en az biri asaldır.
b. Her gerçek sayının mutlak değeri, negatif olmayan bir gerçek sayıdır.
c. Her öğrenci çalışır, bazıları sınıfını geçer.
d. Her öğrenci her öğretmenine saygı gösterir.

10. Aşağıda verilen önermeleri, uygun evrensel kümeler belirleyerek sembolleştiriniz. Sembolleştirmeden yararlanarak, bu önermelerin olumsuzlarını sözlerle ifade ediniz.

a. Her güzelin bir kusuru vardır.
b. Bazı x gerçek sayıları için $x = y^2$ eşitliğini sağlayan en az bir y gerçek sayısı vardır.
c. Bazı insanlar her sorununu çözebilir.
d. Bazı insanlar her hayvana eziyet eder.

1.4 – Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat

Etkinlik – 1.65

Aşağıda, bildiğiniz bazı kavramlar için önerilen tanımlarla, henüz bilmediğiniz bazı kavramların tanımları verilmiştir.

Bildiğiniz kavramlardan hangilerinin tanımları kusurludur? Neden?

Yeni kavramlardan hangilerini anlayamıyorsunuz?

a. Üç doğru parçasından oluşan düzlemsel şekle **üçgen** denir.

b. Ortak noktaları bulunmayan iki doğruya **paralel** doğrular denir.

c. Bir doğrunun farklı iki noktası ile bu noktalar arasında kalan noktalarının birleşimine **doğru parça**sı denir.

d. Koordinat düzleminde koordinatları birer tam sayı olan noktalara **kafes noktaları** denir.

e. Bir matriste her terimin yerine bu terimin eş çarpanının konulması ile elde edilen matrisin devriğine bu matrisin **ek matris**i denir.

f. 2 ile bölünebilen bir sayıya **çift sayı** denir.

Tanım

Bir terimin anlamını açıklayan önermeye o terimin **tanım**ı denir.

Yeni bir terimin tanımı; tanımsız da olsa anlamı bilinen terimlerle, tanımlanmış terimlerle ve konuşma dilindeki sözcüklerle yapılır.

İyi bir tanımda; tanımlanan terimin hangi kümeye ait olduğu, bu terimi kümenin diğer elemanlarından ayıran özeliklerin neler olduğu tam olarak belirtilmelidir.

Bir terim ile tanımı tam olarak birbirini karşılayabilmelidir. Öyle ki; terim geçtiğinde o tanım, tanımı geçtiğinde yalnız o terim akla gelmelidir. Örneğin; **açı** teriminin bu temel ilkelere uyularak yapılmış tanımı, *"Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimine **açı** denir."* biçimindedir. Bu tanıma göre, "açılar" ışın çiftlerinden oluşan bir kümenin bir alt kümesini oluşturur. Açıları diğer ışın çiftlerinden ayıran özelikleri, başlangıç noktalarının ortak olmasıdır. Burada "açı" terimi ile bu terimin tanımı olarak verilen ifade birbirini tam olarak karşılar.

!Tanımsız terimler, anlamları bir önerme ile açıklanamayan terimlerdir. Ancak anlamları belirsiz değildir. Böyle terimlerin anlamları bir önermeyle değilse de örneklemeler, benzetmeler ve soyutlamalarla açıklanır. Tanımlı olsun tanımsız olsun; bir terim öğrenildiğinde o terime karşılık gelen kavram zihinde kesin olarak tasarlanabilir.

Aksiyom

Tanım – 1.16

*Doğru olduğu apaçık olan veya doğru sayılan, başka önermelerden elde edilemeyen önermeye **aksiyom** denir.*

Mantık ve matematikte terimlerin tanımlarından kaynaklanan, üzerlerine kuramların – *Sayılar kuramı*, *Kümeler kuramı*, *Fonksiyonlar kuramı*, *Öklit geometrisi*, *Lobachevski geometrisi*, *Analitik geometri*, ... gibi matematiksel yapı veya sistemlerin – oturtulduğu temel doğrular varsayılır. Nasıl, bazı terimlerin tanımsız olarak alınmaları bir zorunluluksa; bazı önermelerin de doğru sayılması bir zorunluluktur. Varsayılan bu temel doğrular ait oldukları matematiksel yapının **aksiyom**larıdır. Başka bir deyişle; her aksiyom, ait olduğu sistemin bir temel doğrusudur.

Örnek – 1.19

$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ sembollerine yüklenen anlamlar gereği $\mathbf{p \wedge q}$, $\mathbf{p \vee q}$, $\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermelerinin doğruluk değerleri mantık biliminde birer **aksiyom** olarak alınmışlardır.

Örnek – 1.20

İlköğretim okulunda öğrendiğiniz geometri Öklit geometrisidir. Öklit geometrisi 20'ye yakın aksiyom üzerine kurulmuştur. Bunlardan biri **paralellik aksiyomu**dur. Paralellik aksiyomuna göre;

"Bir doğruya dışındaki bir noktadan en fazla bir paralel doğru çizilebilir."

Hemen kabul edemeseniz de; Lobachevski geometrisi diye bilinen başka bir geometri sisteminde bu aksiyom, *"Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel doğru çizilebilir."* biçimindedir.

Bu iki geometri sisteminin, paralellik aksiyomu dışında kalan bütün aksiyomları ortaktır. Şimdi yadırgıyor olabilirsiniz. Ancak Lobachevski geometrisini öğrendiğinizde, o sistemin kendine özgü kavramlarıyla, paralellik aksiyomunu kolayca kabulleneceksiniz.

Demek ki; farklı düşünce sistemlerinde – farklı matematiksel yapılarda – çelişiyor gibi görünen doğrular geçerli olabilmektedir.

Örnek – 1.21

"Eşit niceliklere eşit nicelikler eklendiğinde, eşit toplamlar elde edilir." **1**

önermesi aksiyom olarak alınabilir.

" $2 = 2$ dir.", " $3 = 3$ tür.", ... gibi apaçık doğru olan sınırsız sayıda önerme yazılabilir. Ancak; bunların her biri **1** aksiyomu kullanılarak diğerlerinden elde edilebilir. Dolayısıyla aksiyom sayılmazlar. Böyle önermeler, bunların hepsini kapsayacak biçimde " $a = a$'dır." diye ifade edilirse, bu bir aksiyom olabilir.

✚ Bir matematik sisteminde aksiyomlar,

- birbirlerinden elde edilememeli;
- birbiriyle çelişen sonuçlar vermemeli;
- sistemi tam olarak belirleyecek biçimde birbirlerini tamamlayıcı olmalıdırlar.

Örnek – 1.22

"Farklı iki nokta bir doğru belirtir." **1** önermesi Öklit geometrisinin aksiyomlarından biridir. Bu, *"Farklı iki noktadan geçen bir tek doğru vardır."* demektir.

1 önermesinin yerine aksiyom olarak *"Farklı iki doğru en fazla bir noktada kesişir."* **2** önermesi alınabilir. Ancak **1** ve **2** önermeleri birlikte aynı sistemin aksiyomları olamazlar. Çünkü bunlardan herhangi biri diğerinden elde edilebilir.

Siz, örneğin **2** önermesini aksiyom olarak alıp **1** önermesini elde ediniz.

Bir önerme, bir aksiyomdan elde edilebiliyorsa, bu önermeye **teorem** diyeceğiz.

Teorem

Tanım – 1.17

Hipotezi doğru olan ya da doğru sayılan ve doğruluğunun, doğru olduğu bilinen önermeler yardımı ile gösterilmesi gereken $p \Rightarrow q$ *biçimindeki önermelere* ***teorem*** *denir.*

Bu tanımdan ilk anlaşılacak olan, bir teoremin doğru bir önerme olduğudur. Hipotezi doğru olan doğru bir $p \Rightarrow q$ önermesinin hükmü de doğru olacaktır.

O halde, $p \Rightarrow q$ önermesi bir teorem ise hem p hem de q doğru önermelerdir.

$p \Rightarrow q$ önermesi bir teorem iken $q \Rightarrow p$ önermesi de bir teorem ise buna $p \Rightarrow q$ teoreminin **karşıt teorem**i denir.

Bir matematiksel yapı içerisindeki her doğru önermeyi aksiyomlar ve teoremler sınıflarından birine koymak, verdiğimiz tanımlara göre yanlış olmaz. Ancak matematikte aksiyom ve teorem denilince akla genel doğruların ifadesi olan önermeler gelmelidir. Burada, verdiğimiz tanımlarda bir eksiklik aramak gerekir. Zaten tanımlarımız kusursuz olsaydı, böyle açıklamalara gerek kalmazdı.

Tanımımızda eksik kalan kısmı bir örnekle tamamlamaya çalışalım. Bildiğimiz Pisagor teoremi,

"Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir." biçimindedir.

"Bir dik üçgenin dik kenarlarının uzunlukları 3 birim ve 4 birim ise hipotenüsünün uzunluğu 5 birimdir." önermesi de Pisagor teoreminin bir özel duruma uygulanmasını dile getirir.

Matematikte böyle önermelere teorem denmez. Olsa olsa, teoremin bir **özelleme**si ya da yorumlaması denebilir.

Başka bir örnek verelim:

“Bir üçgende iki iç açı eş ise karşılarındaki kenarlar da eştir.” önermesi bir teoremdir.

“Bir üçgende iç açılar eş ise kenarlar da eştir.” önermesi de bir teoremdir. Ancak ikincisi ilkinin bir sonucudur.

Böyle sadeleştirmelerle, bir matematiksel yapı içerisindeki teoremler belli bir sayıya indirilebilir. Demek ki, matematikteki her doğru önerme aksiyom ya da teorem değildir. Sayısız doğru önerme, aksiyom ve teoremlerin **özelleme**leri ya da **sonuç**ları durumundadır.

Örnek – 1.23

“Bir tek sayının karesi de tektir.” önermesi bir teoremdir. Bu teoremi koşullu önerme biçiminde şöyle yazabiliriz:

“a bir tek sayı ise a^2 *bir tek sayıdır.”*

Teoremin hipotezi

p : *“a bir tek sayıdır.”* ; hükmü

q : *“*a^2 *bir tek sayıdır.”* olur.

Teoremin karşıtı *“*a^2 *bir tek sayı ise a bir tek sayıdır.”* önermesidir ve bu teorem değildir. (Neden?)

Tanım – 1.18

*Bir teoremin doğruluğunun gösterilmesine o teoremin **ispatlanması** (kanıtlanması) denir.*

Bir teorem ispatlanırken hipotezden yola çıkılarak tanımlar, aksiyomlar ve önceden ispatlanmış teoremler, her biri sonrakini gerektirecek biçimde sıralanır. Sonunda hükme varılır. Bu akıl yürütme zincirine **ispat** (kanıt) adı verilir.

Etkinlik – 1.66

Aşağıda verilen önermeler birer teoremdir. Bu teoremlerin hipotezlerini ve hükümlerini belirtiniz. Teoremleri $p \Rightarrow q$ biçiminde ifade ediniz.

a. Bir üçgende kenarlar eş değilse büyük kenar karşısında büyük açı bulunur.

b. Çarpımı sıfır olan iki gerçek sayıdan en az biri sıfırdır.

c. İki tek sayının toplamı çifttir.

d. Bir ikizkenar üçgende tabana ait yükseklik tabanı ortalar.

Etkinlik – 1.67

Etkinlik–1.66’da verilen teoremlerin karşıtlarını yazınız. Bunlardan hangileri teoremdir?

İspatlama Yöntemleri

Matematikteki ispatlama yöntemleri aşağıdaki çizelgede verildiği gibi sınıflandırılabilir:

İspatlama Yöntemleri

- Tüme varım
- Tümden gelim
  - Doğrudan ispatlama
  - Dolaylı ispatlama
    - Olmayana ergi
    - Çelişki
    - Deneme
    - Aksine örnek verme

Bu kesimde yalnız **tümden gelim yöntemleri** üzerinde duracağız.

Doğrudan İspatlama Yöntemi

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ önermesinin $p \Rightarrow r$ önermesini mantıksal olarak gerektirdiğini hatırlayınız.

Bu yöntemle $p \Rightarrow q$ teoremini ispatlamak için, gerekli sayıda $p \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2$, … , $p_n \Rightarrow q$ önermeleri bulunur.

Bu önermelerin doğru olması $p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olmasını gerektirecektir.

Art arda gerektirmeler, ispat yapılırken kısaca

$\mathbf{p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow q}$

ya da

$$\begin{aligned} &\mathbf{p} \\ \Rightarrow\ &\mathbf{p_1} \\ \Rightarrow\ &\mathbf{p_2} \\ \Rightarrow\ &\mathbf{p_3} \\ &\vdots \\ \Rightarrow\ &\mathbf{q} \end{aligned}$$

biçiminde gösterilir.

Örnek – 1.24

"İki tek sayının çarpımı bir tek sayıdır." teoremini doğrudan ispatlama yöntemi ile ispatlayalım:

Teoremin $p \Rightarrow q$ biçimindeki ifadesi

"a ve b tek sayı ise $a \cdot b$ *tektir."* olur.

a ve b tek sayı

$\Rightarrow (a = 2k+1) \wedge (b = 2m+1)$; $k, m \in Z$

$\Rightarrow a \cdot b = (2k+1) \cdot (2m+1)$

$\Rightarrow a \cdot b = 4km + 2k + 2m + 1$

$\Rightarrow a \cdot b = 2\underbrace{(2km + k + m)}_{n \in Z} + 1$

$\Rightarrow a \cdot b = 2n + 1$

$\Rightarrow a \cdot b$ tektir.

Dolaylı İspatlama Yöntemleri

Olmayana Ergi Yöntemi

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$

denkliğini hatırlayınız. Bu yöntemde, $p \Rightarrow q$ teoremini ispatlamak yerine bunun dengi olan $q' \Rightarrow p'$ teoremi ispatlanır.

Doğal olarak, $q' \Rightarrow p'$ teoreminin ispatlanmasının $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatlanmasından daha kolay olduğu durumlarda bu yöntem seçilmelidir.

Örnek – 1.25

"Karesi tek olan doğal sayı tektir." teoremini olmayana ergi yöntemi ile ispatlayalım:

Verilen önerme,

$p \Rightarrow q :$ $n \in N$, $(n^2$ tektir.$) \Rightarrow ($n tektir.$)$

biçimindedir.

Bunun karşıt tersi,

$q' \Rightarrow p' :$ $n \in N$, (n çifttir.) $\Rightarrow$ $(n^2$ çifttir.$)$ olur.

Demek ki,

$q' \Rightarrow p'$ teoremini ispatlayacağız.

(n çifttir.)

$\Rightarrow n = 2k$, $n, k \in N$

$\Rightarrow n^2 = (2k)^2$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2$

$\Rightarrow n^2 = 2(2k^2)$

$\Rightarrow n^2 = 2m$, $(2k^2 = m \in N)$

$\Rightarrow n^2$ çifttir.

Bu sonucu şöyle açıklarız:

n çift olsaydı, n^2 çift olurdu. Hâlbuki n^2 tektir. O hâlde, n tektir.

(**Örnek–1.23**'teki *"*a^2 *tek sayı ise a tek sayıdır."* önermesinin neden teorem olmadığını bulabildiniz mi?)

Çelişki Yöntemi

$(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'$

denkliğini hatırlayınız. Bu yöntemde $p \wedge q'$ önermesinin bir çelişme olduğu gösterilir. Böylece $p \Rightarrow q$ önermesinin doğru olduğu gösterilmiş olur.

Örnek – 1.26

$x \in R$, $(3x + 4 = 28) \Rightarrow (4x + 3 \neq 19)$

önermesinin doğru olduğunu çelişki yöntemi ile ispatlayalım:

$p \Rightarrow q :$ $x \in R, (3x + 4 = 28) \Rightarrow (4x + 3 \neq 19)$

$\Rightarrow p \wedge q' :$ $x \in R$, $(3x + 4 = 28) \wedge (4x + 3 = 19)$

$\Rightarrow p \wedge q' :$ $x \in R$, $(3x = 24) \wedge (4x = 16)$

$\Rightarrow p \wedge q' :$ $x \in R$, $(x = 8) \wedge (x = 4)$

$\Rightarrow p \wedge q' \equiv 0$ olur.

Buna göre, $p \Rightarrow q$ önermesi doğrudur.

Örnek – 1.27

Öklit geometri sisteminin aksiyomlarından biri

r: *"Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer."*

önermesidir. Bu aksiyoma dayanarak,

s: *"Farklı iki doğrunun en fazla bir ortak noktası vardır."*

teoremini çelişki yöntemi ile ispatlayalım :

s önermesi

s: *"*d_1 ve d_2 *farklı iki doğru ise* $d_1 \cap d_2$ *kümesi sıfır veya bir elemanlıdır."*

biçiminde ifade edilebilir. Buna göre;

hipotez

p: " d_1 ve d_2 farklı iki doğrudur."

hüküm

q: " $d_1 \cap d_2$ kümesi sıfır veya bir elemanlıdır."

önermeleri ve

q' : " $d_1 \cap d_2$ kümesi en az iki elemanlıdır."

önermesi olur.

q' önermesine göre, d_1 ve d_2 doğrularının en azından A ve B gibi farklı iki ortak noktası vardır.

r aksiyomuna göre, A ve B gibi farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden, p ile q' önermeleri çelişir.

Öyleyse,

"Farklı iki doğrunun en fazla bir ortak noktası vardır." önermesi doğrudur.

Deneme Yöntemi

Bir açık önermenin evrensel kümesi sonlu sayıda elemandan oluşmuşsa, bu önermenin bu elemanların her biri için doğru olup olmadığı tek tek deneyerek anlaşılabilir.

Örnek – 1.28

"Onluk sayma düzeninde 3'ten büyük rakamların kareleri iki basamaklıdır."

önermesinin doğru olduğunu deneme yöntemi ile ispatlayalım:

4 ile 9 arasındaki rakamların kareleri de 4^2 ile 9^2 arasında olacağından, yalnız 4 ile 9 rakamlarını denemek yeter.

$4^2 = 16$ ve $9^2 = 81$

olduğundan önerme doğrudur.

Aksine Örnek Verme Yöntemi

Bu yöntem genellikle bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için kullanılır.

Örnek – 1.29

"Tam sayıların kareleri birer çift sayıdır."

önermesinin yanlış olduğunu aksine örnek vererek gösterelim :

5 bir tam sayıdır.

$5^2 = 25$ olup 25 bir çift sayı değildir.

O hâlde, verilen önerme yanlıştır.

Etkinlik – 1.68

Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu doğrudan ispat yöntemiyle ispatlayınız.

a. $x \in R$, $2x + 3 = 11$ ise $3x + 2 = 14$ tür.

b. İki çift sayının çarpımı 4 ile tam bölünür.

c. Bir tam sayının karesinin 4 ile bölümündeki kalan ya 0 ya da 1'dir.

Etkinlik – 1.69

Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu olmayana ergi yöntemi ile ispatlayınız.

a. İki doğal sayının çarpımı çift ise bu sayılardan en az biri çifttir.

b. $x \in R$, $6x - 3 = 27$ ise $x \neq 3$ tür.

c. $x \in R$, $x = -3$ ise $5x + 1 = -14$ tür.

Etkinlik – 1.70

Etkinlik–1.69'daki önermeleri çelişki yöntemi ile ispatlayınız.

Etkinlik – 1.71

Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu deneme yöntemi ile ispatlayınız.

a. Karesi 4 basamaklı olan en küçük doğal sayı 32 dir.

b. $\forall x \in \{3, 4, 5, 6\}$, $x^2 - 7x < 6$

c. 64'ün 4'ten küçük olmayan bölenleri 4 ile tam bölünür.

Etkinlik – 1.72

Aşağıdaki önermelerin yanlış olduğunu aksine örnek vererek gösteriniz.

a. Tek sayı olan rakamlar asaldır.

b. Karesinin 2 fazlası tek olan sayılar tektir.

c. Her x, y $\in$ R için, $x^2 < y^2$ ise $x < y$ dir.

d. $(5 - 2x \neq 9) \Rightarrow (x \neq 1)$

Alıştırmalar ve Problemler – 1.3

1. Aşağıda verilen tanımlardan her biri kusurludur. Kusurları belirtiniz ve düzeltiniz.

a. Dört doğru parçasından oluşan düzlemsel şekle **dörtgen** denir.

b. Üç noktanın belirttiği doğru parçalarının birleşimine **üçgen** denir.

c. $2n+1$ biçimindeki bir sayıya **tek sayı** denir.

d. Matematikte, doğru olan önermeye **teorem** denir.

2. Aşağıdaki teoremlerin hipotez ve hükümlerini ayırarak bunları $p \Rightarrow q$ biçiminde ifade ediniz.

a. Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir.

b. Bir doğal sayının karesi bu sayıdan küçük değildir.

c. Bir dik üçgenin alanı, dik kenarların uzunluklarının çarpımının yarısına eşittir.

d. En az biri çift olan iki doğal sayının çarpımı çifttir.

3. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu doğrudan ispat yöntemi ile ispatlayınız.

a. $x=7$ ise $23-2x=9$ dur.

b. $4x-5=31$ ise $x=9$ dur.

c. İki tek sayının toplamı çifttir.

d. 3'ün tam katı olan iki tam sayının çarpımı 9'un tam katı olur.

4. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu olmayana ergi yöntemi ile ispatlayınız.

a. $x \in R,\ 3x-5=7$ ise $x=4$ tür.

b. $x \in R,\ x=4$ ise $5x+9 \neq 24$ tür.

c. $x \in R,\ 5-2x \neq 9$ ise $x \neq -2$ dir.

d. $x, y \in R,\ x^2-4xy+4y^2 \neq 4$ ise $x-2y \neq 2$ dir.

5. 4. alıştırmadaki önermeleri çelişki yöntemi ile ispatlayınız.

6. Aşağıdaki önermelerin yanlış olduğunu aksine örnek vererek gösteriniz.

a. Bir gerçek sayının karesi kendisinden büyüktür.

b. Kareleri eşit olan gerçek sayılar, birbirine eşittir.

c. İki gerçek sayının toplamı pozitif ise bu sayıların her biri pozitiftir.