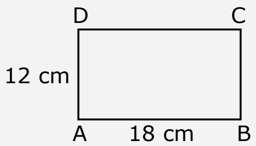
4.3.3 – Ortak Bölenlerin En Büyüğü

Etkinlik – 4.97

24 ve 36 sayılarının ikisini de bölen doğal sayıların kümesini yazınız.

Etkinlik – 4.98

Elinize 12 cm X 18 cm boyutlarında bir karton alınız. Bu kartonu, birer kenarlarının ölçüsü aşağıda verilen kare şeklindeki parçalardan hangilerine -hiç artmadan- ayırabilirsiniz.



a. 1 cm	**b.** 2 cm	**c.** 3 cm	**d.** 4 cm
e. 6 cm	**f.** 8 cm	**g.** 9 cm	**h.** 12 cm

Tanım – 4.17

a *ve* ***b*** *doğal sayılarının ikisini de bölen bir* ***c*** *doğal sayısına,* ***a*** *ile* ***b****'nin bir* ***ortak böleni*** *denir.*

Örneğin; 4 sayısı, 24 ve 32'nin bir ortak bölenidir.

Bir **a** doğal sayısının bölenlerinin kümesi "**B(a)**" ile; **a** ve **b** doğal sayılarının ortak bölenlerinin kümesi "**B(a, b)**" ile gösterilir.

Örneğin; $B(8) = \{1, 2, 4, 8\}$,

$B(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

$B(8, 12) = \{1, 2, 4\}$ dir.

Tanım – 4.18

1'den başka ortak böleni olmayan doğal sayılara, ***aralarında asal sayılar*** *denir.*

Örneğin; 4 ile 9 aralarında asal sayılardır.

Farklı iki asal sayı aralarında asaldır. 7 ile 11 gibi.

Bir asal sayı ile, bunun bölmediği bir doğal sayı aralarında asaldır. 3 ile 8 gibi.

Tanım – 4.19

En az biri sıfırdan farklı iki doğal sayının ortak bölenlerinden en büyüğüne, bu iki doğal sayının ***ortak bölenlerinin en büyüğü*** *denir*

a *ve* ***b*** *sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü* ***OBEB(a, b)*** *ile gösterilir.*

Örnek 4.62

28'in bölenlerinin kümesi

$B(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$;

42'nin bölenlerinin kümesi

$B(42) = \{1, 2, 3, 7, 14, 21, 42\}$;

28 ve 42'nin ortak bölenlerinin kümesi

$B(28, 42) = \{1, 2, 7, 14\}$;

OBEB(28, 42) = 14 tür.

İki Doğal Sayının Ortak Bölenlerinin Öklid Algoritması İle Bulunması

Büyük doğal sayıların ortak bölenleri –dolayısıyla OBEB'leri– **Öklid Algoritması*** da denilen **ardışık bölmeler yöntemi** ile bulunur.

Bu yöntem aşağıdaki teoremlere dayanır.

Teorem –4.48

a *doğal sayısının bir böleni* ***b*** *doğal sayısı ise;* ***a*** *ile* ***b****'nin ortak bölenlerinin kümesi,* ***b****'nin bölenlerinin kümesine eşittir.*

Örneğin; 21 sayısı 42'nin bir böleni olduğundan,

$B(21, 42) = B(21) = \{1, 3, 7, 21\}$ dir.

A doğal sayısının bir böleni b ise,

OBEB(a, b) = **b** olacağı açıktır.

Örneğimizde de OBEB(21, 42) = 21 olduğunu görüyorsunuz.

Etkinlik – 4.99

Teorem-4.48'i ispatlayınız.

Teorem –4.49

a *doğal sayısının* ***b*** *doğal sayısı ile bölünmesindeki kalan r ise;*

$\boxed{1}$ ***a*** *ile* ***b****'nin her ortak böleni,* ***r****'nin de bir bölenidir.*

$\boxed{2}$ ***b*** *ile* ***r****'nin her ortak böleni,* ***a****'nın da bir bölenidir.*

Teorem-4.49'u sembollerle ifade edelim:

$a, b, r \in N^+$; $0 < r < b$; $a = b \cdot k + r$ ise

$\boxed{1}$ $\mathbf{B(a, b) \subset B(r)}$ ve

$\boxed{2}$ $\mathbf{B(b, r) \subset B(a)}$ dır.

$B(a, b) = B(a) \cap B(b)$ olduğu dikkate alınırsa

$\boxed{1}$ $B(a) \cap B(b) \subset B(r)$

$\boxed{2}$ $B(b) \cap B(r) \subset B(a)$ olur.

$\boxed{1}$ ve $\boxed{2}$ den

$B(a) \cap B(b) = B(b) \cap B(r)$ (Etkinlik-4.100)

$\Rightarrow \mathbf{B(a, b) = B(b, r)}$ bulunur.

* *Algoritma; bir problemin çözümünü veren genelleştirilmiş işlemler bütünü, diye tanımlanabilir. Çarpma algoritması, bölme algoritması, … gibi.*

Demek ki;

a doğal sayısının **b** doğal sayısı ile bölünmesindeki kalan **r** ise; **a** ile **b**'nin ortak bölenlerinin kümesi, **b** ile **r**'nin ortak bölenlerinin kümesine eşittir.

Etkinlik – 4.100

Kümelerde kesişim işleminin ve alt kümenin özeliklerinden yararlanarak:

$B(a) \cap B(b) \subset B(r)$ ve $B(b) \cap B(r) \subset B(a)$ ise

$B(a) \cap B(b) = B(b) \cap B(r)$ olduğunu gösteriniz.

Artık, iki doğal sayının ortak bölenlerinin bulunmasında kullanılan **Öklid algoritması**nı verebiliriz.

Öklid Algoritması

Doğal sayılarda,

a'nın **b** ile bölünmesindeki kalan **r**;

b'nin **r** ile bölünmesindeki kalan $\mathbf{r_1}$;

r'nin $\mathbf{r_1}$ ile bölünmesindeki kalan $\mathbf{r_2}$;

$\mathbf{r_1}$'in $\mathbf{r_2}$ ile bölünmesindeki kalan $\mathbf{r_3}$

⋮

$\mathbf{r_{n-1}}$'in $\mathbf{r_n}$ ile bölünmesindeki kalan **0** olsun.

Teorem-4.48'e göre,

$B(a,b) = B(b,r) = B(r,r_1) = \ldots = B(r_n,0)$ dir.

Böylece, **a** ile **b**'nin ortak bölenlerinin kümesi $\mathbf{r_n}$'in bölenlerinin kümesi olarak ifade edilmiş olur.

Bu durumda, **EBOB(a, b)** = $\mathbf{r_n}$ dir.

Bu sonucu sözle de vurgulayalım :

İki doğal sayının ortak bölenlerinin kümesi, bu sayıların OBEB'inin bölenlerinin kümesine eşittir.

Örnek 4.63

576 ve 360 sayılarının ortak bölenlerinin kümesini ve OBEB'ini bulunuz.

Çözüm

Öklid algoritması ile, çözüm pek uzun olmayacaktır.

$576 = 360 \cdot 1 + 216$

$360 = 216 \cdot 1 + 144$

$216 = 144 \cdot 1 + 72$

$144 = 72 \cdot 2 + 0$

B(576, 360) = B(72, 0) olduğundan,

$B(576,360) = \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\}$

ve OBEB(576, 360) = 72 bulunur.

Etkinlik – 4.101

12786 ve 7812 sayılarının OBEB'ini bulunuz.

Ortak Bölenlerin Asal Çarpanlara Ayırma Yoluyla Bulunması

Etkinlik – 4.102

$a = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$, $b = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ ve a ile b'nin bir ortak böleni $k = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^t$ olsun.

a. x, y, z, t yerine konulabilecek doğal sayıları bulunuz.

b. OBEB(a, b)yi bulunuz.

Bir doğal sayının diğer bir doğal sayıyı bölmesi için; bölenin her asal çarpanının, bölünenin asal çarpanları içinde en az bölendeki üssüne eşit bir üsle bulunmasının gerekli ve yeterli olduğu kolayca ispatlanabilir. Buna göre, iki doğal sayının ortak asal çarpanlarından kuvvetleri küçük olanlarının çarpımı, iki sayıyı da bölen en büyük doğal sayı olur.

O halde;

Iki veya daha fazla doğal sayının OBEB'ini bulmak için, sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Bu asal çarpanlardan ortak olanlarının küçük üslüleri çarpılır.

Örnek 4.64

108 ile 144 sayılarının OBEB'ini bulalım:

I. yol

$108 = 2^2 \cdot 3^3$ ve $144 = 2^4 \cdot 3^2$ dir.

Bu sayıların ortak bölenleri $2^x \cdot 3^y$ biçimindedir. x'in en büyük değeri 2 ve y'nin en büyük değeri 2 olabileceğinden, bu bölen en çok $2^2 \cdot 3^2$ olabilir.

O halde; $\text{OBEB}(108,144) = 2^2 \cdot 3^2$

$\Rightarrow \text{OBEB}(108,144) = 36$ olur.

II. yol

Verilen sayıların OBEB'ini, bu sayıların ortak asal bölenlerini tek tek ayırarak da bulabiliriz. Bunun için; verilen sayılar –en küçük asal bölenlerinden başlanarak– asal bölenlerine art arda bölünür.

Aşağıdaki işlem çizelgesini inceleyiniz.

108	144	2
54	72	2
27	36	2
27	18	2
27	9	3
9	3	3
3	1	3
1		

Çizginin sağındaki asal sayılar, bulundukları satırdaki sayılardan en az birini böler. Çember içine alınanlar ortak bölenlerdir. Bunların çarpımı OBEB'i verir.

$\text{OBEB}(108,144) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ olur.

Teorem –4.50

İki doğal sayının her birinin, ortak bölenlerinin en büyüğüne bölünmelerinden elde edilen bölümler aralarında asaldır.

Örneğin; OBEB(108, 144) = 36,

$108 : 36 = 3$ ve $144 : 36 = 4$ olup 3 ile 4 aralarında asaldır.

Etkinlik 4– 103

Teorem-4.50'yi ispatlayınız.

Örnek 4.65

OBEB(54, a) = 18 olduğuna göre, üç basamaklı en küçük a sayısı kaçtır?

Çözüm

18 sayısı 54 ile a'nın OBEB'i olduğundan

$54 = 18 \cdot 3$ ve $a = 18 \cdot x$ yazılabilir. Burada, 3 ile x aralarında asaldır.

a sayısı üç basamaklı olacağından, yandaki işleme göre, $x > 5$ olmalıdır.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 18 \\ \hline - \quad & 5 \\ 10 & \end{array}$$

5'ten büyük ve 3 ile aralarında asal olan en küçük sayı 7 olduğundan, en küçük a sayısı da

$a = 18 \cdot 7 = 126$ olur.

Örnek 4.66

108, 162 ve 198 sayılarının OBEB'ini bulunuz.

Çözüm

I. yol

$108 = 2^2 \cdot 3^3$, $162 = 2 \cdot 3^4$, $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ dir.

108, 162 ve 198 sayılarının ortak bölenleri $2^x \cdot 3^y$ biçimindedir.

x'in alabileceği en büyük değer 1, y'nin alabileceği en büyük değer 2'dir. (Neden?)

Buna göre,

$\text{OBEB}(108,162,198) = 2^1 \cdot 3^2 = 18$ olur.

II. yol

Sayıların ortak asal çarpanları tek tek seçilir. Bunlar çarpılır.

108	162	198	2	Çember içine
54	81	99	2	alınanlar, her
27	81	99	3	sayıda ortak olan
9	27	33	3	çarpanlardır.
3	9	11	3	Bunların çarpımı
1	9	11	3	OBEB'i verir.
	3	11	3	
	1	11	11	
		1		

$\text{OBEB}(108,162,198) = 2 \cdot 3^2 = 18$ olur.

Örnek 4.67

363 ve 421 sayılarının bir a doğal sayısı ile bölünmelerindeki kalanlar sırasıyla 3 ve 13'tür.

Buna göre, a sayısı kaçtır?

Çözüm

a sayısı $363 - 3 = 360$ ve $421 - 13 = 408$ sayılarının bir ortak bölenidir. İki doğal sayının ortak bölenleri, OBEB'inin de böleni olduğundan

OBEB(408, 360)'i bulalım:

Öklid algoritması ile,

B(408,360) = B(360,48) = B(48,24) = B(24, 0) bulunur. (Neden?)

OBEB(408, 360) = 24'tür.

a sayısı 13'ten büyük olmalıdır. (Neden?)

24'ün 13'ten büyük olan böleni 24 olduğundan, a sayısı 24'tür.

Örnek 4.68

36 kg, 48 kg ve 54 kg lık çuvallarda sırasıyla bulgur, pirinç ve fasulye bulunmaktadır. Bunlardan, hiç artmayacak biçimde eşit ağırlıkta paketler yapılacaktır.

Toplam en az kaç paket olur?

Çözüm

Hiç arttırılmayacağına göre, paketlerin ağırlıkları 36, 48, 54 sayılarının bir ortak böleni kadar kg olacaktır. Paketlerin en az sayıda olması istendiğinden, ağırlıkları olabildiği kadar büyük olmalıdır.

O hâlde; bir paketin ağırlığı OBEB(36, 48, 54) kadar kg olur.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $54 = 2 \cdot 3^3$ olup

$\text{OBEB}(36,48,54) = 2 \cdot 3 = 6$ bulunur.

Toplam paket sayısı da

$36 : 6 + 48 : 6 + 54 : 6 = 23$ olur.

Etkinlik 4– 104

Aşağıda verilen sayıların OBEB'lerini bulunuz.

a. $a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$; $b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$

b. $a = 4 \cdot 6^3 \cdot 30^4$; $b = 4^2 \cdot 6^2 \cdot 30$

c. $a = 12^2 \cdot 15^3$; $b = 12^3 \cdot 15 \cdot 20^2$

Etkinlik 4– 105

Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan üç basamaklı en küçük a sayılarını bulunuz.

a. OBEB(120, a) = 24

b. OBEB(84, a) = 14

Etkinlik 4– 106

Aşağıdaki sayıların OBEB'lerini bulunuz.

a. 212, 228, 264, 636

b. 1036, 6824, 8464

c. 756, 1584, 2448

Etkinlik 4– 107

a ve b doğal sayılarının herbirinin, bunların OBEB'i ile bölünmesinden elde edilen bölümlerin toplamı 12'dir.

$a \cdot b = 210 \cdot \text{OBEB}(a,b)$ ve a>b olduğuna göre a ve b sayılarını bulunuz.

Etkinlik 4– 108

a, b $\in$N ; a>b ; OBEB(a, b) = 24 ve

$a \cdot b = 8640$ olduğuna göre, a ve b sayılarını bulunuz.

4.3.4 – Ortak Katların En Küçüğü

Tanım – 4.20

a, b, c, n $\in N^+$ olmak üzere,

- **n · a** *çarpımına **a'nın n katı**;*

- ***a*** *ve* ***b*** *sayılarının ikisinin de katı olan* ***c*** *sayısına* ***a ile b'nin ortak katı****;*

- ***a*** *ile* ***b****'nin ortak katlarından en küçüğüne* ***a ile b'nin ortak katlarının en küçüğü*** *denir.*

a'nın katlarının kümesi K(a) ile;
a ile b'nin ortak katlarının kümesi K(a, b) ile;
a ile b'nin ortak katlarının en küçüğü OKEK(a, b) ile gösterilir.

Örnek 4.69

4'ün katlarının kümesi
$K(4) = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, ...\}$;
6'nın katlarının kümesi
$K(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, ...\}$;
4 ile 6'nın ortak katlarının kümesi
$K(4,6) = \{12, 24, 36, 48, ...\}$;
4 ile 6'nın ortak katlarının en küçüğü
OKEK(4, 6) = 12 dir.

Tanım-4.20'den şu sonuçlar çıkarılabilir:

1. $K(a, b) = K(a) \cap K(b)$ dir.
2. a, b $\in N^+$ olmak üzere; $a \cdot b$'nin her katı, a ile b'nin bir ortak katıdır.

$K(a \cdot b) \subset K(a,b)$ dir.

Teorem –4.51

a ile b sayma sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü d; a ile b'nin d'ye bölünmesindeki bölümler sırasıyla x ve y olsun.

a ile b'nin ortak katlarının kümesi, $d \cdot x \cdot y$ çarpımının katlarının kümesine eşittir.

$K(a,b) = K(d \cdot x \cdot y)$ *dir.*

Örneğin; a = 12 ve b = 18 iken
d = OBEB(12,18) = 6 , x = 12 : 6 = 2 ve
y = 18 : 6 = 3 olup $d \cdot x \cdot y = 36$ ve
$K(12,18) = K(36) = \{36, 72, ...\}$ olur.

Etkinlik 4– 109

Teorem-4.51'i ispatlayınız..

Teorem-4.51'den şu sonuçlar çıkarılabilir:

1. OBEB(a,b) = d , a : d = x ve b : d = y olmak üzere, **OKEK(a,b) = d · x · y** dir.
2. a ile b'nin ortak katlarının kümesi, OKEK(a,b) nin katlarının kümesine eşittir.

Örnek 4.70

42 ile 48'in üç basamaklı en büyük ortak katını bulunuz.

Çözüm

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $48 = 2^4 \cdot 3$, d = OBEB(42, 48) = 6,
x = 42 : d = 7 , y = 48 : d = 8 olup
$\text{OKEK}(42,48) = d \cdot x \cdot y = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$ olur.

Ortak katlar OKEK'nün katları olacağından, aradığımız sayı 336'nın üç basamaklı en büyük katıdır. Bu da, $336 \cdot 2 = 672$'dir.

Teorem –4.52

a, b $\in N^+$ olmak üzere,

$\text{OBEB}(a,b) \cdot \text{OKEK}(a,b) = a \cdot b$ dir.

Etkinlik 4– 110

Teorem-4.52'yi ispatlayınız..

Teorem-4.52'den şu sonuçlar çıkarılabilir:

1. Aralarında asal sayıların ortak katlarının en küçüğü, bu sayıların çarpımına eşittir.
   OBEB(a, b) = 1 ise OKEK(a, b) = $a \cdot b$ dir.
   Örneğin; OKEK$(25, 36) = 25 \cdot 36 = 900$ olur.
2. İki sayma sayısından biri diğerini bölerse; bu sayıların ortak katlarının en küçüğü, büyük sayıya eşittir. a|b ise OKEK(a, b) = b'dir.
   Örneğin, OKEK(42, 126) = 126 olur.

Teorem –4.53

$a, b \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

OKEK(a, b): a = p ve OKEK(a, b): b = k ise p ile k aralarında asaldır.

Örneğin; OKEK(12, 18) = 36, 36:12 = 3 ve 36 : 18 = 2 olup 3 ve 2 aralarında asaldır.

Etkinlik 4– 111

Teorem-4.53'ü ispatlayınız..

Örnek 4.71

OKEK(a, 24) = 72 olduğuna gore, a hangi değerleri alabilir?

Çözüm

$72 : 24 = 3$ ve $a \cdot x = 72 = 2^3 \cdot 3^2$ dir.

3 ile x aralarında asal olacağından, x sayısı ancak 2^3 ün bölenlerinden birine eşit olabilir.

$x = 1$ iken $a = 72$,
$x = 2$ iken $a = 36$,
$x = 4$ iken $a = 18$,
$x = 8$ iken $a = 9$ dur.

Buna göre, $a \in \{9, 18, 36, 72\}$ bulunur.

Etkinlik 4– 112

6480 ile 14400 sayılarının OKEK'ini bulunuz.

Etkinlik 4– 113

OBEB(a, b) = 15, OKEK(a, b) = 300 ve a > b olduğuna göre; a ve b sayılarını bulunuz.

Etkinlik 4– 114

OKEK(a, 75) = 450 olduğuna göre, a sayılarını bulunuz.

Ortak Katların Asal Çarpanlara Ayırma Yoluyla Bulunması

İki sayma sayısının bir ortak katı, bu sayıların her biri ile bölünür.

Öyleyse; a ve b sayma sayılarının bir ortak katının asal çarpanları içinde, a ve b'nin asal çarpanları en az a ve b'deki kuvvetleri ile bulunmalıdır.

O hâlde; a ve b'nin ortak asal çarpanlarından kuvveti büyük olanlar ile, ortak olmayan çarpanların çarpımının her katı, a ile b'nin bir ortak katıdır.

Buna göre;

İki veya daha fazla doğal sayının OKEK'ini bulmak için, sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Bu asal çarpanlardan ortak olanlarının büyük üslüleri ile ortak olmayan çarpanlar çarpılır.

Örnek 4.72

30 ile 36 sayılarının OKEK'ini bulalım:

I. yol

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ve $36 = 2^2 \cdot 3^2$ dir.

Bu sayıların ortak katları $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ biçimindedir. 30 ile 36'nın bu sayıyı bölmesi için x en az 2, y en az 2 ve z en az 1 olmalıdır.

Buna göre, bu ortak kat en az $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ olabilir.

OKEK$(30, 36) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ olur.

II. yol

İki doğal sayının OKEK'i, bu sayıların ortak olan asal çarpanlarından birer tanesi ile ortak olmayanların tek tek seçilmesi ve bunların çarpılması yoluyla da bulunabilir.

Aşağıdaki işlem çizelgesini inceleyiniz.

30	36	2	Çizginin sağındaki her bir asal çarpanın sayısı; bu çarpanların, sayıların en az birinde o kadar kere bulunduğunu gösterir. Bunların çarpımı OKEK'i verir.
15	18	2	
15	9	3	
5	3	3	
5	1	5	
1			

Örnek 4.73

18, 24 ve 60 sayılarının OKEK'ini bulunuz.

Çözüm

I. yol

$18 = 2 \cdot 3^2$, $24 = 2^3 \cdot 3$ ve $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ tir.

Bu sayıların bir ortak katı $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ biçimindedir. x en az 3, y en az 2 ve z en az 1 olmalıdır. (Neden?)

Buna göre; $OKEK(18,24,60) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\Rightarrow OKEK(18,24,60) = 360$ olur.

II. yol

18, 24 ve 60 sayılarında her bir asal çarpanın en çok kaç kere bulunduğunu araştıracağız.

18	24	60	2	18, 24, 60 sayılarından en az biri 2'yi 3 kere, en az biri 3'ü 2 kere, en az biri 5'i 1 kere çarpan olarak bulundurur. Bunların çarpımı OKEK'i verir.
9	12	30	2	
9	6	15	2	
9	3	15	3	
3	1	5	3	
1		5	5	
		1		

$OKEK(18,24,60) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ olur.

Etkinlik 4– 115

Aşağıdaki sayıların OKEK'lerini bulunuz.

a. 48, 90 **b.** 135, 64

c. 1368, 9180 **d.** 36, 56, 70

Etkinlik 4– 116

OKEK(a, b) = 840 ve $2a = 3b$ olduğuna göre, a ve b sayılarını bulunuz.

Bölünebilme Kurallarına Ek

Teorem –4.54

Bir sayma sayısının a ve b sayma sayılarına bölünebil-mesi için gerekli ve yeterli koşul, bu sayının OKEK(a, b) ile bölünebilmesidir.

Etkinlik 4– 117

Teorem-4.54'ü ispatlayınız.

Teorem-4.54'ten şu sonuç çıkarılır:

Bir sayma sayısının aralarında asal iki sayıya bölünebilmesi için gerekli ve yeterli koşul, bu sayıların çarpımı ile bölünebilmesidir.

Örnek 4.74

a. Bir doğal sayının 4 ve 9 ile bölünebilmesi için 36 ile bölünmesi gerekir. Karşıt olarak bir doğal sayının 36 ile bölünebilmesi için 4 ve 9 ile bölünmesi gerekir.

b. Bir doğal sayının 18 ile bölünebilmesi için, 2 ve 9 ile bölünebilmesi gerekir.

c. Bir doğal sayının 6 ile bölünebilmesi için, 2 ve 3 ile bölünebilmesi gerekir.

d. Bir doğal sayının 15 ile bölünebilmesi için, 3 ve 5 ile bölünebilmesi gerekir.

e. Bir doğal sayının 12 ve 18 ile bölünebilmesi için, $OKEK(12,18) = 36$ ile bölünebilmesi gerekir.

f. Bir doğal sayının 6 ve 15 ile bölünebilmesi için $OKEK(6,15) = 30$ ile bölünebilmesi gerekir.

Etkinlik 4– 118

Beş basamaklı 37a6b sayısının aşağıdaki sayılarla bölünebilmesi için a ve b yerine konulması gereken rakamları bulunuz.

a. 6 **b.** 12 **c.** 15 **d.** 18 **e.** 24

f. 28 **g.** 36 **h.** 42 **i.** 45 **j.** 60

Etkinlik 4– 119

21 ve 24 sayılarının üç basamaklı

a. en küçük ortak katı kaçtır?

b. en büyük ortak katı kaçtır?

Etkinlik 4– 120

4787 sayısından en az kaç çıkarılmalı ki, kalan sayı 12, 22 ve 28 ile bölünebilsin?

Alıştırmalar ve Problemler – 4.4

1. Aşağıdaki sayıların OBEB'leri ile OKEK'lerini bulunuz.
(Büyük sayıları çarpım olarak bırakınız.)

a. 28, 35 **b.** 17, 51
c. 29, 31 **d.** 360, 780
e. 2160, 12000 **f.** 4260, 12420
g. 33, 44, 77 **h.** 24, 28, 42
i. $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^2$, $3^3 \cdot 7 \cdot 11^2$
j. $3 \cdot 5^5 \cdot 7^3$, $3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$
k. $4^3 \cdot 6^4 \cdot 9^2$, $4^5 \cdot 6^2 \cdot 9^3$
l. $6^2 \cdot 9^3 \cdot 12^4$, $9^2 \cdot 24^3 \cdot 36$

2. OBEB(a, b) = 12, OKEK(a, b) = 360 ve a > b koşullarını sağlayan kaç değişik (a, b) ikilisi bulunur?

3. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan üç basamaklı en küçük **a** doğal sayıları bulunuz.

a. OBEB(28, a) =14 **b.** OBEB(36, a) =18
c. OBEB(a, 48) =16 **d.** OBEB(a, 112) =28

4. 3. alıştırmada verilen eşitlikleri sağlayan üç basamaklı en büyük **a** sayılarını bulunuz.

5. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan üç basamaklı en küçük **a** doğal sayılarını bulunuz.

a. OKEK(24, a) =216
b. OKEK(36, a) =684
c. OKEK(a, 60) =1320
d. OBEB(a, 45) =1080

6. 5. alıştırmada verilen eşitlikleri sağlayan **a** sayılarını bulunuz.

7. Aşağıda verilen sayıların iki basamaklı en küçük ortak bölenlerini bulunuz.

a. 252, 360 **b.** 1764, 3150

8. Aşağıda verilen sayıların üç basamaklı en büyük ortak katlarını bulunuz.

a. 42, 63, 70 **b.** 20, 90, 225

9. OBEB'i 28 olan,

a. farklı iki sayının toplamı en az kaçtır?
b. farklı üç sayının toplamı en az kaçtır?

10. OKEK'i 462 olan,

a. farklı iki sayının toplamı en çok kaçtır?
b. farklı iki sayının toplamı en az kaçtır?
c. farklı dört sayının toplamı en çok kaçtır?
d. farklı üç sayının toplamı en az kaçtır?

11. 134 ve 398 sayıları bir a doğal sayısı ile bölündüğünde sırasıyla 8 ve 2 kalanlarını veriyor.

Bu koşulu sağlayan a sayılarını bulunuz.

12. OBEB(1080, 1512, 3960, 8640) kaçtır?

13. $a, b \in N^+$ ve a > b olduğuna göre, aşağıdaki koşulları sağlayan (a, b) ikililerini bulunuz.

a. $a + b = 264$, $\text{OBEB}(a, b) = 24$
b. $a \cdot b = 6750$, $\text{OBEB}(a, b) = 15$

14. a ve b doğal sayılarının her birinin,

OBEB(a, b) ile bölünmesinden elde edilen bölümlerin toplamı 16 dır.

$a \cdot b = 660 \cdot \text{OBEB}(a, b)$ ve a >b olduğuna göre, a ve b sayılarını bulunuz.

15. OBEB(a, b) = 24'tür. a ve b sayılarının her birinin 12 tane böleni olduğuna göre, bu sayıları bulunuz.

16. $a, b \in N^+$ ve a > b olduğuna göre, aşağıdaki koşulları sağlayan a ve b sayılarını bulunuz.

a. OBEB(a, b) =18, OKEK(a, b) =216

b. OBEB(a, b) =12, $a \cdot b = 288$

17. a ile b doğal sayıları aralarında asal ise $a+b$ ile $a \cdot b$ sayıları da aralarında asaldır.

İspatlayınız.

18. a, b $\in N^+$ ve a > b olduğuna göre, aşağıdaki koşulları sağlayan (a, b) ikililerini bulunuz.

a. $a+b=224$, OKEK(a,b) = 420

b. $4a=5b$, OKEK(a,b) = 440

c. $a+b=212$, OKEK(a,b)=360 $\cdot$ OBEB(a,b)

19. 8, 12 ve 18 ile bölündüğünde 5 kalanını veren,

a. en küçük doğal sayı kaçtır?

b. üç basamaklı en büyük doğal sayı kaçtır?

20. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan en küçük x, y, z doğal sayılarını bulunuz.

a. $6x+5=7y+6=8z+7$

b. $4x=5y=6z+4$

c. $5x=6y+2=7z+3$

21. 7, 8, 9 ile bölündüğünde sırasıyla 5, 6, 7 kalanlarını veren en küçük sayıyı bulunuz.

22. 7 ile bölündüğünde 3, 9 ile bölündüğünde 4 kalanını veren üç basamaklı en büyük doğal sayıyı bulunuz.

23. Uzunlukları 36 m, 54 m ve 90 m olan üç top kumaş, birbirlerine eşit en büyük parçalara ayrılacaktır.

Elde kaç parça kumaş olur?

24. Kenarları 135 m ve 165 m olan dikdörtgen şeklindeki bahçenin kenarlarına, köşelere de birer tane gelecek biçimde eşit aralıklarla fidanlar dikilecektir.

a. En az kaç fidan gereklidir?

b. Bu durumda iki fidan arası kaç m olur?

25. Kenarları 18 cm ve 30 cm olan fayanslarla yapılacak kare şeklindeki döşemenin bir kenarı en az kaç cm olur? Bu döşemeyi yapmak için kaç fayans gerekir?

26. 18000 sayısının doğal sayı bölenlerinden kaç tanesi,

a. 12 ve 18 ile bölünür?

b. 8 ile bölünür ve 9 ile bölünmez?

c. 8 veya 9 ile bölünür?

d. 12 ile bölünmez ve 18 ile bölünmez?