KÜMELER

Küme nesneler topluluğudur.

Bu bölümde kümelerle kurulan matematiksel yapıyı tanıtacağız.

Küme kavramı matematiğe girmeden önce **matematik** denilince akla **sayılar** ve **şekiller** gelirdi. **Kümeler kuramı**nın ortaya konulmasıyla sayılar ve şekiller dışındaki nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini düzenleyen kuralların da en azından **sayılar** ve **şekiller** kadar geçerli matematiksel yapılar oluşturabildiği görüldü.

Bir matematiksel yapı, kendi içerisindeki problemlerin ve matematiksel modelleri kurulan gerçek yaşam problemlerinin çözümlerinin gerçekleştirildiği bir usa vurma ortamıdır. **Kümeler kuramı** da temel tanımları, aksiyomları ve bunlardan çıkarılan sonuçları ile bir matematiksel yapıdır. Bu kuramın temellerini 19. yüzyılda Rus asıllı Alman matematikçisi **Georg Cantor** (1845-1918) ortaya koymuştur. Kuramın yetkinleşmesi, diğer matematiksel yapılarda olduğu gibi yüzyıllar almamış, bir kaç yıl gibi kısa bir sürede gerçekleşmiştir

Kümeler kuramı bağımsız bir matematiksel yapı olmasının yanında diğer yapıları da etkiledi. Diğer matematiksel yapılar kümeler kuramının kavram ve ilkeleri ile yeniden ele alındı; yeniden yapılandırıldı. Bu yeniden yapılanma ile matematiğin gücü arttı, ufukları genişledi. Matematiğin günümüzdeki güçlü ve görkemli varlığında kümeler kuramının payı büyüktür.

Biz bu bölümde kümeler kuramına, gelecek matematik konularının aktarılmasında gerekli olacağı ölçüde gireceğiz.

2.1 – Temel Kavramlar

2.1.1 – Küme Kavramı

Küme sözcüğü topluluk, sınıf veya yığın anlamlarına gelir. Matematikteki **küme** terimi de bu anlamlara gelen kavramın adıdır.

Georg Cantor kümeyi *"belirli ve birbirinden farklı nesnelerin topluluğu"* olarak tanımlamıştır. Ancak bu tanım, örneğin, bir doğru parçasının tanımı gibi zihinde kesin bir tasarım oluşturmaz. Böyle, zihinde **kesin bir tasarım** oluşturacak küme tanımı yapılamamıştır. Tanımsız terim olarak alacağımız **küme** terimini örnekler ve açıklamalarla sezdirmeye çalışacağız.

Örnek – 2.1

Aşağıda belirtilen toplulukların her biri bir küme oluşturur.

a. Sınıfınızdaki öğrenciler.
b. İki basamaklı doğal sayılar.
c. Güneş sistemindeki gezegenler.
d. Evrendeki yıldızlar.
e. $1 \leq x < 10$ eşitsizliğini sağlayan gerçek sayılar.
f. a, Δ, $\square$, 3, 5 ten oluşan semboller topluluğu.
g. M. K. Atatürk, İsmet İnönü
h. 1, 2, 3, 4, 5 sayıları

Tanım – 2.1

*Bir kümeyi oluşturan nesnelere bu kümenin **eleman**ları (**öge**leri) denir.*

Kümeler A, B, C, ... gibi büyük harflerle adlandırılırlar. Kümenin elemanları da a, b, c, ... gibi küçük harflerle temsil edilirler.

Bir a nesnesi bir A kümesinin elemanı ise bu $\mathbf{a \in A}$ biçiminde, değilse bu da $\mathbf{a \notin A}$ biçiminde gösterilir. Bu ifadeler sırasıyla **a eleman A** ve **a eleman değil A** biçiminde okunur.

Kümenin Belirtilmesi

Etkinlik – 2.1

Sınıfınızdan iki arkadaşınızla, aşağıda özelikleri belirtilen elemanların adlarını, aranızda fikir alışverişi yapmadan ayrı ayrı yazınız.

Yazdıklarınızı karşılaştırarak, hangi maddelere karşılık farklı adlar yazdığınızı görünüz. Farklılıkların nedenlerini belirtiniz

a. Sınıfınızdaki gözlüklü öğrenciler.
b. Sınıfınızdaki en sıcakkanlı üç öğrenci.
c. Sınıfınızdaki öğrencilerden dördü.
d. Okulunuzdaki yaşlı öğretmenler.
e. 1'den küçük bir doğal sayı.
f. 8'den küçük bir doğal sayı.

+Elemanları tek tek belirtilen her topluluk bir küme oluşturur. Ancak, bir küme elemanlarının ortak özelikleri ile belirtilmişse, bu özelikler ayırt edici biçimde açıklanmış olmalıdır. Öyle ki, aynı koşullardaki herkes o açıklamaya dayanarak aynı kümeyi yazabilmelidir.

Hangi nesnelerin kümenin içinde olacağının böyle kesinlikle belirtilmesine **kümenin iyi tanımlanması** denir.

Örneğin;

"Bursa, İzmir, Muğla"

bir küme oluşturduğu hâlde,

"Türkiye'deki illerden üçü."

ifadesi bir küme belirtmez. Çünkü bu ifadeye dayanılarak çok sayıda değişik kümeler yazılabilir.

Kümelerin Gösterilmesi

Kümeler, ortak özelik yöntemi, liste yöntemi ve şema yöntemi olmak üzere üç değişik yöntemle gösterilir. "Kümelerin gösterilmesi" derken, bunların kağıt, ekran, tahta, ... üzerinde gösterilmesinden söz ettiğimiz açıktır.

Ortak Özelik Yöntemi

Bir kümenin bütün elemanlarının sağladığı, bu kümenin elemanı olmayan nesnelerin sağlamadığı bir özelik varsa; bu küme o özeliği belirten açık önermeden yararlanılarak yazılır.

Örneğin; bir A kümesinin elemanları bir p(x) açık önermesini doğru yapan elemanlardan oluşmuşsa bu küme, $A = \{x | p(x)\}$ veya $A = \{x : p(x)\}$ biçiminde gösterilir.

"|" ve "**:**" sembolleri **öyle ki** deyimi yerine kullanılır. A kümesi, **x öyle ki p(x) doğrudur.** veya kısaca **x öyle ki p(x)** diye okunur.

$x | p(x)$ ifadesinin içerisine yazıldığı büyük ayıraca **küme ayıracı** denir.

Örnek – 2.2

İki basamaklı doğal sayıların kümesi A ise, bu küme ortak özelik yöntemi ile

$A = \{x | x \in N,$ x iki basamaklıdır.$\}$

biçiminde gösterilir.

$p(x)$ önermesinin belirttiğine göre, örneğin,
$23 \in A$ ve $5 \notin A$ dır.

Liste Yöntemi

Kümenin elemanları küme ayıracının içine tek tek yazılır; elemanların arasına virgül konulur. Elemanlar istenilen sıra ile yazılabilir. Bir kümede her eleman yalnız bir kere yazılır.

Örnek – 2.3

"KAZAK" sözcüğündeki harflerin kümesi H ise, bu küme liste yöntemi ile $H = \{K, A, Z\}$ biçiminde gösterilir.

Daha önce bir kümenin elemanlarının küçük harflerle gösterildiğini söylemiştik. Ancak burada elemanların temsilcilerini değil, doğrudan doğruya kendi sembollerini kullandık.

Örnek – 2.4

Haftanın P harfi ile başlayan günlerinin kümesi liste yöntemi ile

$A = \{$Pazartesi, Perşembe, Pazar$\}$ biçiminde yazılır.

✚ Bir kümenin elemanlarının sayısı bunların tek tek yazılmasına olanak vermiyorsa, küme zorunlu olarak ortak özelik yöntemi ile gösterilir.

Bununla birlikte, bazı kümelerde kümelerin elemanlarının ortak özelikleri liste yöntemi ile de sezdirilebilir.

Örnek – 2.5

a. $N = \{x | x$ bir doğal sayıdır.$\}$
kümesi liste yöntemi ile
$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ biçiminde yazılabilir.

b. $Ç = \{x | x$ çift tam sayıdır.$\}$ kümesi
$Ç = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ biçiminde yazılabilir.

c. $A = \{x | x \in N,\ 9 < x < 100\}$ kümesi
$A = \{10, 11, 12, ..., 99\}$ biçiminde yazılabilir.

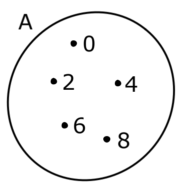
Ayıraçlar içindeki yan yana üç noktalar, elemanların sıralamasında gözlenen özeliğin aynen sürdürüleceğini belirtir.

Şema Yöntemi

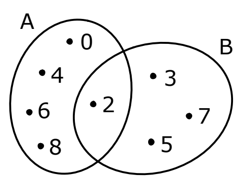
Ortak özelik yöntemi ya da liste yöntemi ile yazılmış kümeleri şemalarla da göstermek, bu kümeler arasındaki ilişkileri kavramada kolaylık sağlar. Bu amaçla kullanılan şemalar, kapalı eğrilerle sınırlandırılmış düzlemsel bölgeler biçiminde seçilirler. Kümenin elemanları bu kapalı bölgeye serpiştirilmiş noktalarla temsil edilirler. Bu şemalar İngiliz mantıkçısı John Venn (1834-1923) tarafından önerildiğinden **Venn Şeması** diye adlandırılırlar.

Örnek – 2.6

a. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ kümesi Venn şeması ile yandaki gibi gösterilir.



b. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $B = \{2, 3, 5, 7\}$ kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilir.



Etkinlik – 2.2

"MATEMATİK" sözcüğündeki harflerin ve

"ANALİTİK" sözcüğündeki harflerin kümelerini bildiğiniz yöntemlerle gösteriniz.

Eleman Sayılarına Göre Kümeler

Etkinlik – 2.3

Aşağıda ortak özelik yöntemi ile verilmiş kümeleri liste yöntemi ile gösteriniz.

g. $A = \{x|\ 90 \le x \le 96,\ x \text{ asal sayı}\}$

h. $B = \{x|\ x \in R,\ x^2 < 0\}$

i. $C = \{x|\ x < 9 \text{ ve x tek doğal sayıdır.}\}$

j. $D = \{x|\ x \ge 9 \text{ ve x tek doğal sayıdır.}\}$

Boş Küme

Tanım – 2.2

*Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir.*

Boş küme, "{ }" ve "∅" sembollerinden biri ile gösterilir.

Örneğin;

$A = \{x|\ x \text{ 4 metre boyunda insandır.}\}$

kümesi liste yöntemi ile yazılırsa küme parantezinin içine yazılabilecek bir eleman bulunamaz.

$A = \{\ \}$ ya da $A = \varnothing$ olur.

Sonlu Kümeler, Sonsuz Kümeler

Bir A kümesinin elemanlarının sayısı $\mathbf{s(A)}$ sembolü ile gösterilir.

Örneğin, $A = \{x|\ x < 10,\ x \in N\}$ kümesi liste yöntemi ile yazılırsa;

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ olur.

Kümenin elemanları sayılırsa, $s(A) = 10$ olduğu görülür.

Bir kümenin eleman sayısı hesaplama yoluyla da bulunabilir.

Örneğin,

$B = \{x|\ x \text{ dört basamaklı çift sayıdır.}\}$

kümesi liste yöntemi ile yazılırsa,

$B = \{1000,1002,1004,...,9998\}$ olur.

Bu kümenin eleman sayısının

$$s(B) = \frac{9998 - 998}{2} = 4500$$

olduğunu bulabilirsiniz.

Peki, örneğin $C = \{x|\ x \ge 10,\ x \in N\}$ kümesinin elemanlarını sayabilir misiniz?

Eleman sayıları bir doğal sayı ile belirtilebilen kümelere **sonlu küme**ler; sonlu olmayan kümelere **sonsuz küme**ler adı verilir.

Örnek – 2.7

a. $A = \{x|\ 2 \le x \le 9,\ x \in N\}$ kümesi sonlu kümedir.

b. $B = \{x|\ 3 \le x \le 7,\ x \in R\}$ kümesi sonsuz kümedir. B kümesi "$[\mathbf{3,7}]$" biçiminde de gösterilir. Örneğin; 7 kümeye dahil olmasaydı, o zaman küme "$[\mathbf{3,7})$" ya da "$[\mathbf{3,7}[$" biçiminde gösterilecekti.

c. $C = \{x|\ x \text{ yeryüzünde bir canlıdır.}\}$ kümesinin elemanlarını saymak olanaksız olsa da bu küme sonlu kümedir.

d. $D = \{x|\ x \text{ asal sayıdır.}\}$ kümesi sonsuz kümedir.

Doğal sayı ve **sayma** kavramlarını sezgisel olarak öğrenmiştiniz. Şimdi de **sonlu küme**, **sonsuz küme** kavramlarını yine sezgisel olarak kavratmaya çalıştık. Bu kavramlar matematiğin tanımlanmış kavramlarıdır. Ancak, tanımlarda 3. bölümde tanıtacağımız terimler geçecektir. Bu yüzden, bu tanımları 4. bölümde verebileceğiz.

Eşit Kümeler, Denk Kümeler

Tanım – 2.3

*Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir.*

A kümesi B kümesine eşit ise bu, $\mathbf{A = B}$ biçiminde; değilse bu da, $\mathbf{A \neq B}$ biçiminde gösterilir.

Örnek – 2.8

$A = \{x |\ x^2 < 7,\ x \in N\}$ ve $B = \{x |\ 2x < 5,\ x \in N\}$ kümeleri liste yöntemi ile yazılırsa, bunların aynı elemanlardan oluştuğu görülür.

$A = \{0,1,2\}$ ve $B = \{0,1,2\}$ olup $A = B$ dir.

✚ Aynı sayıda elemandan oluşan kümeler **denk kümeler**dir. A kümesi B kümesine denk ise bu $\mathbf{A \equiv B}$ biçiminde; değilse bu da $\mathbf{A \not\equiv B}$ biçiminde gösterilir.

Eşit olan kümelerin denk olacakları açıktır.

"**Denk kümeler**" teriminin tam bir tanımı 4. bölümde verilecektir.

Örneğin; $A = \{a,b\}$, $B = \{12,23\}$ ve $C = \{1,2,3\}$ ise $\mathbf{A \equiv B}$ ve $B \not\equiv C$ dir.

Alt Küme

Tanım – 2.4

*Bir A kümesinin her elemanı bir B kümesinin de elemanı ise, A kümesine B kümesinin bir **altküme**si denir.*

*Bu durumda B kümesi A kümesini **kapsar**.*

Bir A kümesi bir B kümesinin alt kümesi ise bu $\mathbf{A \subset B}$ veya $\mathbf{B \supset A}$ biçiminde gösterilir. İlki **A alt küme B**, ikincisi **B kapsar A** diye okunur.

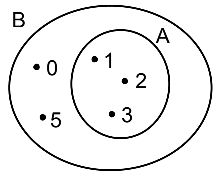
A kümesinin B kümesinde olmayan en az bir elemanı varsa, bu durum da $\mathbf{A \not\subset B}$ veya $\mathbf{B \not\supset A}$ biçiminde gösterilir.

Örnek – 2.9

a. Sınıfınızdaki gözlüklü kız öğrencilerin kümesi, sınıfınızdaki öğrencilerin kümesinin bir alt kümesidir.

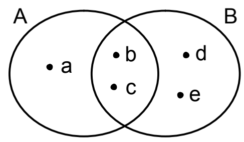
b. $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{0,1,2,3,5\}$ ise $A \subset B$ dir.

A ve B kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirler.



c. $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{b,c,d,e\}$ ise $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ dır.

A ve B kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirler.



$\mathbf{A \subset B}$ önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı

"$\forall \mathbf{x}, [(\mathbf{x} \in \mathbf{A}) \Rightarrow (\mathbf{x} \in \mathbf{B})]$" dir.

$(\mathbf{A} \subset \mathbf{B}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{x}, [(\mathbf{x} \in \mathbf{A}) \Rightarrow (\mathbf{x} \in \mathbf{B})]$ yazılabilir.

Teorem – 2.1

Her küme kendisinin alt kümesidir.

Teorem – 2.1'i sembollerle kısaca

"$\mathbf{A \subset A}$ dır."

biçiminde ifade edebiliriz.

Teorem – 2.2

Boş küme her kümenin alt kümesidir.

Teorem – 2.2'nin sembollerle ifadesi

"$\varnothing \subset \mathbf{A}$ dır."

biçiminde olur.

Etkinlik – 2.4

Aşağıdaki teoremleri niceleme mantığında sembolleştirerek ispatlayınız.

a. $A \subset A$ **b.** $\varnothing \subset A$

Teorem – 2.3

$(\mathbf{A}=\mathbf{B}) \Leftrightarrow (\mathbf{A}\subset\mathbf{B})\wedge(\mathbf{B}\subset\mathbf{A})$

Teorem – 2.3, sözle şöyle ifade edilebilir:

"A ve B kümelerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul bu kümelerden her birinin diğerinin alt kümesi olmasıdır."

Etkinlik – 2.5

A ve B birer küme olmak üzere "$\mathbf{A}=\mathbf{B}$" önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı

$\forall \mathbf{x},\ (\mathbf{x}\in\mathbf{A}) \Leftrightarrow (\mathbf{x}\in\mathbf{B})$ dir. Buna göre,

$(\mathbf{A}=\mathbf{B}) \Leftrightarrow (\mathbf{A}\subset\mathbf{B})\wedge(\mathbf{B}\subset\mathbf{A})$ teoremini

$(A=B) \Leftrightarrow [\forall x (x\in A) \Leftrightarrow (x\in B)]$ önermesinden yararlanarak ispatlayınız.

Bir Kümenin Alt Kümelerinin Sayısı

Etkinlik – 2.6

a. $A=\varnothing$ olduğuna göre,
A kümesinin alt kümelerini yazınız.

b. $B=\{a\}$ olduğuna göre,
B kümesinin alt kümelerini yazınız.

c. $C=\{a, b\}$ olduğuna göre,
C kümesinin alt kümelerini yazınız.

d. $D=\{a, b, c\}$ olduğuna göre,
D kümesinin alt kümelerini yazınız.

e. $E=\{a, b, c, d\}$ olduğuna göre,
E kümesinin alt kümelerini yazınız.

f. Bulduğunuz sonuçları kullanarak yandaki tabloyu doldurunuz. Tablodan yararlanarak n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısını tahmin ediniz.

Kümenin eleman sayısı	Kümenin alt kümelerinin sayısı
0	
1	
2	
3	
4	

Teorem – 2.4

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı $\mathbf{2^n}$ *dir.*

Etkinlik–2.6'da Teorem–2.4'ü sezdiğinizi düşünüyoruz. Bu teoremin ispatı 8. sınıfta öğrendiğiniz –11. sınıfta daha geniş biçimde incelenecek olan– **permütasyon, kombinasyon, binom açılımı** kavramlarını gerektirmektedir. Konumuzu dağıtmamak için burada bu kavramlarla ilgili ispatlamaları yapmayacağız.

n Elemanlı Bir Kümenin r Elemanlı Alt Kümelerinin Sayısı

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin her birine **n'in r'li bir kombinasyonu** denildiğini; n elemanlı bir kümenin r'li kombinasyonlarının sayısının,

$$\mathbf{C}(\mathbf{n},\mathbf{r})=\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{r})!\cdot\mathbf{r}!}$$

olduğunu 8. sınıfta öğrendiniz.

Örneklerle uygulamaları hatırlatalım:

Örnek – 2.10

8 elemanlı bir kümenin 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$\binom{8}{5}=\frac{8!}{(8-5)!\cdot 5!}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{3\cdot2\cdot1\cdot5!}=56$$

bulunur.

✚ $\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ formülü incelenirse;

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}=\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-\mathbf{r}}$ olduğu kolayca görülür.

Örnek – 2.11

3 elemanlı alt kümelerinin sayısı 6 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olan bir kümenin 4 elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

Çözüm

Küme n elemanlı olsun.

$\binom{n}{3} = \binom{n}{6}$ olduğundan

$n = 3 + 6 \Rightarrow n = 9$ olur.

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)!\,4!} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\,4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$$

bulunur.

✚ $r < \frac{n}{2}$ olarak alındığında $\binom{n}{r}$ sayısının hesabı kolaylaştırılabilir. Örneğin;

$\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$ eşitliğinde payda ve paydada 4 tane (r tane) çarpan olduğuna dikkat ediniz.

Örnek – 2.12

10 elemanlı bir kümenin 7 elemanlı alt kümelerinin sayısını, yukarıda verdiğimiz kolaylıktan yararlanarak bulalım:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$$

✚ Kombinasyon tanımına göre,

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{0}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{1}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{3}} + \dots + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}} = \mathbf{2^n} \text{ dir.}$$

Örnek – 2.13

7 elemanlı bir kümenin, en az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

Çözüm

7 elemanlı bir kümenin en az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı

$\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$ dir.

Bu toplamdaki terimleri ayrı ayrı hesaplamak yerine,

$$\underbrace{\binom{7}{0}}_{1} + \underbrace{\binom{7}{1}}_{7} + \underbrace{\binom{7}{2}}_{21} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7$$

eşitliğinden yararlanacağız. Buna göre,

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7 - 29 = 99$$

bulunur.

Öz Alt Kümeler

Tanım – 2.5

Bir kümenin, kendisinden farklı alt kümelerine bu kümenin ***öz alt kümeleri*** *denir.*

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n olduğuna göre, öz alt kümelerinin sayısı da $\mathbf{2^n} - 1$ olur.

Kuvvet Kümesi

Tanım – 2.6

Bir A kümesinin alt kümelerinin kümesine, A kümesinin ***kuvvet kümesi*** *denir.*

A kümesinin kuvvet kümesi $\mathbf{P(A)}$ ile gösterilir.

Örneğin, $A = \{a, b, c\}$ ise

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ olur.

Etkinlik – 2.7

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin,

a. üç elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.
b. dört elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.
c. öz alt kümelerinin sayısını bulunuz.
d. kuvvet kümesinin alt kümelerinin sayısını bulunuz.

Etkinlik – 2.8

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin alt kümelerin kaç tanesinde

a. a bulunmaz?
b. b bulunur?
c. a ve b bulunur?
d. a veya b bulunur?
e. a veya b bulunur ve c bulunur.
f. a veya b bulunur veya c bulunmaz.

Etkinlik – 2.9

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ olduğuna göre, $D \subset A \subset E \subset B$ koşulunu sağlayan

a. kaç değişik D kümesi vardır?
b. kaç değişik E kümesi vardır?
c. 4 elemanlı kaç değişik E kümesi vardır?
d. 5 elemanlı kaç değişik E kümesi vardır?

Etkinlik – 2.10

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümeleri veriliyor. B kümesinin alt kümelerinin kaçında A kümesinin,

e. yalnız bir elemanı bulunur?
f. yalnız iki elemanı bulunur?
g. üç elemanı da bulunur?
h. en az bir elemanı bulunur?

Alıştırmalar ve Problemler – 2.1

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir küme belirtir? Belirtilen kümeleri bildiğiniz yöntemlerle gösteriniz.

a. "Türkiye'nin büyük kentleri."
b. "Ailenizdeki erkekler."
c. "İki basamaklı üç doğal sayı."
d. "Boş kümenin alt kümeleri."
e. "Bütün kümelerin kümesi."
f. "15.05.2006 tarihinde doğan çocuklar."

2. Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını belirtiniz.

a. $\varnothing$ **b.** $\{0\}$ **c.** $\{\varnothing\}$
d. $\{a, b, ab\}$ **e.** $\{a, 2a, a^2\}$ **f.** $\{m, n, \{m\}\}$
g. $\{a, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ **h.** $\{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

3. Aşağıdaki ifadelerde "?" işaretlerinin yerine uygun semboller koyarak doğru önermeler elde ediniz.

a. $\{a, c\} ? \{a, \{b\}, c\}$ **b.** $\varnothing \ ? \ \{\varnothing, A, B\}$
c. $\{2, \{3\}\} ? \{1, 2, 3, 4\}$ **d.** $\{a, b, c\} ? \{b, c, d, e\}$
e. $\{a, \{a, b\}, b, c\} ? \{a, b, \{a, b\}\}$
f. $\{a, \{a, b\}\} ? \{a, b, \{b, a\}\}$

4. Aşağıdaki önermelerin doğru olması için "Δ" ve "$\square$" sembollerinin yerine hangi elemanlar konulmalıdır?

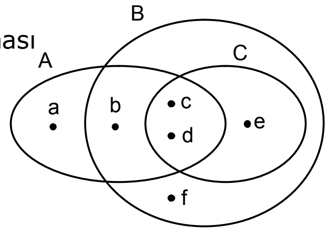
a. $\{a, \Delta, b\} = \{\square, k, a\}$
b. $\{1, 3, \Delta, 9\} = \{3, 5, \square, 9\}$
c. $\{\Delta, 3, 5\} = \{\{3\}, 5, \square\}$
d. $\{2, 4, 6, \Delta\} = \{2, \square, 4, 6\}$
e. $\{2, 5, \Delta\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
f. $\{a, b, \Delta\} \subset \{b, c, d, \square\}$

5. $A = \{\varnothing, a, \{a\}\}$ kümesinin tüm alt kümelerini yazınız.

6. $A = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}\}$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a. $a \in A$ **b.** $\{a,b\} \subset A$ **c.** $\varnothing \in A$
d. $\varnothing \subset A$ **e.** $\{a\} \subset A$ **f.** $\{\{c\}\} \subset A$
g. $\{a,b,c\} \subset A$ **h.** $\{\varnothing, \{a\}\} \subset A$

7. Yandaki Venn şeması ile verilen A, B, C kümelerini liste yöntemi ile yazınız.



8. Aşağıda verilen kümeleri birlikte Venn şemaları ile gösteriniz.

a. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,5\}$, $C = \{1,2,5\}$

b. $A = \{1,2,4\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $C = \{4,5,6\}$

c. $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$, $C = \{a,d\}$

d. $A = \{3,5,6\}$, $B = \{1,2,5\}$, $C = \{2,4,5\}$

9. Aşağıdaki teoremleri ispatlayınız.

a. $A \subset \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$

b. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$

10. A = {a, b, c, d, e, f} kümesinin

a. bir elemanlı **b.** iki elemanlı
c. üç elemanlı **d.** beş elemanlı
alt kümelerinin sayısını bulunuz.

11. $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin alt kümelerinin kaçında,

a. 2 bulunur?

b. 5 bulunmaz?

c. 2 ve 3 bulunur?

d. 3 veya 5 bulunur?

e. 3 bulunmaz veya 5 bulunmaz?

f. 2 bulunur veya 3 ile 5 bulunur?

12. $\{a,b,c\} = \{2,4,5\}$,
$\{c,d,e\} = \{1,3,5\}$,
$\{a,c,e\} = \{3,4,5\}$
olduğuna göre a, b, c, d, e değerlerini bulunuz.

13. Aşağıda öz alt kümelerinin sayıları verilen kümelerin, iki elemanlı alt kümelerinin sayılarını bulunuz.

a. 7 **b.** 31 **c.** 63 **d.** 255

14. $A = \{1,2\}$ ve $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ olduğuna göre $A \subset K \subset B$ koşulunu sağlayan kaç tane K kümesi vardır?

15. $A = \{1,3,5,6\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ ve $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümeleri veriliyor.

a. $A \subset K \subset C$ ve $B \subset K \subset C$ koşulunu sağlayan kaç K kümesi vardır?

b. $R \subset A$ ve $R \subset B$ koşullarını sağlayan kaç R kümesi vardır?

16. Bir A kümesinin alt kümelerinin sayısı bir B kümesinin alt kümelerinin sayısının 3 katından 80 fazladır. A'nın eleman sayısı B'nin eleman sayısından 3 fazla olduğuna göre, A kümesi kaç elemanlıdır?

17. $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ kümeleri veriliyor. B kümesinin 5 elemanlı alt kümelerinin kaçında A kümesinin

a. yalnız iki elemanı bulunur?

b. en çok iki elemanı bulunur?

c. en az iki elemanı bulunur?

d. en az bir elemanı bulunur?

18. Bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısının 5 elemanlı alt kümelerinin sayısına oranı 2 : 3 tür. Bu kümenin en az üç elemanlı alt kümelerinin sayısı kaçtır?

2.2 – Kümelerde İşlemler

Bu kısımda **kesişme, birleşme, tümleme** ve **fark** işlemlerini tanıtacağız.

2.2.1 – Birleşme ve Kesişme İşlemleri

Etkinlik – 2.11

Bir okul matematik ve fizik dallarında yarışmalara katılacaktır. Matematik takımı Ali, Cem, Başak ve Miray'dan; fizik takımı da yine Ali ve Cem ile Mert ve Sinan'dan oluşturulmuştur.

M, matematik dalındaki yarışmacıların kümesi;

F, fizik dalındaki yarışmacıların kümesi;

Y, yarışmacıların kümesi;

D, iki dalda da yarışacak olan yarışmacıların kümesi olduğuna göre;

a. M ve F kümelerini birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

b. Y kümesini şema üzerinde tarayarak belirtiniz. Liste yöntemi ile yazınız.

c. D kümesini, ayrıca çizeceğiniz şema üzerinde tarayarak belirtiniz. Liste yöntemi ile yazınız.

d. Yarışmacıların M ve F kümelerinden en az birinin ya da ikisinin de elemanları olmaları özeliklerine dayanarak, Y ve D kümelerini ortak özelik yöntemi ile yazınız.

Etkinlik – 2.12

$A = \{x | x,\ 12'\text{nin bölenidir.}\}$ ve

$B = \{x | x,\ 18'\text{in bölenidir.}\}$ olduğuna göre;

a. A ve B kümelerini birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

b. $C = \{x | x,\ 12'\text{nin ve } 18'\text{in bölenidir.}\}$ kümesini şema üzerinde tarayarak belirtiniz. Liste yöntemi ile yazınız.

Tanım – 2.7

*İki kümenin tüm elemanlarının kümesine bu iki kümenin **birleşim** kümesi; birleşim kümesini veren işleme de **birleşme** işlemi denir.*

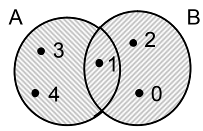
Birleşme işlemi "$\cup$" sembolü ile; A ile B kümelerinin birleşim kümesi de $\mathbf{A \cup B}$ ile gösterilir.

$A \cup B$ kümesinin elemanları ya A'nın ya B'nin ya da hem A'nın hem B'nin elemanlarıdır.

Buna göre, $A \cup B$ kümesi ortak özelik yöntemi ile $A \cup B = \{x | x \in A \text{ veya } x \in B\}$ biçiminde yazılır.

Örnek – 2.14

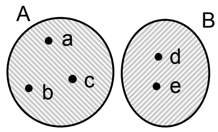
a. $A = \{1, 3, 4\}$ ve $B = \{0, 1, 2\}$ ise $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olur.



$A \cup B$

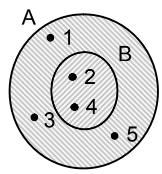
b. $\{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$ olur.

c. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{d, e\}$ ise $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ olur.



$A \cup B$

d. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{2, 4\}$ ise $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olur.



$A \cup B$

Tanım – 2.8

*İki kümenin ortak elemanlarının kümesine bu iki kümenin **kesişim** kümesi; kesişim kümesini veren işleme de **kesişme** işlemi denir.*

Kesişme işlemi "$\cap$" sembolü ile; A ile B kümelerinin kesişim kümesi de $\mathbf{A \cap B}$ ile gösterilir.

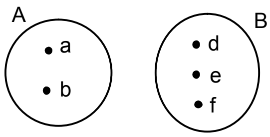
$A \cap B$ kümesinin elemanları hem A'nın hem B'nin elemanlarıdır.

Buna göre, $A \cap B$ kümesi ortak özelik yöntemi ile $A \cap B = \{x | x \in A \text{ ve } x \in B\}$ biçiminde yazılır.

Tanım – 2.9

Kesişim kümesi boş küme olan iki kümeye ***ayrık kümeler*** *denir.*

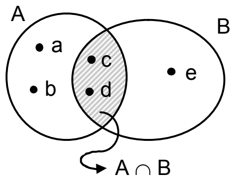
Örneğin, $A=\{a,b\}$ ve $B=\{d,e,f\}$ ise A ile B ayrık kümelerdir.



$A \cap B = \varnothing$

Örnek – 2.15

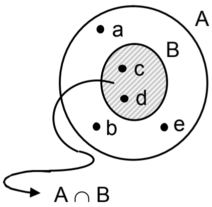
a. $A=\{a,b,c,d\}$ ve
$B=\{c,d,e\}$ ise
$A \cap B=\{c,d\}$ olur.



b. $\{1,2,3\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$ olur.

c. $A=\{1,2,3\}$ ve $B=\{7,8\}$ ise $A \cap B=\varnothing$ olur.
A ile B ayrık kümelerdir.

d. $A=\{a,b,c,d,e\}$ ve
$B=\{c,d\}$ ise
$A \cap B=\{c,d\}$ olur.



Birleşme ve Kesişme İşlemlerinin Özelikleri

Tek Kuvvet Özeliği

Teorem – 2.5

a. $\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$ *dır.* *(Birleşimin tek kuvvet özeliği)*
b. $\mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}$ *dır.* *(Kesişimin tek kuvvet özeliği)*

Etkinlik – 2.13

$A \cup B = \{x|\ x \in A \text{ veya } x \in B\}$

$A \cap B = \{x|\ x \in A \text{ ve } x \in B\}$ tanımlarından ve önerme işlemlerinden yararlanarak Teorem–2.5'i ispatlayınız.

Teorem – 2.6

a. $\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A}$ *dır.*
b. $\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing$ *dir.*

Etkinlik – 2.14

Önerme işlemlerinden yararlanarak, Teorem–2.6'yı ispatlayınız.

($x \in \varnothing$ önermesinin daima yanlış olduğuna dikkat ediniz.)

Değişme Özeliği

Teorem – 2.7

a. $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$ *dır.* *(Birleşimin değişme özeliği)*
b. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$ *dır.* *(Kesişimin değişme özeliği)*

Etkinlik – 2.15

Önerme işlemlerinden yararlanarak, Teorem–2.7'yi ispatlayınız..

Birleşme Özeliği

Teorem – 2.8

a. $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$ *dir.*
(Birleşimin birleşme özeliği)

b. $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$ *dir.*
(Kesişimin birleşme özeliği)

Birleşme özeliğine dayanılarak parantezler kaldırılabilir:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ yazılabilir.

Etkinlik – 2.16

Önerme işlemlerinden yararlanarak, Teorem–2.8'i ispatlayınız..

Dağılma Özeliği

Teorem – 2.9

a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *dir.*
(Birleşimin kesişim üzerine soldan dağılma öz.)

b. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *dir.*
(Birleşimin kesişim üzerine sağdan dağılma öz.)

c. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *dir.*
(Kesişimin birleşim üzerine soldan dağılma öz.)

d. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *dir.*
(Kesişimin birleşim üzerine sağdan dağılma öz.)

Etkinlik – 2.17

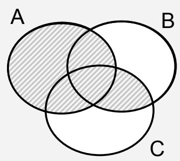
Önerme işlemlerinden yararlanarak, Teorem–2.9'u ispatlayınız..

Etkinlik – 2.18

a. $A \cap B = \{0,1,2,3\}$ ve $A \cap C = \{1,2,3,4\}$ olduğuna göre, $A \cap (B \cup C)$ kümesini yazınız.

b. $A \cap B = \{a,b,c,d,e\}$ ve $A \cap C = \{c,d,e,f\}$ olduğuna göre, $B \cap C$ kümesi en az kaç elemanlıdır?

c. $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$
$A \cup C = \{c,d,e,f\}$
olduğuna göre, şemadaki taralı bölgeye karşılık gelen kümeyi liste yöntemi ile yazınız.



Teorem – 2.10

a. $A \subset (A \cup B)$ *dir.*

b. $(A \cap B) \subset A$ *dır.*

c. $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$ *dır.*

d. $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$ *dir.*

Etkinlik – 2.19

"$A \subset B$" önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı $\forall x, \ [x \in A \Rightarrow (x \in B)]$;

"$A = B$" önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı $\forall x, \ [(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$ dir.

Bu bilgileri kullanarak Teorem–2.10'u ispatlayınız.

Etkinlik – 2.20

Önerme işlemlerinden yararlanarak,

a. "$A \cup C = B \cup C$" önermesinin "$A = B$" önermesini gerektirmediğini gösteriniz. Bir örnek veriniz.

b. "$(A \cup C) \subset (B \cup C)$" önermesinin "$A \subset B$" önermesini gerektirmediğini gösteriniz. Bir örnek veriniz.

c. "$A \cap C = B \cap C$" önermesinin "$A = B$" önermesini gerektirmediğini gösteriniz. Bir örnek veriniz.

d. "$(A \cap C) \subset (B \cap C)$" önermesinin "$A \subset B$" önermesini gerektirmediğini gösteriniz. Bir örnek veriniz.

Etkinlik – 2.21

Aşağıdaki kümeleri birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

a. $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,d,e\}$, $C = \{b,d,f\}$

b. $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $C = \{5,6\}$

c. $A = \{a,b,c,f\}$, $B = \{b,c,d,e\}$, $C = \{a,c,d,f\}$

d. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{2,5,6,7\}$

2.2.2 – Evrensel Küme ve Tümleme İşlemi

Etkinlik – 2.22

Sınıfınızdaki kız öğrencilerin kümesi K olsun.

a. Sınıfınızda K'nın elemanı olmayan öğrencilerin K' kümesini ve $K \cup K'$ kümesini yazınız.

b. Okulunuzda K nın elemanı olmayan kız öğrencilerin K' kümesini ve $K \cup K'$ kümesini yazınız.

c. Okulunuzda K nın elemanı olmayan öğrencilerin K' kümesini ve $K \cup K'$ kümesini yazınız.

d. Türkiye'de K'nın elemanı olmayan lise öğrencilerinin K' kümesini ve $K \cup K'$ kümesini yazınız.

e. K'nın elemanı olmayan tüm nesnelerin kümesini yazabilir misiniz?

f. K'nın elemanı olmayan nesnelerin kümesini yazabilmek için, K'yı kapsayan bir kümenin verilmesi gerekli midir? Tartışınız.

Etkinlik – 2.23

$(2x+3)(x+2)(x-3)=0$ denkleminin,

a. çift doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

b. doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

c. tam sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

d. rasyonel sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

e. gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

Tanım – 2.10

İncelenen bir konuda gerekli olabilecek tüm elemanları kapsayacak biçimde seçilen kümeye ***evrensel küme*** *denir.*

Evrensel küme **E** ile gösterilir. Bir evrensel küme istenildiği kadar geniş seçilebilir. Değişik konularda seçilebilecek evrensel kümeler farklı olabileceği gibi, aynı konuda da değişik kişilerin seçeceği evrensel kümeler farklı olabilir. Hatta aynı kişi aynı konuda daha dar ya da daha geniş evrensel kümelerle çalışabilir.

Örneğin; **iki basamaklı asal sayılar**la ilgili bir uygulamada **evrensel küme**;

"İki basamaklı tek doğal sayılar.";

"İki basamaklı doğal sayılar.";

"Tek doğal sayılar.";

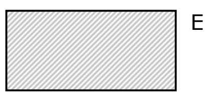
"Doğal sayılar.";

"Tam sayılar.";

⋮

kümelerinden herhangi biri olarak seçilebilir. Ancak bir uygulamada bir evrensel küme seçildikten sonra, artık bu kümenin elemanları dışındaki elemanlardan söz edilemez. Bu küme bu uygulama için **evren** sayılır. İlgilenilecek her nesne bu kümenin içerisinde aranmalıdır.

Herhangi bir kümeden ayırt edilmesi için, evrensel küme genellikle dikdörtgen biçiminde bir Venn şeması ile gösterilir.



Teorem – 2.11

E evrensel küme ve A herhangi bir küme olmak üzere;

a. $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ *dir.*

b. $\mathbf{A} \cap \mathbf{E} = \mathbf{A}$ *dır.*

c. $\mathbf{A} \cup \mathbf{E} = \mathbf{E}$ *dir.*

Etkinlik – 2.24

Önerme işlemlerinden yararlanarak Teorem–2.11'i ispatlayınız.

($x \in E$ önermesinin daima doğru olduğuna dikkat ediniz.)

Tanım – 2.11

E evrensel kümesi ile bir A kümesi verilmiş olsun.

E de olan fakat A da olmayan elemanların kümesine ***A nın tümleyeni****; A kümesinin tümleyenini bulma işlemine de* ***tümleme*** *denir.*

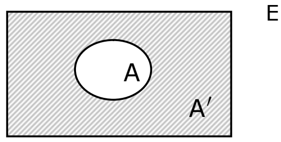
A kümesinin tümleyeni $\mathbf{A'}$ ile gösterilir.
Bu tanıma göre,

$\mathbf{A'} = \{\mathbf{x} | \ \mathbf{x} \in \mathbf{E} \wedge \mathbf{x} \notin \mathbf{A}\}$ dir.

$\forall x,\ x \in E \equiv 1$ ve $1 \wedge (x \notin A) \equiv x \notin A$ olduğundan

$\mathbf{A'} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \notin \mathbf{A}\}$ yazılabilir.

E, A ve A' kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirler.



Örnek – 2.16

$E = \{x | \ x \text{ tam sayıdır.}\}$ ve

$A = \{x | \ x \text{ çift sayıdır.}\}$ ise

$A' = \{x | \ x \text{ tek sayıdır.}\}$ olur.

Örnek – 2.17

$E = \{0,1,2,3,4,5\}$ ve $A = \{2,3,5\}$ ise

$A' = \{0,1,4\}$ olur.

Örnek – 2.18

$E = \{x | \ x \text{ sınıfınızdaki bir öğrencidir.}\}$ ve
$A = \{x | \ x \text{ sınıfınızdaki gözlüklü bir öğrencidir.}\}$ ise
$A' = \{x | \ x \text{ sınıfınızdaki gözlüksüz bir öğrencidir.}\}$ olur.

Teorem – 2.12

E evrensel küme ve A ile B herhangi bir küme olmak üzere;

a. $A \cup A' = E$ *dir.* **b.** $A \cap A' = \varnothing$ *dir.*

c. $(A')' = A$ *dır.* **d.** $\varnothing' = E$ *dir.*

e. $E' = \varnothing$ *dir.* **f.** $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$ *dür.*

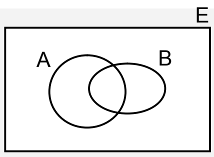
Etkinlik – 2.25

Niceleme mantığını kümelere uygulayarak

Teorem –2.12'yi ispatlayınız.

Birleşim ve Kesişim Kümelerinin Tümleyenleri – De Morgan Kuralları

Etkinlik – 2.26



Yandaki şemada A′ ve B′ kümelerine karşılık gelen bölgeleri farklı doğrultulardaki çizgilerle tarayarak

a. A', B' ve $(A \cup B)'$ kümeleri arasındaki bağıntıyı bulunuz.

b. A', B' ve $(A \cap B)'$ kümeleri arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Teorem – 2.13

A ve B herhangi iki küme olmak üzere,

a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ *dür.*

b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ *dür.*

Etkinlik – 2.27

Niceleme mantığını kümelere uygulayarak, Teorem–2.13'ü ispatlayınız.

Etkinlik – 2.28

$E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{3,7\}$ ve

$A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$ olduğuna göre;

a. $A' \cap B'$ kümesini yazınız.

b. $A' \cup B'$ kümesini yazınız.

2.2.3 – Fark ve Simetrik Fark İşlemleri

Tanım – 2.12

A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesine ***A kümesinin B kümesinden farkı*** *denir.*

A kümesinin B kümesinden farkı, $\mathbf{A - B}$ veya $\mathbf{A \backslash B}$ biçiminde gösterilir; **A fark B** diye okunur.

Tanım –2.12'ye göre,

$\mathbf{A - B = \{x | \ x \in A \text{ ve } x \notin B\}}$ dir.

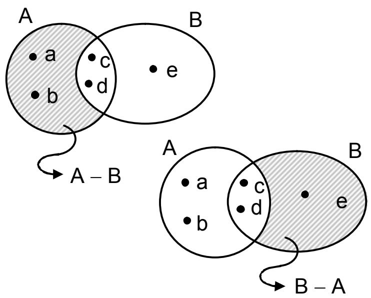
Örnek – 2.19

$A = \{a,b,c,d\}$ ve

$B = \{c,d,e\}$ ise

$A - B = \{a,b\}$,

$B - A = \{e\}$ dir.



Etkinlik – 2.29

a. $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{3,4,5\}$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini yazınız.
$A \neq B$ ise $A - B \neq B - A$ diyebilir misiniz?

b. $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{d,e\}$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini yazınız.
$A \cap B = \varnothing$ ise $A - B = A$ ve $B - A = B$ eşitlikleri doğru mudur?

c. $A = \{a,b,c,d\}$ ve $B = \varnothing$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini yazınız.
$A - \varnothing = A$ ve $\varnothing - A = \varnothing$ eşitlikleri doğru mudur?

d. $A = \{2,4\}$ ve $B = \{1,2,3,4,5\}$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini yazınız.
$A \subset B$ ise $A - B = \varnothing$ eşitliği doğru mudur?

Teorem – 2.14

E evrensel küme ve A ile B herhangi iki küme olmak üzere;

a. $A - B = A \cap B'$ *dür.* **b.** $A - A = \varnothing$ *dir.*

c. $A - \varnothing = A$ *dır.* **d.** $\varnothing - A = \varnothing$ *dir.*

e. $E - A = A'$ *dür.* **f.** $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$ *dir.*

Etkinlik – 2.30

Niceleme mantığını kümelere uygulayarak veya küme işlemlerinden yararlanarak Teorem–2.14'ü ispatlayınız.

Etkinlik – 2.31

Aşağıdaki teoremleri ispatlayınız.

a. $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$ dir.

b. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ dir.

c. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ dir.

d. $A - B = B' - A'$ dür.

e. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ dir.

f. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ dir.

Tanım – 2.13

A ve B birer küme olmak üzere

$A - B$ *kümesi ile* $B - A$ *kümesinin birleşimine A ile B nin* ***simetrik farkı*** *denir.*

A ve B kümelerinin simetrik farkı **A∆B** ile gösterilir; "A simetrik fark B" diye okunur.

Tanım –2.13'ün sembolik ifadesi

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ dır.

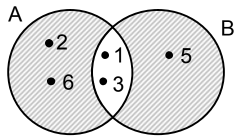
Örnek 2.20

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ ise $A - B = \{2, 6\}$ ve $B - A = \{5\}$ dir.

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

$\Rightarrow A \triangle B = \{2, 6\} \cup \{5\}$

$\Rightarrow A \triangle B = \{2, 5, 6\}$ olur.



A ∆ B

Etkinlik – 2.32

A ve B birer küme olmak üzere,

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

olduğunu küme işlemlerinden yararlanarak gösteriniz.

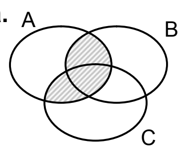
Etkinlik – 2.33

Kümelerde kesişim işleminin simetrik fark işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özeliği olduğunu ispatlayınız.

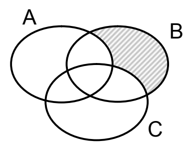
Etkinlik – 2.34

Aşağıda verilen Venn şemalarında taralı bölgelere karşılık gelen kümeleri A, B, C türünden en sade biçimde ifade ediniz.

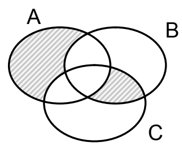
a.



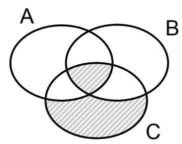
b.



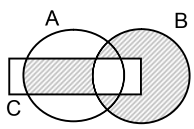
c.



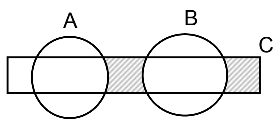
d.



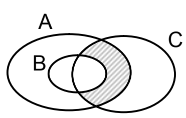
e.



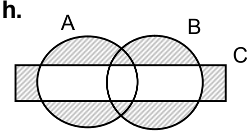
f.



g.



h.



Etkinlik – 2.35

Aşağıda belirtilen kümeleri hem küme işlemlerinden hem de Venn şemasından yararlanarak, en sade biçimde yazınız.

a. $(A \cap B) \cup (A - B)$
b. $(A \cup B) \cap B'$
c. $(A \cup B) \cap (A \cup B')$
d. $[(A \cup B') \cap (A \cap C)] - [(A \cap C) - B]$
e. $(A \cap B) \cup [B \cap (C - A)]$
f. $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C')$
g. $[A \cap (A' \cup B)] \cup [(A \cup B') \cap B]$
h. $[(A' \cup B) \cap (B \cup C)] \cup (B' \cap C)$

Etkinlik – 2.36

$A \cap B = \{2,3,4\}$, $A \cap C = \{3,4,7\}$,

$B \cap C = \{3,4,6\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,6,7,8\}$

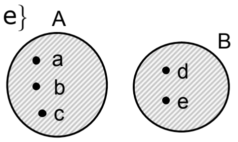
ve $B \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ olduğuna göre;

A, B, C kümelerini birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

Birleşim Kümesinin Eleman Sayısı

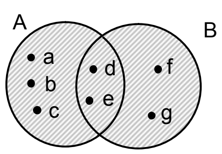
Etkinlik – 2.37

a. $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{d,e\}$ ayrık kümeleri için $A \cup B$ kümesini yazınız.



$A \cap B = \varnothing$ ise $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olduğunu gösteriniz.

b. $A = \{a,b,c,d,e\}$
$B = \{d,e,f,g\}$
kümeleri için $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini yazınız.



$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olduğunu gösteriniz.

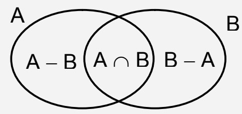
Teorem – 2.15

A ve B herhangi iki küme olmak üzere,
$\mathbf{s}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{s}(\mathbf{A}) + \mathbf{s}(\mathbf{B}) - \mathbf{s}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ *dir.*

Etkinlik – 2.38

$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ olup

$A - B$, $A \cap B$ ve $B - A$ kümelerinin ayrık olması nedeniyle

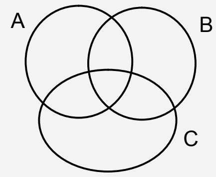


$s(A \cup B) = s(A - B) + s(A \cap B) + s(B - A)$

olacağını düşünerek Teorem –2.15'i ispatlayınız.

Etkinlik – 2.39

Yandaki Venn şemasından yararlanarak $s(A \cup B \cup C)$ sayısını veren bağıntıyı bulunuz.



Teorem – 2.16

A, B, C herhangi üç küme olmak üzere,

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = \mathbf{s}(\mathbf{A}) + \mathbf{s}(\mathbf{B}) + \mathbf{s}(\mathbf{C}) - \mathbf{s}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$
$-\mathbf{s}(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - \mathbf{s}(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + \mathbf{s}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$ *dir.*

Etkinlik – 2.40

Teorem–2.16'yı, Teorem–2.15'ten yararlanarak ispatlayınız.

Etkinlik – 2.41

A, B, C kümeleri için

$s(A \cup B) = 7$, $s(B \cup C) = 8$,

$s(A \cap B) = 1$, $s(B \cap C) = 1$ ve $s(A \cap C) = \varnothing$ dir.

Venn şemasından yararlanarak $s(A \cup B \cup C)$ sayısını bulunuz.

Alıştırmalar ve Problemler – 2.2

1. Evrensel küme $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ ve $C = \{3,5,6\}$ olduğuna göre; aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.

a. $A \cap B$ **b.** $A \cup C$ **c.** $B \setminus C$

d. $A \Delta B$ **e.** $A' \cap B'$ **f.** $B' \cup C'$

g. $A' \Delta C'$ **h.** $(A \cup B) \cap C$ **i.** $A \cup (B \cap C)$

j. $A - (B \cap C)$ **k.** $(A \cup B) - C$ **l.** $(A - B) - C$

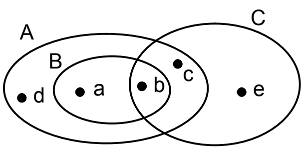
m. $B - (A - C)$ **n.** $B' - C'$ **o.** $B' - (A \cup C)$

p. $(A \cup B) - (B \cap C)$ **r.** $(A - B) \cup (B - C)$

s. $(B \Delta C)' \cap (A' - C)$ **t.** $(A - C') \cup (B' - C)$

u. $(A' \Delta B') \cup (B - C')$

2. A, B, C kümeleri Venn şeması ile verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.



a. $A \cap C$ **b.** $B \cup C$ **c.** $A - C$

d. $B \Delta C$ **e.** $A \cap (B \cup C)$ **f.** $(A \cap C) \cup B$

g. $C - (A \cap B)$ **h.** $(B \cup C) - A'$ **i.** $A - (B \cup C)'$

j. $(A - B) - C$ **k.** $B - (A \Delta C)$

l. $(A - C) \cup (A \cap B)$ **m.** $(A - B) \cup (C - B)$

n. $B' \cap (A - C')$ **o.** $A - (B - C)$

p. $(A \Delta B) - (A \Delta C)$

3. Aşağıdaki kümeleri birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

a. $A = \{a,b,c,d\}$ $B = \{c,d,e,f\}$, $C = \{d,e,f,g\}$

b. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $C = \{5,6\}$

c. $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,d\}$, $C = \{c,d,e\}$

d. $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,5,6\}$, $C = \{3,4,5,6\}$

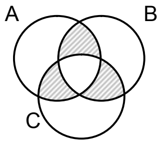
e. $A = \{a,b\}$, $B = \{c,d,e\}$, $C = \{f\}$

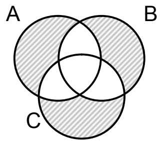
f. $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{6,8\}$

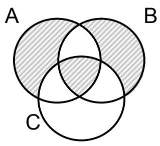
g. $A \cup B = \{1,2,3,4\}$, $A \cup C = \{1,2,4,5,6\}$
$A \cap B = \{2\}$, $B \cap C = \{\ \}$

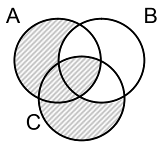
h. $A \cap B = \{a,d\}$, $A \cap C = \{d\}$, $B \cap C = \{c,d\}$
$A \cup C = \{a,c,d,e,f\}$, $B \cup C = \{a,b,c,d,e\}$

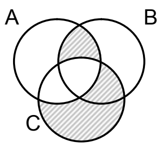
4. Aşağıdaki şemalarda taralı bölgelerle belirtilen kümeleri sembollerle gösteriniz.

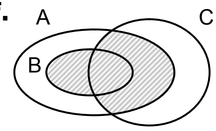
a.


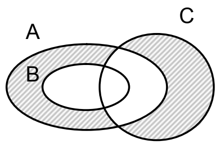
b.


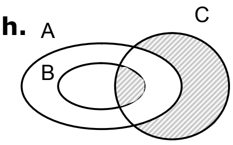
c.


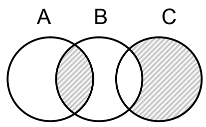
d.


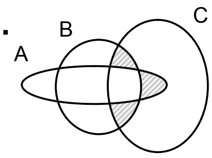
e.


f.


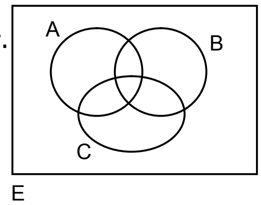
g.


h.


i.


j.


5. A, B, C kümeleri şemadaki gibi verilmiştir. Aşağıdaki kümelerin her birine karşılık gelen bölgeleri, aynı biçimde çizeceğiniz şemalar üzerinde tarayınız.



a. $(A \cup B) \cap C$ **b.** $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

c. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ **d.** $(B \cup C) - A$

e. $(A \cup C) - (B - C)$ **f.** $[A \cap (B \cup C)] \cup (B \cap C)$

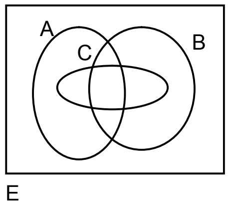
g. $(A \Delta B) - C$ **h.** $(A \cup C) \Delta B$

i. $(A \cap B)' - C'$ **j.** $(B \cup C)' \cup A$

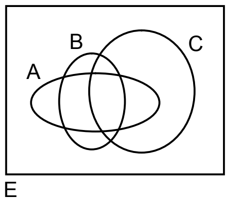
k. $[(A \cap B) - C] \cup (C - B)$

l. $[A - (B \cup C)] \cup [(B \cap C) - A]$

6. A, B, C kümeleri şemadaki gibi verilmiştir.
5. alıştırmada verilen kümelere karşılık gelen bölgeleri aynı biçimde çizeceğiniz şemalar üzerinde tarayınız.



7. A, B, C kümeleri şemadaki gibi verilmiştir.
5. alıştırmada verilen kümelere karşılık gelen bölgeleri aynı biçimde çizeceğiniz şemalar üzerinde tarayınız.



8. Aşağıda verilenlere göre, istenenleri bulunuz.

a. $A = \{a, b, c\}$ ve $B - A = \{d, e\}$ ise $A \cup B = ?$

b. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $A' \cap B = \{4\}$ ise $A \cup B = ?$

c. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$ ve $A - B = \{2\}$ ise $B - A = ?$

d. $A = \{a, b, c\}$, $A' = \{d, e, f\}$ ve $B = \{a, c, e\}$ ise $B' = ?$

9. **a.** $A \cup B = \{a, b, c\}$ ve $A \cup C = \{b, c, d\}$ ise $A \cup (B \cap C)$ kümesini yazınız.

b. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $A \cap C = \{2, 4, 5, 6\}$ ise $A \cap (B \cup C)$ kümesini yazınız.

10. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\}$ ise $A - (B \cup C)$ kümesini yazınız.

11. $A - B = \{a, b, d\}$ ve $B - C = \{c, e\}$ ise $(A \cup B) - (B \cap C)$ kümesini yazınız.

12. $A - B = \{a, b, c\}$ ve $A - C = \{b, c, d\}$ olduğuna göre,

a. $A - (B \cup C)$ kümesini yazınız.

b. $A - (B \cap C)$ kümesini yazınız.

c. $(A \cap B) \Delta (A \cap C)$ kümesini yazınız.

13. Aşağıdaki kümeleri en sade biçimde yazınız. (E evrensel kümedir.)

a. $(A \cup \varnothing) \cap (A \cup B)$

b. $(A \cap B') \cup (A \cap E)$

c. $(A \cup \varnothing) \cup (A' \cap E)$

d. $(A \cup E) \cap (A \cup B) \cap (B \cup \varnothing)$

e. $A \cap (A \cup B)$

f. $(A \cap B) \cup B$

14. Aşağıdaki kümeleri hem Venn şemasından hem de küme işlemlerinden yararlanarak en sade biçimde yazınız.

a. $(A \cap B') \cup (A \cap B)$

b. $(A \cup B') \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B)$

c. $(A \cap B) \cap (B \cup C)$

d. $A - (B - A)$

e. $A - (A - B)$

f. $(A - B) \cap (A - B')$

g. $(A - B) \cup (A' \cup B)$

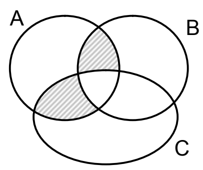
h. $[A \cup (B - A)] \cap B'$

i. $(A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A'$

j. $\left[A \cap (A \cup B)'\right] \cup (A \cap B)$

k. $[A' \cap (A \cup B)] \cup \left[A \cap (A \cup B)'\right]$

15. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$
$A \cap C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
olduğuna göre, şemadaki taralı bölgeye karşılık gelen kümeyi yazınız.



16. $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ ve $A \cup C = \{3,4,5,6,7\}$ olduğuna göre,

a. en dar C kümesini yazınız.
b. en geniş A kümesini yazınız.

17. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$ ve $A \cup B' = \{1,3,5,6,7,8,9\}$ olduğuna göre A' kümesini yazınız.

18. $A \cap B = \{1,2\}$, $A' - B = \{3,4,5\}$, $(A-B)' = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B' = \{3,4,5,7,8\}$ olduğuna göre, $A \cup B$ kümesini yazınız.

19. A ve B kümeleri için;

a. $A \cap B \neq \varnothing$, $s(A) = 7$ ve $s(B) = 9$ ise $s(A \cup B)$ en çok kaç olabilir?

b. $B \not\subset A$, $s(A) = 12$ ve $s(B) = 8$ olduğuna göre, $s(A \cup B)$ en az kaç olabilir?

c. $s(A) + s(B) = 16$ ve $s(A-B) + s(B-A) = 10$ olduğuna göre, $s(A \cup B)$ kaçtır?

d. $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $s(A \cup B) = 13$ ve $s(A \cap B) = 5$ ise s(A) en çok kaçtır?

e. $s(A) = 5$, $s(A \cap B) = 3$ ve $s(A \cup B) = 9$ ise $s(A' \cap B)$ kaçtır?

f. $s(A-B) = 8$, $s(B-A) = 3$ ve $s(A) = 3 \cdot s(A \cap B)$ ise $s(A \cup B)$ kaçtır?

g. $s(A \cap B) = 3$, $s(A \cup B) = 16$ ve $s(A) = 3 \cdot s(B-A)$ ise s(B) kaçtır?

h. $A \cap B \neq \varnothing$, $s(A) = 8$ ve $s(A \cup B) - s(A \cap B) = 12$ ise s(B) en az kaçtır?

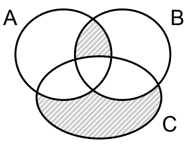
20. A, B ve C kümeleri için;

a. $s(A) = 7$, $s(B) = 9$, $s(C) = 6$, $s(A \cap B) = 3$, $s(A \cap C) = 2$ ve $s(B \cap C) = 0$ ise $s(A \cup B \cup C)$ kaçtır?

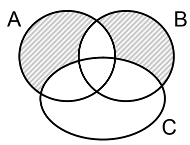
b. $s(A) = 5$, $s(B) = 6$, $s(C) = 8$, $s(A \cap B) = s(A \cap C) = 3$, $s(B \cap C) = 4$ ve $s(A \cap B' \cap C') = 2$ ise $s(A \cup B \cup C)$ kaçtır?

21. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6\}$ ve $C = \{5,6,7\}$ olduğuna göre;

a. Şemadaki taralı bölgelerin birleşimine karşılık gelen kümeyi yazınız.



b. Şemadaki taralı bölgelerin birleşimine karşılık gelen kümeyi yazınız.



22. $A = \{2,3\}$ ve $B = \{1,3,5\}$ olduğuna göre;

a. $A \cup C = B \cup C$ koşulunu sağlayan 3 elemanlı C kümesini yazınız.

b. $A \cap C = B \cap C$ koşulunu sağlayan 3 elemanlı bir C kümesi yazınız.

c. $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ koşulunu sağlayan 3 elemanlı bir C kümesi yazınız.

d. $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ koşulunu sağlayan 3 elemanlı bir C kümesi yazınız.

23. A ve B kümeleri için;
$s(A' \cup B') = 30$, $s(A' \cap B') = 10$ ve
$3 \cdot s(A-B) = 4 \cdot s(A \cap B) = 2 \cdot s(B-A)$
olduğuna göre, s(A) kaçtır?

24. $A = \{x|\ x < 400 \text{ ve } x = 4k;\ k \in Z^{+}\}$,
$B = \{x|\ x \leq 600 \text{ ve } x = 6k;\ k \in Z^{+}\}$
kümeleri veriliyor.

a. $s(A \cap B)$ kaçtır? **b.** $s(A - B)$ kaçtır?

c. $s(B - A)$ kaçtır? **d.** $s(A \cup B)$ kaçtır?

25. A ve B kümeleri için; $A' \cup B = \{3,4,5,6,7\}$ ve $A \cup B' = \{1,2,3,5,6,7\}$ olduğuna göre;

a. $B - A$ kümesini yazınız.

b. $A \Delta B$ kümesini yazınız.

26. E evrensel küme; A, B ve C birer küme olduğuna göre, aşağıdaki teoremleri ispatlayınız.

a. $A \cap (B - A) = \varnothing$

b. $A \cup (B - A) = A \cup B$

c. $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

d. $(A \Delta B) \cap A = A - B$

e. $A \subset B \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$

f. $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$

g. $(A \subset B) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$

h. $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B'$

i. $A \cup B = C \Rightarrow (A \subset C) \wedge (B \subset C)$

j. $A \cap B = C \Rightarrow (C \subset A) \wedge (C \subset B)$

k. $(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$

l. $(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Rightarrow C \subset (A \cup B)$

m. $A \subset B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$

n. $(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset C$

o. $(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \cap B) \subset C$

p. $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap D)$

q. $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup D)$

2.3 – Küme İşlemleri ile Problem Çözümü

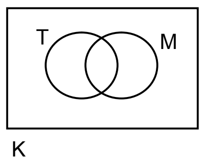
Bu kısımda küme kavramının, ilgili problemlere nasıl uygulandığını aşağıdaki etkinlikleri yaparak öğreneceksiniz.

Etkinlik – 2.42

32 kişilik sınıfta Türkçe'den geçenlerin sayısı 20, matematikten kalanların sayısı 15, bu derslerin en çok birinden geçenlerin sayısı 19'dur.

İki dersten de kalan öğrenci sayısı bulunacaktır.

Yandaki Venn Şemasında K, sınıftaki tüm öğrencilerin kümesini; T, Türkçe'den geçenlerin Kümesini; M, matematikten geçenlerin kümesini göstermektedir.



a. $s(M)$, $(T \cap M)$, $s(M - T)$, $s(T - M)$ sayılarını sırasıyla bularak ait oldukları alt kümelere karşılık gelen bölgelerin içine yazınız.

b. İki dersten de kalan öğrenci sayısını bulunuz.

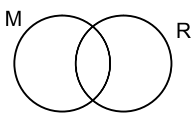
Etkinlik – 2.43

30 kişilik bir sınıfta öğrencilerden her biri müzik ve resim kurslarından en az birine katılmaktadır.

Müzik kursuna katılanların sayısı resim kursuna katılanların sayısından 4 fazla olup her iki kursa da katılan öğrenci sayısı 6'dır.

Müzik kursuna katılan öğrenci sayısı bulunacaktır.

Yandaki Venn şemasında M, müzik kursuna; R, resim kursuna katılanların kümesidir.

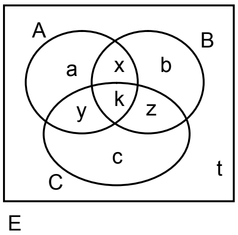


a. $s(M) = x$ diyerek, $s(R)$ yi ve $s(R - M)$ yi x türünden yazınız.

b. $s(M)$, $s(R - M)$ ve $s(M \cup R)$ arasındaki bağıntıyı kullanarak x sayısını bulunuz.

Etkinlik – 2.44

Bir sınıftaki öğrencilerin kümesi ile bu sınıfta A, B ve C derslerinden kalan öğrencilerin kümeleri yandaki Venn şemasında gösterilmiştir. Ayrık alt kümelere karşılık gelen bölgelerdeki harfler bu alt kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.



a. Yalnız bir dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

b. En çok bir dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

c. En az bir dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

d. Yalnız iki dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

e. En çok iki dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

f. En az iki dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

g. Üç dersten de kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

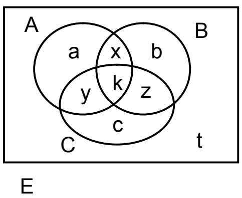
h. En çok üç dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

Etkinlik – 2.45

40 daireli bir apartmanda A, B, C gazetelerinden toplam 70 tane satılmaktadır. Gazete almayan dai-relerin sayısı ile üç gazete alan dairelerin sayısı eşittir.

En az iki gazete alan dairelerin sayısı bulunacaktır.

Yandaki Venn şemasında E dairelerin kümesini; A, B, C bu gazeteleri alan dairelerin kümelerini; a, b, c, x, y, z, k ayrık alt kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.



(Aynı türden bölgelere a, b, c, ...; x, y, z, ... gibi birbirlerini çağrıştıran harfler yazıldığına dikkat ediniz.)

$s(A\cap B\cap C)=s(A\cup B\cup C)'$ olduğundan bu kümelerin eleman sayıları aynı k harfi ile gösterilmiştir.

a. Satılan gazetelerin toplam sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

b. Dairelerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

c. En az iki gazete alan dairelerin sayısını bulunuz.

Etkinlik – 2.46

Türk ve Alman öğrencilerden oluşan bir grubun %30'u Alman, %40'ı kızdır. Alman erkeklerinin sa-yısı Türk kızlarının sayısından 3 eksik, Türk erkek-leri ile Alman kızlarının toplam sayısı 19'dur.

a. Gruptaki öğrencilerin kümesi yandaki şema ile gösterilirse; I, II, III, IV numaralı alt kümeler hangi öğrencilerden oluşur?

	Türk	Alman
Kız öğ.	I.	II.
Erkek öğ.	III.	IV.

b. Gruptaki öğrencilerin sayısını 10x ile, Türk kızlarının sayısını y ile göstererek; I, II, III, IV numaralı alt kümelerin sayılarını veren harfli ifadeleri bunlara karşılık gelen bölgelere yazınız.

c. Gruptaki öğrencilerin sayısını bulunuz.

d. Gruptaki Türk kızlarının sayısını bulunuz.

Alıştırmalar ve Problemler – 2.3

1. Hasta ziyaretine giden 12 kişilik bir grupta herkesin elinde çiçek vardır.

Bunlardan 9’unda gül, 7’sinde karanfil bulunduğuna göre kaçında hem gül hem de karanfil bulunur?

2. Bir gazete dağıtıcısı A ve B gazetelerinden 32 tanesini 23 kişiye satmıştır.

Okurlardan kaçı yalnız bir gazete almıştır?

3. Bir grupta İngilizce bilen 7 kişi, Almancı bilen 12 kişi, bu iki dili de bilen 6 kişi bulunduğuna göre, bu grup en az kaç kişidir?

4. 30 kişilik sınıfta, resim kursuna gidenlerin kümesi R, müzik kursuna gidenlerin kümesi M olmak üzere;

$s(R) = 13$, $s(M) = 16$ ve $s(R \cap M) = 8$ ise bu kurslardan hiçbirine gitmeyen öğrenci sayısı kaçtır?

5. Bir sınıftaki 32 kişiden 18’inin bisikleti, 17’sinin bilgisayarı vardır. Bunlardan;

a. en az kaçının,

b. en çok kaçının hem bisikleti, hem de bilgisayarı olabilir?

6. Bir sınıftaki öğrencilerden 17’si Matematik veya Türkçe derslerinden kalmıştır. Matematikten kalan öğrenci sayısı, Türkçeden kalan öğrenci sayısından 3 fazladır.

Öğrencilerin 4’ü hem Türkçe hem de Matematikten kaldığına göre, yalnız Matematikten kalan öğrenci sayısı kaçtır?

7. Bir sınıfın bütün öğrencileri A, B, C derslerinin en az birinden kalmıştır.

A ve B derslerinden kalan öğrenci sayısı 15, A ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 12, B ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 11 ve her üç dersten de kalan öğrenci sayısı 5 olduğuna göre, bu üç dersin yalnız ikisinden kalan öğrenci sayısı kaçtır?

8. Bir sınıfta İngilizce bilen öğrenci sayısı Almanca bilen öğrenci sayısından 7 fazladır.

İngilizce bilmeyen öğrenci sayısı 12 olduğuna göre, Almanca bilmeyen öğrenci sayısı kaçtır?

9. A veya B dilini bilenlerin oluşturduğu bir grupta yalnız A dilini bilenlerin sayısı 6, yalnız B dilini bilenlerin sayısı 8’dir.

Grubun üyelerinin sayısı, hem A hem B dillerini bilenlerin sayısının 3 katı olduğuna göre, bu grupta kaç kişi vardır?

10. A, B, C dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu bir grupta, A dilini bilenlerin her biri B dilini de bilmekte; C dilini bilmemektedir. A dilini bilenlerin sayısı 8, B dilini bilenlerin sayısı 13, C dilini bilenlerin sayısı 11, B ve C dillerinden ikisini de bilenlerin sayısı 4’tür. Buna göre, grup kaç kişidir?

11. A ve B dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu kızlı erkekli bir grupta, gözlük kullananlar vardır.

A = {A dilini bilenler};

B = {B dilini bilenler};

K = {Gruptaki kızlar};

E = {Gruptaki erkekler};

G = {Gözlük kullananlar} olduğuna göre,

{A dilini bilmeyen B dilini bilen gözlüksüz erkekler} kümesini A, B, K, E, G kümeleri ile ifade ediniz.

12. Kız veya erkek Türkler ile kız veya erkek Almanlardan oluşan bir grubun üyelerinden bir kısmı mavi gözlüdür.

K = {Gruptaki kızlar};

E = {Gruptaki erkekler};

T = {Gruptaki Türkler};

A = {Gruptaki Almanlar};

M = {Gruptaki mavi gözlüler} olduğuna göre,

{Gruptaki mavi gözlü olmayan Alman erkekler} kümesini K, E, T, A, M kümeleri ile ifade ediniz.

13. 32 kişilik bir sınıfta öğrencilerin 10'u matematikten, 6'sı fizikten kalmıştır. Bu derslerin ikisinden de geçen öğrenci sayısı, ikisinden de kalan öğrenci sayısının 5 katıdır.

Yalnız matematikten kalan öğrenci sayısı kaçtır?

14. 30 kişilik bir grupta İngilizce bilenlerin sayısı, Almanca bilenlerin sayısının 3 katıdır.

Bu grupta her iki dili bilenler 4 kişi, bu dilleri bilmeyenler 6 kişi bulunduğuna göre, yalnız İngilizce bilenler kaç kişidir?

15. Bir sınıftaki öğrencilerin % 60'ı Matematik dersinden, % 80'i Türkçe dersinden başarılı olmuştur. Her iki dersten başarılı olanların sayısı, bu iki dersten de başarısız olanların sayısından 12 fazladır.

a. İki dersten de başarılı olanların sayısı en çok kaç olabilir?

b. İki dersten de başarılı olanların sayısı en az kaçtır?

16. Bir sınıftaki öğrencilerin % 40'ı kız, % 30'u gözlüklüdür. Gözlüksüz kızların sayısı, gözlüklü erkeklerin sayısından 3 fazla olduğuna göre,

a. Sınıftaki öğrenci sayısı kaçtır?

b. Verilen bilgilerle sınıftaki gözlüklü erkek öğrencilerin sayısı bulunabilir mi?

17. 40 daireli bir apartmanda her daire A ve B gazetelerinden en çok ikisini almaktadır. A gazetesini alan daire sayısı, B gazetesini alan daire sayısından 6 fazladır.

İki gazete alanların sayısı 6, hiç gazete almayanların sayısı 12 olduğuna göre, A gazetesini alan daire sayısı kaçtır?

18. Almanca ve Fransızca dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu 15 kişilik bir grupta; Almanca bilenlerin sayısı, Fransızca bilenlerin sayısının 2 katından 2 eksik olup iki dili de bilenlerin sayısının 3 katıdır.

Bu grupta yalnız Fransızca bilenlerin sayısı kaçtır?

19. Bir sınıftaki 32 öğrenciden 18'inin bisikleti, 17'sinin bilgisayarı vardır.

Bunlardan ikisine de sahip olanların sayısı, hiçbirine sahip olmayanların sayısının 2 katı olduğuna göre, ikisine de sahip olanların sayısı kaçtır?

20. Bir sınıftaki 28 öğrencide kurşun kalem ve tükenmez kalemden en az biri bulunmaktadır. Kurşun kalemi bulunanların sayısı, tükenmez kalemi bulunanların sayısından 4 fazla olup hem kurşun hem tükenmez kalemi bulunanların sayısı, yalnız tükenmez kalemi bulunanların sayısına eşittir.

Yalnız kurşun kalemi bulunanlar kaç kişidir?

21. Bir sınıftaki öğrencilerin % 75'i müzik kursuna, % 60'ı resim kursuna, % 40'ı hem müzik hem resim kursuna gitmektedir.

2 öğrenci bu kursların hiçbirine gitmediğine göre, yalnız müzik kursuna giden öğrenci sayısı kaçtır?

22. Almanca ve İngilizce dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu bir grubun $\frac{3}{4}$ ü Almanca, $\frac{2}{3}$ ü İngilizce bilmektedir.

Yalnız Almanca bilenlerin sayısı 16 olduğuna göre, yalnız İngilizce bilenlerin sayısı kaçtır?

23. 12 Türk ve 8 Almandan oluşan bir grupta 9 kadın vardır.

Türk kadınların sayısı, Alman erkeklerin sayısından kaç fazladır?

24. Bir köydeki evlerin % 45'inde televizyon, % 50'sinde telefon bulunmaktadır. hem televizyonu hem telefonu olan ev sayısı 16'dır. Telefonu olan ev sayısı, televizyonu olan ev sayısından 4 fazladır.

a. Köyde kaç ev vardır?

b. Kaç evde televizyon da, telefon da yoktur?

25. 40 kişilik bir sınıfta;

A dersinden kalan öğrenci sayısı 20,

B dersinden kalan öğrenci sayısı 23,

C dersinden kalan öğrenci sayısı 27,

A ve B derslerinden kalan öğrenci sayısı 12,

A ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 13,

B ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 15'tir.

Bu derslerin üçünden de geçen öğrenci sayısı 2 olduğuna göre, üçünden de kalan öğrenci sayısı kaçtır?

26. Piyano, gitar ve kemandan en az birini çalabilenlerin oluşturduğu bir toplulukta,

piyano ve gitar çalabilen 7 kişi,

gitar ve keman çalabilen 6 kişi,

piyano ve keman çalabilen 5 kişi,

piyano veya gitar çalabilen 21 kişi,

gitar veya keman çalabilen 19 kişi,

piyano veya keman çalabilen 18 kişi bulunmaktadır.

Bunların üçünü de çalabilen 4 kişi bulunduğuna göre, toplulukta kaç kişi vardır?

27. Bir sınıfta A dersinden kalan öğrencilerin hepsi B veya C dersinden de kalmıştır. Hem B hem C dersinden kalan öğrenci yoktur.

Öğrencilerin

8'i yalnız B dersinden,

7'si yalnız C dersinden,

% 50'si B dersinden kalmış;

% 20'si bu üç dersten geçmiştir.

B dersinden kalan öğrenci sayısı, C dersinden kalan öğrenci sayısından 6 fazla olduğuna göre; A dersinden kalan öğrenci sayısı kaçtır?

28. Bir yazarlar grubunda roman yazmayanların sayısı 16, şiir yazmayanların sayısı 14, deneme yazmayanların sayısı 16 dır.

Bu türlerden yalnız birini yazanların sayısı 11, en az ikisini yazanların sayısı 13 olduğuna göre; bu türlerden yazmayanların sayısı en az kaçtır?