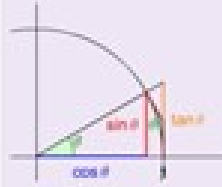


Theorem

The following two limits hold:

- $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$
- $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$



Notice

$$\sin \theta \leq \theta \leq 2 \tan \frac{\theta}{2} \leq \tan \theta$$

Divide by $\sin \theta$:

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

Take reciprocals:

$$1 \geq \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \cos \theta$$

As $\theta \rightarrow 0$, the left and right sides tend to 1. So, then, must the middle expression.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \end{aligned}$$

So

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \cdot \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Example

- $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta}$
- $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta}$

Answer

- 1
- 2

1. Use the basic trigonometric limit and the definition of tangent.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

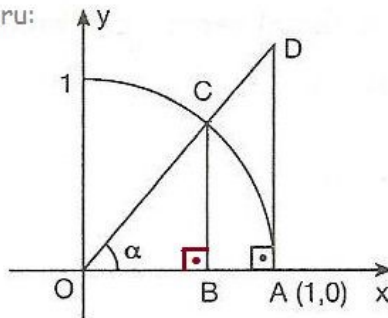
2. Change the variable:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \cdot 2 = 2 \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = 2 \cdot 1 = 2$$

OR use a trigonometric identity:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\theta} = 2 \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

soru:

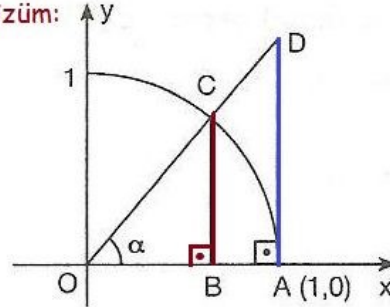


Şekildeki birim çemberin I. bölgesindeki yayı ile C noktası verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|AD|}{|CB|}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

çözüm:

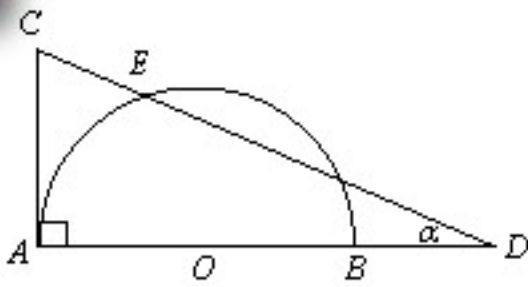


Tanım gereği AD uzunluğu $\tan \alpha$ ve CB uzunluğu $\sin \alpha$ dir.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|AD|}{|CB|} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

bhg,temmuz2010,İstanbul...

Örnek.



Şekilde $m(\widehat{AE}) = |AC|$ ise $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{AD}{AB} = 2$ old. göst.

Çözüm. O.Ekiz

$\alpha \rightarrow 0$ için $\widehat{AE} \rightarrow |AE|$ olacaktır.

Bu durumda $\alpha \rightarrow 0$ için $|AC| = |AE|$ (*)

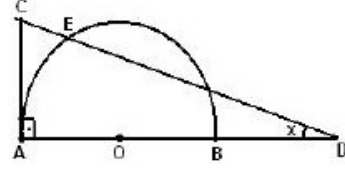
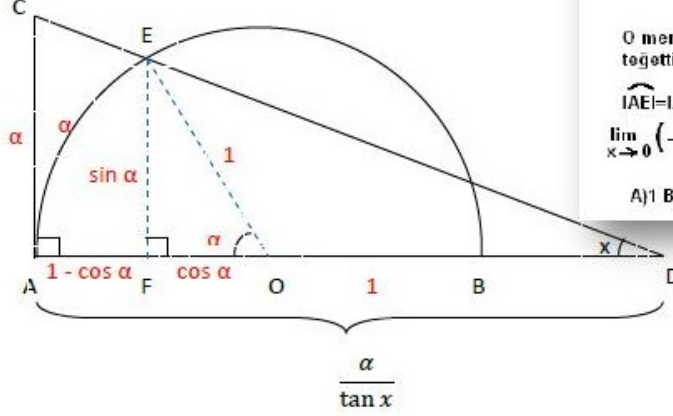
alabiliriz. Burdan $m(\angle ACE) = 90 - \alpha$

olup $m(\angle CAE) = 2\alpha = m(\angle ABE)$ dir.

Dolayısı ile $AD = \frac{AC}{\tan \alpha}$ ve $AB = \frac{AE}{\sin 2\alpha}$ olur.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{AD}{AB} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{AC}{\tan \alpha}}{\frac{AE}{\sin 2\alpha}} \text{ (*) dan } = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{\tan \alpha} = 2 \text{ olur.}$$

Çözüm (Eyüp Kamil Yeşilyurt, mart 2010)



O merkezli çember CA doğrusuna A noktasında teğettir.

$|AE| = |AC|$ ise

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{|AD|}{|AB|} \right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

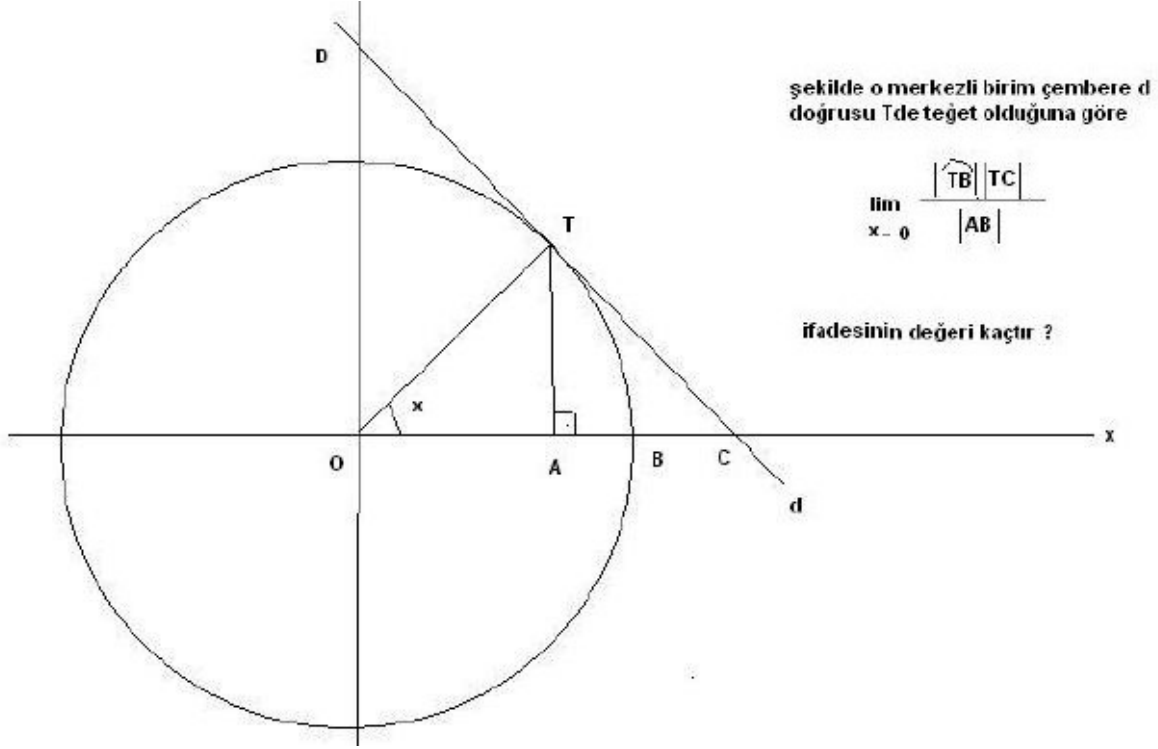
A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

O merkezli çemberin yarıçapı 1 birim ve $m(\widehat{EOA}) = \alpha$ radyan olsun. Yarıçap 1 birim olduğundan AE yayının uzunluğu α birimdir. Hipotezden $|AC| = \alpha$ birim olur. EFO dik üçgeninde; $|EF| = \sin \alpha$ birim ve $|FO| = \cos \alpha$ birim olduğundan $|AF| = 1 - \cos \alpha$ birim elde edilir. CAD dik üçgeninde; $|AC| = \alpha$ birim olduğundan $|AD| = \frac{\alpha}{\tan x}$ birim olduğundan $|FD| = \frac{\alpha}{\tan x} - (1 - \cos \alpha)$ olur. EFD dik üçgeninde; $\tan x = \frac{|EF|}{|FD|}$ ise $\tan x = \frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{\tan x} - 1 + \cos \alpha}$ içler dışlar çarpımı yapıp düzenlenirse

$\tan x = \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ elde edilir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|AD|}{|AB|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{\tan x}}{2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - \alpha \cos \alpha}{2\alpha - 2\sin \alpha} = \frac{3}{2}$$

”



Çözüm:

Birim çember olduğundan $|OA| = \cos x$, $|AB| = 1 - \cos x$, $|TC| = \tan x$ ve birim çemberde yay uzunluğu radyan türünden merkez açının ölçüsüne eşit olduğundan $|\widehat{TB}| = x$ olur.

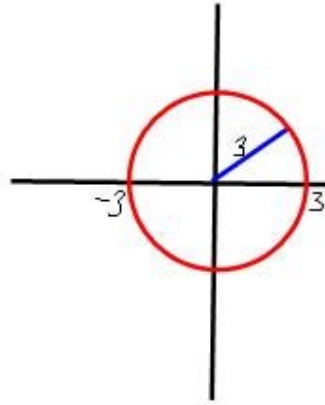
Değerler yerine yazılırsa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (1 + \cos x)}{\sin x \sin x} =$$

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2$$

Olarak bulunur.

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + a)$ değerinin başlangıç noktasına olan uzaklığı en çok 3
br olduğuna göre a nın alabileceği tamsayılar toplamı? (-28) teşekkürler



$y^2 + x^2 = 9$ gerberli üyerin-
deki x noktaları ara-
dığımız cevaptır.

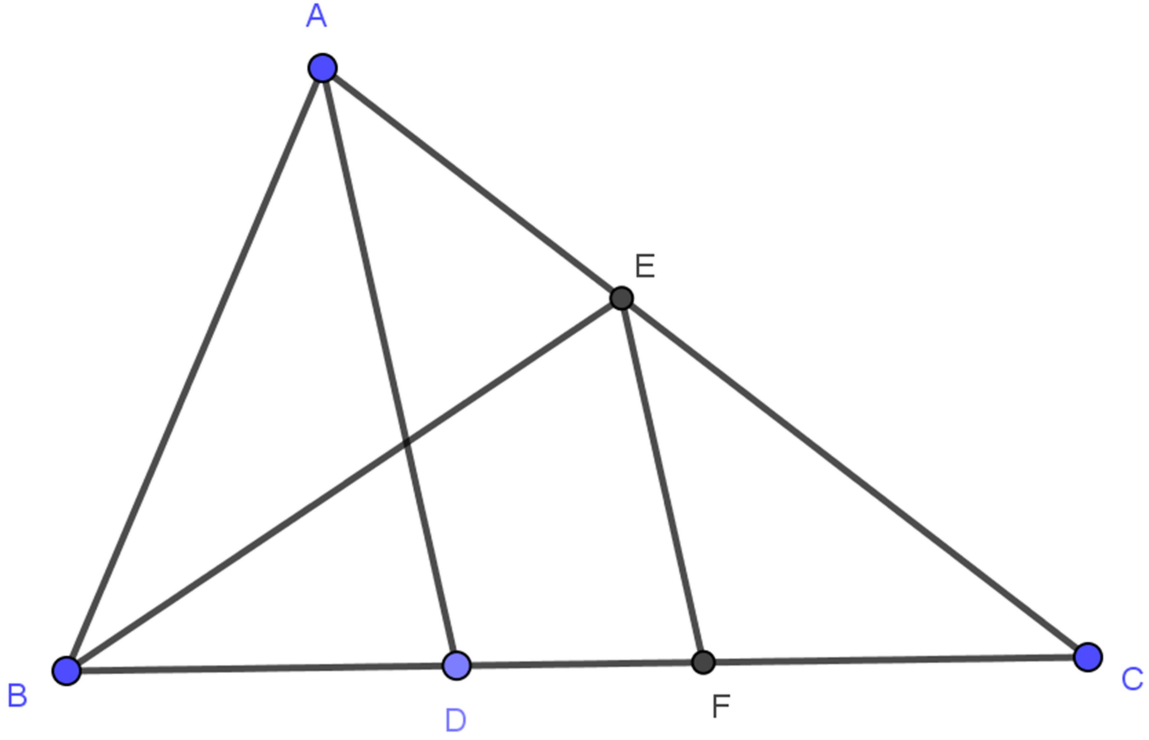
$$\lim_{x_0 \rightarrow 2} (x_0^2 + a) = x \text{ ise}$$

$$4 + a = x$$

$$-3 \leq 4 + a \leq 3$$

$$-7 \leq a \leq -1$$

$-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$ toplamı -28 dir.



Yukarıdaki şekilde $[BE]$, ABC a.ısının açıortayı, D noktası $[BC]$ üzerinde bir nokta ve $[EF]//[AD]$ olmak üzere $\lim_{A \rightarrow D} \frac{|CF|}{|FD|}$ ifadesinin değeri ne olur.

Çözüm:

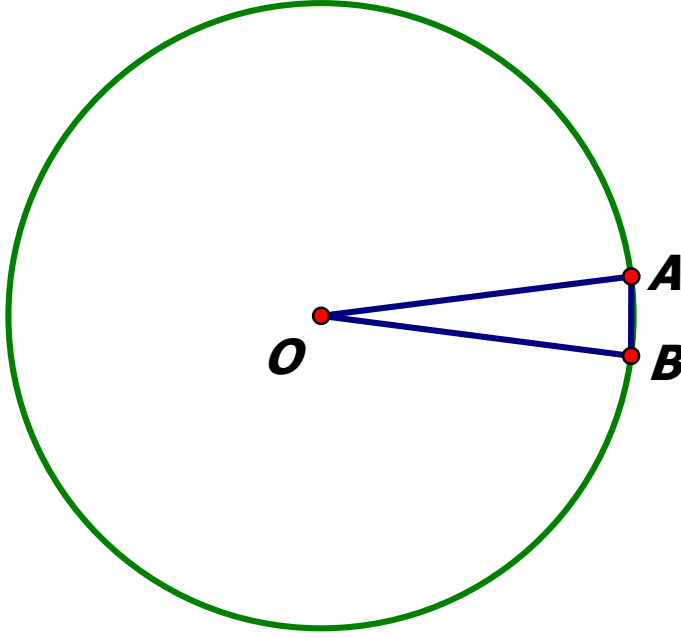
$[EF]//[AD]$ olduğundan CAD üçgeninde temel orantı kuralı gereği $\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CF|}{|DF|}$ olur.

ABC üçgeninde $[BE]$ açıortay olduğundan $\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|BA|}$ olur. Bu iki orantıdan $\frac{|BC|}{|BA|} = \frac{|CF|}{|DF|}$

olur.. $A \rightarrow D$ için $|BA| \rightarrow |BD|$ olacaktır. Yani limit işlemini

$$\lim_{A \rightarrow D} \frac{|CF|}{|FD|} = \lim_{|BA| \rightarrow |BD|} \frac{|CF|}{|FD|} = \lim_{|BA| \rightarrow |BD|} \frac{|BC|}{|BA|} = \frac{|BC|}{|BD|} \text{ olarak bulunur.}$$

Çemberin Çecresi



$|OA|=|OB|=r$ ve $m(\text{AOB})=\frac{2\pi}{n}$ ve $|AB|=l$ olsun.

Kosinüs kuralına göre $l^2=r^2+r^2-2.r.r.\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ den

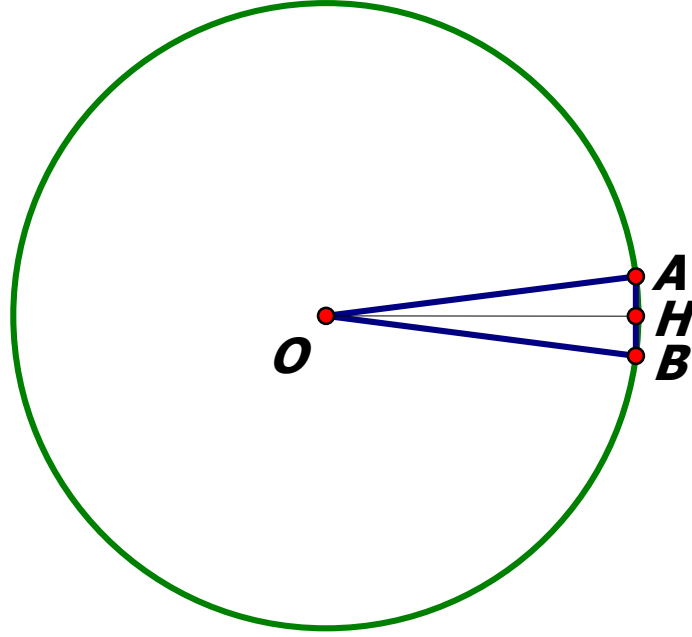
$$l=r\sqrt{2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)}=r\sqrt{2\left(1-1+2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}=2r\sin\frac{\pi}{n}$$

bulunur. Çemberin içersine çizilecek n tane OAB içgeninden $|AB|$ uzunluklarının toplamı $n.l$ kadar olacaktır. Çemberin çevresi n nin sonsuza gitmesi durumunda $n.l$ değeridir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot 2r \sin \frac{\pi}{n} \right) = 2r \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = 2r \cdot \pi = 2\pi r$$

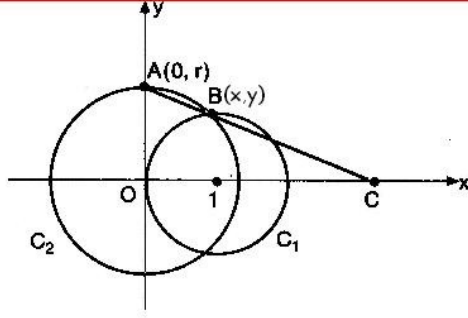
olarak bulunur.

Dairenin alanı



Şekilde $m(\angle AOB) = \frac{2\pi}{n}$ olsun $A(\triangle AOB) = \frac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ dir. Çemberin içine çizilecek n tane $\triangle AOB$ üçgeninin alanlarının toplamı n sonsuz olması durumunda dairenin alanına eşit olacaktır. Yan dairenin alanı $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin\frac{2\pi}{n} \right)$ olarak hesaplanır. Bu değer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin\frac{2\pi}{n} \right) = \frac{r^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \pi r^2 \text{ olarak bulunur.}$$



Şekilde $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$ çemberi ve değişken $C_2 : x^2 + y^2 = r^2$ çemberleri verilmiştir.

Çemberlerin 1. bölgedeki kesim noktası B ve A dan geçen doğru x eksenini C noktasında kesmektedir. Buna göre,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} |OC|$$

limitinin değeri kaçtır?

- B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çember denklemleri ortak çözümlirse

$$(x, y) = \left(\frac{r^2}{2}, \frac{r^2}{2} \right) \text{ bulunur.}$$

$(0, r)$ ve $\left(\frac{r^2}{2}, \frac{r^2}{2} \right)$ noktalarından geçen doğru denklemleri yazılırsa;

$$y - r = \frac{r - 2}{r} \cdot (x - 0) \text{ bulunur.}$$

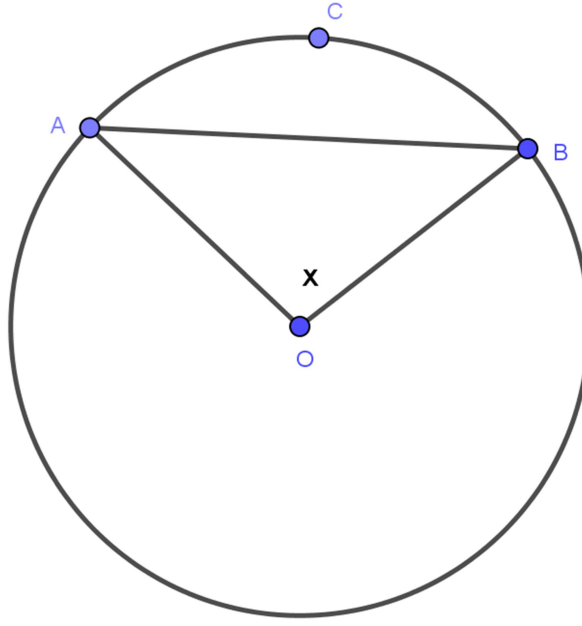
$y = 0$ için doğrunun x eksenini kestiği noktanın apsisi bulunursa;

$$x = \frac{r^2}{2 - r} \text{ elde edilir.}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{r^2}{2 - r} \right) = 0 \text{ olur.}$$

hburakyalçın
iskenderun

Soru:



Şekilde $m(\text{AOB})=x$ ve çemberin yarıçapı r olmak üzere $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\widehat{ACB}|}{|AB|}$ değerini bulunuz.

Çözüm:

x radyano olarak $|\widehat{ACB}| = \frac{2\pi r x}{2\pi} = r x$ olarak bulunur.

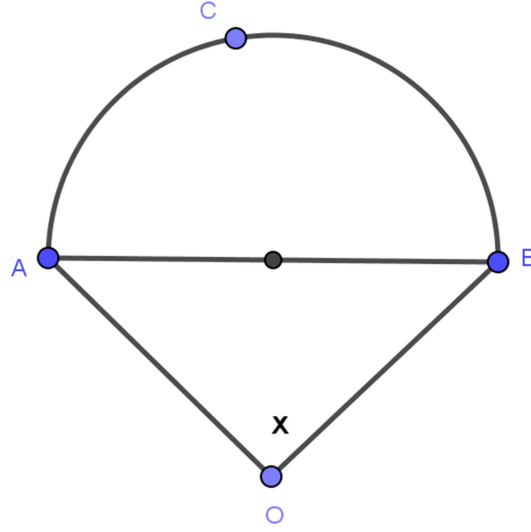
Kosinüs teoreminden $|AB|^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos x = 2r^2 (1 - \cos x) = 4r^2 \sin^2 \frac{x}{2}$ ve $|AB| = 2r \sin \frac{x}{2}$

olarak bulunur. Limitte yerine yazılırsa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{rx}{2r \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Olarak bulunur.

Soru:



Şekil OAB ikizkenar üçgeni ile $[AB]$ çaplı yarım daireden oluşmaktadır. $|OA|=|OB|=r$, $m(\text{AOB})=x$ olarak veriliyor. Yarım dairenin alanı $A(x)$ ve $A(\text{AOB})=B(x)$ olmak üzere $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x)}{B(x)}$ değerini bulunuz.

Çözüm:

AOB üçgeninde kosinüs teoreminden

$$|AB|^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos x = 2r^2 (1 - \cos x) = 4r^2 \sin^2 \frac{x}{2} \text{ den } |AB| = 2r \sin \frac{x}{2} \text{ olur.}$$

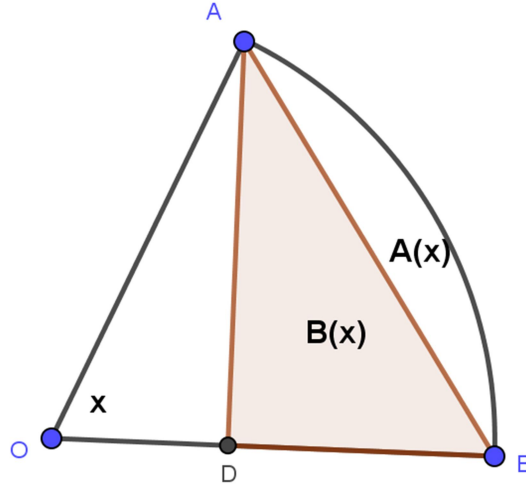
$$\text{Yarım dairenin alanı } A(x) = \frac{\pi \left(\frac{|AB|}{2} \right)^2}{2} = \frac{\pi |AB|^2}{8} = \frac{\pi r^2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\text{AOB üçgeninde } A(\text{AOB}) = \frac{1}{2} r^2 \sin x = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = r^2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \text{ olur.}$$

$$\text{Limitte yerine yazılırsa } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{r^2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{r^2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \text{ olarak}$$

bulunur.

Soru:



Şekildeki daire diliminde O merkez ve $|OA|=|OB|=1$, $m(\text{AOB})=x$ ve $A(x)$ ile $B(x)$ buldukları bölgelerin alanlarını göstermektedir. Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x)}{B(x)}$$

Limitinin değerini bulunuz.

Çözüm:

AOD üçgeninde $|OD|=\cos x$, $|AD|=\sin x$, $|DB|=1-\cos x$, ve $B(x)=\frac{|AD| \cdot |BD|}{2}$ olur.

$A(x)$ dire diliminin alanından AOB üçgeninin alanının farkına eşittir. Yani

$A(x)=\frac{\pi x}{2\pi}-\frac{1}{2}\sin x=\frac{x-\sin x}{2}$ olur. Limitte yerine yazılırsa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{\sin x(1-\cos x)}$ limiti elde

edilir. L'Hospital uygulanırsa

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)+\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x(1-\cos x)+\cos x \sin x+2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x[1+2 \cos x]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2 \cos x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Olarak bulunur.

L'Hospital kullanmadan limitin hesabı:

Bunun için önce $a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ limitini hesaplayalım

Verilen ifadede önce $x=3t$ dönüşümü yapalım. $x \rightarrow 0$ için $t \rightarrow 0$ olur.

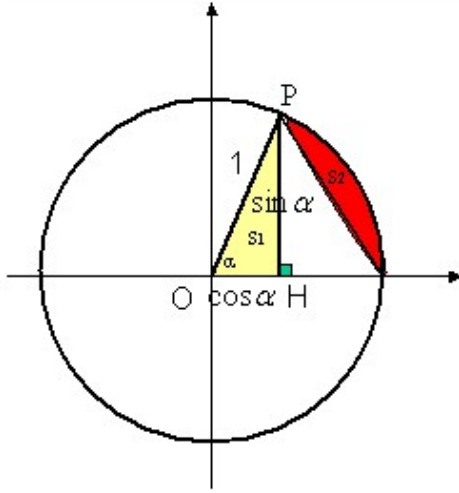
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - \sin 3t}{27t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3\sin t + 4\sin^3 t}{27t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3(t - \sin t)}{27t^3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4\sin^3 t}{27t^3} \text{ olur. Burada}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = a \text{ dır. Buna göre yukarıdaki limit}$$

$$a = \frac{3}{27} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{27} \text{ den } a = \frac{1}{9} a + \frac{4}{27} \text{ ve } a = \frac{1}{6} \text{ olur. Şimdi yukarıdaki limiti hesaplayalım.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin x(1 - \cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)x^3(1 + \cos x)}{x^3 \sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x(1 - \cos^2 x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin^3 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Olarak bulunur.



Şekilde P noktası
r yarıçaplı çemberin
I. Bölgesinde
değişmektedir.
 $m(\text{POH}) = \alpha$
 S_1 ve S_2 buldukları
bölgelerin alanları

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{S_2}{S_1}$ **limitinin değeri kaçtır?**
Hazırlayan: İ:K©(2007)

Birim çember olduğunu varsayalım:

$$S_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin \alpha}{2} ; S_1 = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{S_2}{S_1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{0}{0} \text{ ise L'Hopital;}$$

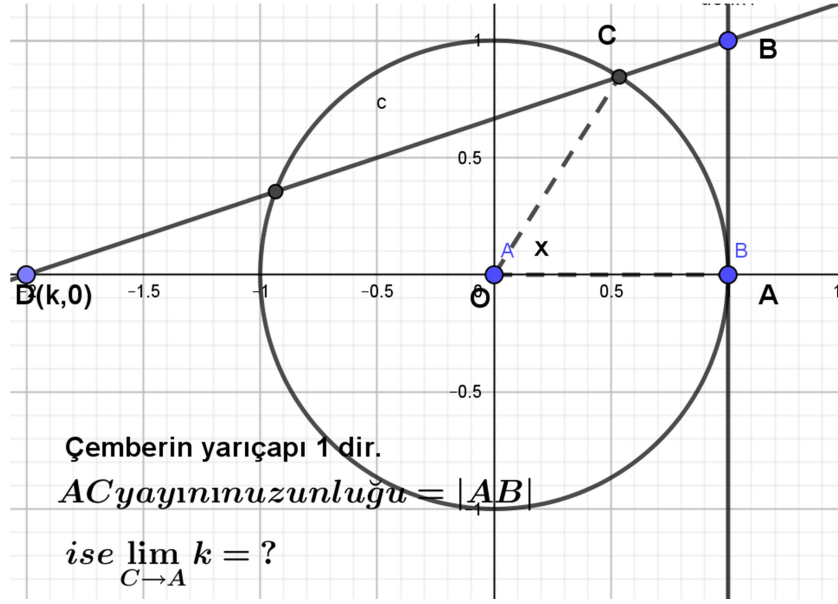
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{0}{1} = 0$$

$$|OH| = \cos \alpha$$

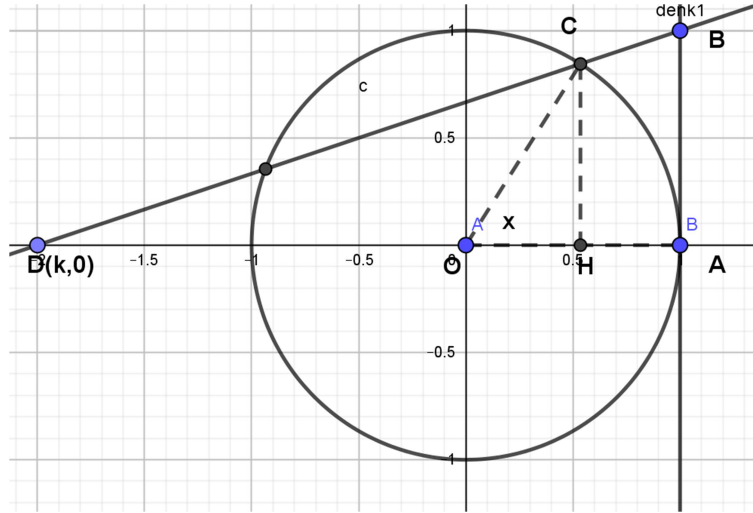
$$|PH| = \sin \alpha$$

Zafer Çeliköz

Soru:



Çözüm:



AOC açısını oluşturalım. $m(AOC) = x$ Radyan olsun. $C \rightarrow A$ için $x \rightarrow 0$ olacaktır. Yani hesaplanacak limit $\lim_{x \rightarrow 0} k$ olacaktır. Bunun için verilenlerden faydalanarak k yı x in bir fonksiyonu olarak yamak gerekecek.

Önce \overline{AC} yayının uzunluğunu x Radyan türünden hesaplayalım. Çemberin uzunluğu 2π olup

$$|\overline{AC}| = \frac{2\pi x}{2\pi} = x = |AB|$$

Olaaktır. $[CH] \perp AD$ çizelim. Çemberin yarıçapı 1 olduğundan $|OH| = \cos x$ ve $|CH| = \sin x$ olur..

DHC ile DAB üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{|DH|}{|DA|} = \frac{|CH|}{|BA|}$ ve $\frac{-k + \cos x}{-k + 1} = \frac{\sin x}{x}$ olur. Bu

eşitlikten k hesaplanırsa $-k \sin x + \sin x = -kx + x \cos x$

$$kx - k \sin x = x \cos x - \sin x$$

$$k = \frac{x \cos x - \sin x}{x - \sin x}$$

Olarak bulunur. Buna göre $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x - \sin x} = a$ diyelim.

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - x + x - \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - x}{x - \sin x} + \frac{x - \sin x}{x - \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(\cos x - 1)}{x - \sin x} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1)}{x - \sin x} \right) + 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2x \sin^2 \frac{x}{2}}{x - \sin x} \right) + 1 \text{ olur. Burada Pay ve paydayı } x^3 \text{ ile}$$

$$\text{bölelim } a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}}{\frac{x - \sin x}{x^3}} + 1 = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}} + 1 = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}} + 1 = \frac{-\frac{1}{2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}} + 1$$

Paydadaki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = b$ diye lim ve bu limiti hesaplamak için önce $x = 3t$ dönüşümü yapalım.

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - \sin 3t}{27t^3} \text{ olu} \text{ } \sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t \text{ özdeşli} \text{ } \text{ği kullanılırsa}$$

$$b = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - \sin 3t}{27t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t + 4 \sin^3 t}{27t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t}{27t^3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 t}{27t^3}$$

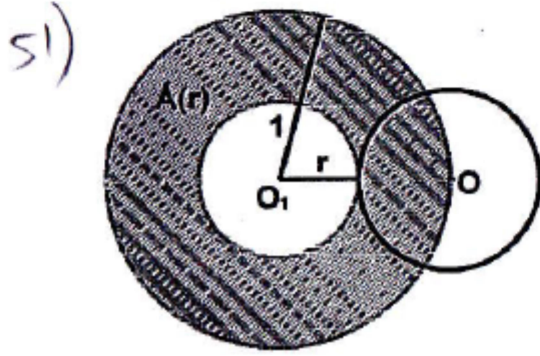
$$b = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t}{27t^3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 t}{27t^3} = \frac{3}{27} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{27} = \frac{1}{9} b + \frac{4}{27} \text{ ve bu eşitlikten } b = \frac{1}{6} \text{ elde}$$

edilir. Yukarıda yerine yazılırsa

$$a = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} + 1 = -3 + 1 = -2$$

Olarak bulunur.

Soru:



A(r) daire halkasının

alanı

B(r) O merkezli dairenin

alanı

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{A(r)}{B(r)} = ?$$

Daire halkasının alanı $A(r) = \pi - \pi r$

O merkezli dairenin yarıçapı $1 - r$ olup

alanı $B(r) = \pi(1-r)^2$ olur.

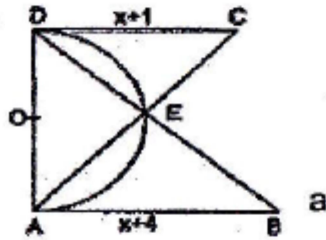
$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{A(r)}{B(r)} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\pi(1-r)}{\pi(1-r)^2} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-r} \text{ olur.}$$

$R=1-h$ yazılırsa x , 1 e yaklaşırken h , 0 a yaklaşır yani limitimiz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1-(1-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \rightarrow \infty \text{ olarak bulunur.}$$

Soru:

O merkezli yarım çemberde,
[AB] ve [CD] çembere
teğettir.
[AB] = $x+4$ birim
[CD] = $x+1$ birim ise,



$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{|AD|}{|AB| + |CD|} \right)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

Önce $|AD|=r$ yi hesaplayalım. AED açısı çapı gördüğünden diktir. ADC dik üçgeninde $|AC| = \sqrt{r^2 + (x+1)^2}$

$$|DE| = \frac{r(x+1)}{\sqrt{r^2 + (x+1)^2}} \text{ olur.}$$

DAB dik üçgeninde

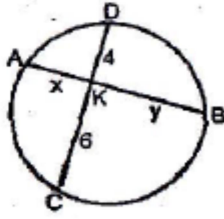
$$|DB| = \sqrt{r^2 + (x+4)^2} \text{ olur.}$$

Öklid uygulanırsa $|AD|^2 = |DE||DB|$ den $r^2 = \frac{r(x+1)}{\sqrt{r^2 + (x+1)^2}} \cdot \sqrt{r^2 + (x+4)^2}$ olur. ifade

düzenlenirse $r^2 = (x+1)(x+4)$ den $r = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$ olur. Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{5}{x} \right)} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Soru:



Şekilde bir çemberin iç bölgesindeki K noktasında kesişen [AB] ve [CD] kirişleri verilmiştir.

$$|DK| = 4 \text{ br}$$

$$|KC| = 6 \text{ br}$$

$$|AK| = x \text{ br}$$

$$|BK| = y \text{ br}$$

K noktasının kuvveti yazılırsa $xy=24$

$$\text{ve } y = \frac{24}{x} \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 3} y = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{24}{x} = 8$$

olur.

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 3} y$ değeri kaçta eşittir?

- A) 3. B) 4 C) 6 D) 8 E) 24

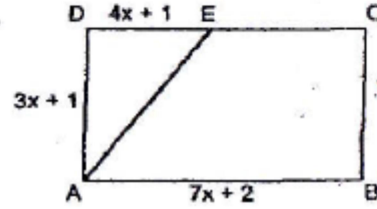
Soru:

ABCD dikdörtgeninde

$$|AD| = (3x + 1) \text{ br}$$

$$|DE| = (4x + 1) \text{ br}$$

$$|AB| = (7x + 2) \text{ br}$$



olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Çevre}(ADE)}{\text{Çevre}(ABCE)}$ değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) 0 B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) "

$$|AE| = \sqrt{25x^2 + 14x + 2} \text{ ve } |CE| = 3x + 1$$

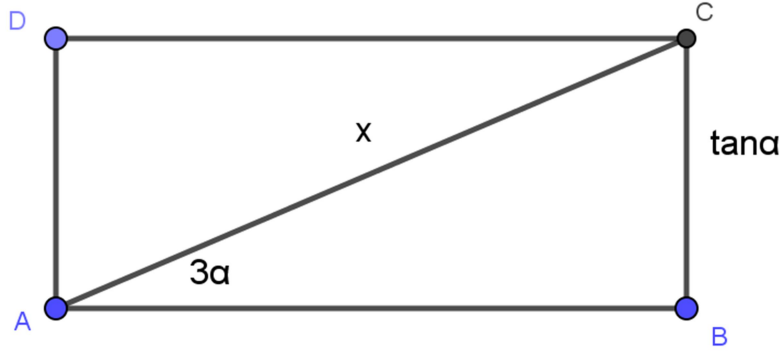
$$\text{Çevre}(ADE) = 7x + 2 + \sqrt{25x^2 + 14x + 2}$$

$$\text{Çevre}(ABCE) = 13x + 3 + \sqrt{25x^2 + 14x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Ç}(ADE)}{\text{Ç}(ABCE)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 2 + \sqrt{25x^2 + 14x + 2}}{13x + 3 + \sqrt{25x^2 + 14x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(7 + \frac{2}{x} + 5\sqrt{1 + \frac{14}{25x} + \frac{2}{25x}} \right)}{x \left(13 + \frac{3}{x} + 5\sqrt{1 + \frac{14}{25x} + \frac{2}{25x}} \right)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

olur.

Soru:

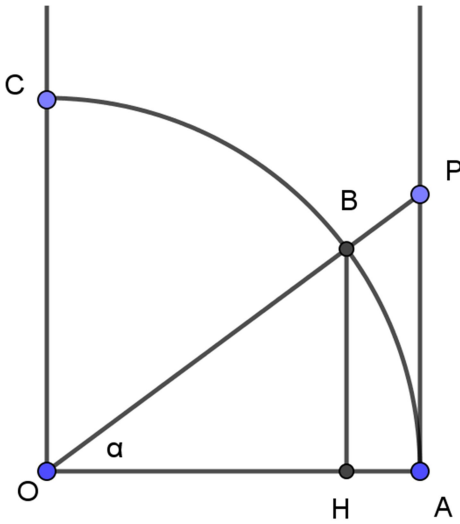


ABCD dikdörtgen . Verilenlere göre $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |AC| = ?$

Çözüm:

ABC dik üçgeninde $\sin 3\alpha = \frac{\tan \alpha}{x}$ den $|AC| = x = \frac{\tan \alpha}{\sin 3\alpha}$ ve $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{3}$ olur.

Soru



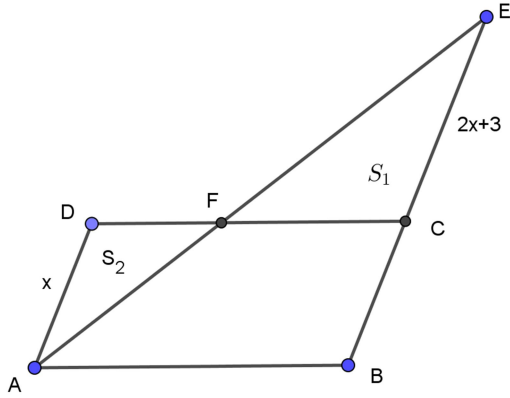
Şekildeki çeyrek çemberin yarıçapı 1 dir. Buna göre

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|OP|^2 - 1}{|OH|^2 - 1} = ?$$

Şekilde $|AP| = \tan \alpha$, $|OH| = \cos \alpha$ ve $|OP|^2 = 1 + \tan^2 \alpha$ olur.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha - 1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \alpha}{-\sin^2 \alpha} = -1 \text{ olarak bulunur.}$$

Soru:



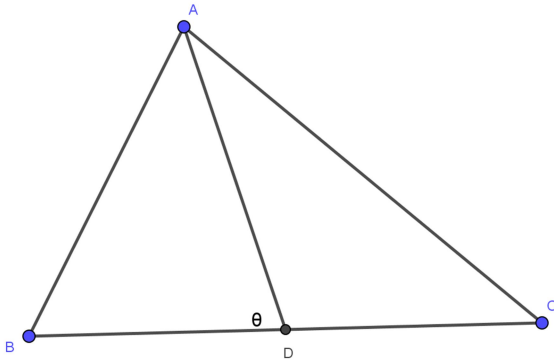
ABCD paralelkenar, S_1 ve S_2 buldukları bölgelerin alanlarıdır.

Buna göre $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2} = ?$

Çözüm: CEF ile DAF üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{A(CEF)}{A(DAF)} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{(2x+3)^2}{(x)^2}$ olur. Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 12x + 9}{x^2} = 4 \text{ olarak bulunur.}$$

Soru:



ABC üçgeninde [AD] kenarortaydır.

Buna göre $\lim_{\theta \rightarrow 90} \frac{|AB|}{|AC|} = ?$

$|AD|=x$, $|BD|=|CD|=y$, $|AB|=c$ ve $|AC|=b$ diyelim. Kosinüz kuralı uygulanırsa

$c = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}$ ve $b = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos(180 - \theta)}$ olur. Buna göre

$$\lim_{\theta \rightarrow 90} \frac{b}{c} = \lim_{\theta \rightarrow 90} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 \text{ olur.}$$

i