Teorem

$A(x,y) = x^{2n-1} + y^{2n-1}$ polinomu $x+y$ ile bölünür.

İspat

İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım:

$\forall n \in N^+$ için;

$P(n)$: "$A(x,y) = x^{2n-1} + y^{2n-1}$ polinomu $x+y$ ile bölünür."

$P(1)$: "$A_1(x,y) = x+y$ polinomu $x+y$ ile bölünür."

$P(1)$ doğrudur.

$P(2)$: "$A_2(x,y) = x^3 + y^3$

$$= (x+y)\cdot\left(x^2 - xy + y^2\right)$$

polinomu $x+y$ ile bölünür."

$P(2)$ doğrudur.

$P(k-1)$: "$A_{k-1}(x,y) = x^{2k-3} + y^{2k-3}$ polinomu $x+y$ ile bölünür."

ve

$P(k)$: "$A_k(x,y) = x^{2k-1} + y^{2k-1}$ polinomu $x+y$ ile bölünür."

önermelerini doğru varsayalım.

$P(k+1)$: "$A_{k+1}(x,y) = x^{2k+1} + y^{2k+1}$ polinomu $x+y$ ile bölünür."

önermesinin doğru olduğunu gösterelim:

$$A_{k-1}(x,y) = x^{2k-3} + y^{2k-3}$$

$$\Rightarrow x^2y^2 \cdot A_{k-1}(x,y) = x^2y^2\cdot\left(x^{2k-3} + y^{2k-3}\right)$$

$$\Rightarrow x^2y^2 \cdot A_{k-1}(x,y) = y^2x^{2k-1} + x^2y^{2k-1} \quad (1)$$

$$A_k(x,y) = x^{2k-1} + y^{2k-1}$$

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)\cdot A_k(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^{2k-1} + y^{2k-1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)\cdot A_k(x,y) = x^{2k+1} + y^{2k+1} + x^2y^{2k-1} + y^2x^{2k-1} \quad (2)$$

(1) eşitliğine göre;

$A_{k-1}(x,y)$, $x+y$ ile bölündüğünden

$x^2y^2 \cdot A_{k-1}(x,y)$ $x+y$ ile bölünür.

O halde;

$y^2x^{2k-1} + x^2y^{2k-1}$

$x+y$ ile bölünür. (3)

(2) eşitliğine göre;

$A_k(x,y)$, $x+y$ ile bölündüğünden

$\left(x^2+y^2\right)\cdot A_k(x,y)$ $x+y$ ile bölünür.

O halde;

$x^{2k+1} + y^{2k+1} + x^2y^{2k-1} + y^2x^{2k-1}$

$x+y$ ile bölünür. (4)

(3) ve (4)'ten,

$x^{2k+1} + y^{2k+1}$ polinomunun

$x+y$ ile bölündüğü görülür.

$P(k+1)$: "$A_{k+1}(x,y) = x^{2k+1} + y^{2k+1}$ polinomu $x+y$ ile bölünür."

önermesi doğrudur.

Not: Tümevarım ile ispat yönteminde, P(k) önermesinin doğru olduğu kabul edilip P(k+1) önermesinin doğru olduğu gösterilir.

Bu örnekte, P(k-1) ve P(k) önermelerinin doğru olduğuna dayanarak P(k+1) önermesinin doğru olduğunu gösterebildik.