



ZONGULDAK ATATÜRK ANADOLU LİSESİ
MATEMATİK
DERS ANLATIM FÖYÜ



11. SINIF MATEMATİK

ÖKLİT ALGORİTMASI

SÜRE: 2 DERS SAATİ

ÖKLİT ALGORİTMASI

İki tam sayının en büyük ortak bölenini bulmak için yapılan ardışık bölme işlemine öklit algoritması denir.

Ardışık bölme işlemine kalan sıfır oluncaya kadar devam edilir. Sıfırdan önceki son kalan EBOB u verir.

ÖRNEK 1:

140 ve 36 sayılarının en büyük ortak bölenini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$\begin{array}{r} 140 \quad | \quad 36 \\ 108 \quad | \quad 3 \\ \hline 32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 \quad | \quad 32 \\ 32 \quad | \quad 4 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \quad | \quad 4 \\ 32 \quad | \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

O halde sıfırdan önceki son kalan 4 olduğundan, $EBOB(140,36) = 4$ tür.

Bu işlemi aşağıdaki şekilde de yazabiliriz.

$$140 = 3 \cdot 36 + 32$$

$$36 = 1 \cdot 32 + 4$$

$$32 = 8 \cdot 4 + 0$$

Bu durumda, $EBOB(140,36) = 4$ tür.

KURAL:

A ve B tam sayılarının EBOB u bulunurken öklit algoritması aşağıdaki gibi uygulanır.

I. $A = 0$ ise $EBOB(A,B) = EBOB(0,B) = B$ dir.

II. $B = 0$ ise $EBOB(A,B) = EBOB(A,0) = A$ dir.

III. $A > B \geq 1$ olmak üzere,
 $A = B \cdot C + K$ olarak yazılabilir. Bu durumda,
 $EBOB(A,B) = EBOB(B,K)$ dir.

Öklit algoritmasına $K = 0$ oluncaya kadar devam edilir. Böylece küçük sayılara indirgeyerek EBOB daha kolay bulunabilir.

ÖRNEK 2:

108 ve 45 sayılarının en büyük ortak bölenini bulalım.

ÇÖZÜM:

$$108 = 2 \cdot 45 + 18$$

$$45 = 2 \cdot 18 + 9$$

$$18 = 2 \cdot 9 + 0$$

Bu durumda, $EBOB(108,45) = 9$ dur.

Bu işlemi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$EBOB(108,45) = EBOB(45,18) = EBOB(18,9) = EBOB(9,0) = 9$$

KURAL:

$a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$EBOB(a,b) = ax + by$ denklemini sağlayan x ve y tam sayıları vardır. Bu sayılar öklit algoritması ile bulunabilir.

ÖRNEK 3:

$EBOB(15,36) = 15x + 36y$ denklemi veriliyor. Buna göre,

- Denklemi sağlayan farklı iki (x,y) ikilisi bulunuz.
- Denklemi sağlayan iki basamaklı kaç tane y doğal sayısı vardır?
- Denklemi sağlayan üç basamaklı en küçük x doğal sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$36 = 2 \cdot 15 + 6$$

$$15 = 2 \cdot 6 + 3$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$EBOB(15,36) = 3$$

O halde bu denklem $15x + 36y = 3$ şeklindedir.

Şimdi bu denklemi sağlayan x ve y tam sayılarını bulalım.

Öncelikle yukarıda elde ettiğimiz iki bağıntıdan,

$$6 = 36 - 2 \cdot 15 \quad \text{elde edilir.}$$

$$3 = 15 - 2 \cdot 6$$

Buradan,

$$3 = 15 - 2 \cdot (36 - 2 \cdot 15)$$

$$3 = 15 - 2 \cdot 36 + 4 \cdot 15$$

$$3 = 15 \cdot 5 + 36 \cdot (-2)$$

$$(3 = 15x + 36y \text{ olduğundan})$$

$$x = 5 \text{ ve } y = -2 \text{ bulunur.}$$

$k \in \mathbb{Z}$ bir parametre (değişken) olmak üzere, bu denklemin genel çözümünü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x = 5 - \frac{36}{3} \cdot k \Rightarrow x = 5 - 12k$$

$$y = -2 + \frac{15}{3} \cdot k \Rightarrow y = 5k - 2$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y) : x = 5 - 12k \text{ ve } y = 5k - 2, k \in \mathbb{Z}\} \text{ dir.}$$

- $k = 0$ için $x = 5, y = -2 \Rightarrow (x,y) = (5,-2)$
 $k = 1$ için $x = 5 - 12 = -7, y = 5 - 2 = 3 \Rightarrow (x,y) = (-7,3)$

b) $y = 5k - 2$ olduğundan, iki basamaklı y sayıları, 13, 18, 23, 28, ..., 98 dir.

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{ilk Terim}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{98 - 13}{5} + 1 = 18$$

c) $x = 5 - 12k$ olduğundan,

$$k = -8 \text{ için } x = 5 - 12 \cdot (-8) = 5 + 96 = 101 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 4:

192 ve 94 sayılarının EBOB unu bu sayıların lineer toplamı olarak yazınız.

ÇÖZÜM:

Öklit algoritmasına göre,

$$192 = 2.94 + 4$$

$$94 = 23.4 + 2$$

$$4 = 2.2 + 0$$

Bu durumda, EBOB(192,94) = 2 dir.

Yukarıdaki ilk iki bağıntıdan

$$4 = 192 - 2.94 \quad \text{elde edilir.}$$

$$2 = 94 - 23.4$$

Buradan işleme devam edildiğinde,

$$2 = 94 - 23.(192 - 2.94)$$

$$2 = 94 - 23.192 + 46.94$$

$$2 = 47.94 + 192.(-23) \quad \text{elde edilir.}$$

ÖRNEK 5:

x bir doğal sayı olmak üzere, EBOB(6x + 23, 2x + 1) ifadesi kaç farklı değer alabilir?

ÇÖZÜM:

$$6x + 23 = 3.(2x + 1) + 20 \quad \text{olduğundan,}$$

$$\text{EBOB}(6x + 23, 2x + 1) = \text{EBOB}(2x + 1, 20) \quad \text{yazılabilir.}$$

$$20 = 4.5 = 2^2.5 \Rightarrow 20 \text{ nin pozitif tam sayı bölen sayısı : } 3.2 = 6$$

Bunlar : 1, 2, 4, 5, 10, 20 dir.

2x + 1 tek sayı olduğundan 1 ve 5 değerini alır. Buna göre, EBOB(1,20) = 1, EBOB(5,20) = 5 olup iki farklı değer alır.

SIRA SENDE:

264 ve 210 sayılarının en büyük ortak bölenini öklit algoritması ile bulunuz.

SIRA SENDE:

105 ve 24 sayılarının en büyük ortak bölenini öklit algoritması ile bulunuz.

SIRA SENDE:

EBOB(12,20) = 12x + 20y denklemi veriliyor. Buna göre,

- Denklemleri sağlayan üç farklı (x,y) tam sayı ikilisi bulunuz.
- Denklemleri sağlayan 20 den büyük en küçük x doğal sayısı kaçtır?
- Denklemleri sağlayan iki basamaklı en büyük y doğal sayısı için x kaçtır?

SIRA SENDE:

82 ve 26 sayılarının EBOB unu bu sayıların lineer toplamı olarak yazınız.