Koordinat Sistemleri

Dik koordinat sisteminde vektörler

Vektörleri –geometrik bir kavram olarak– 9. sınıfta **koordinat doğrusu**nda ve **koordinat düzlemi**nde tanımıştınız.

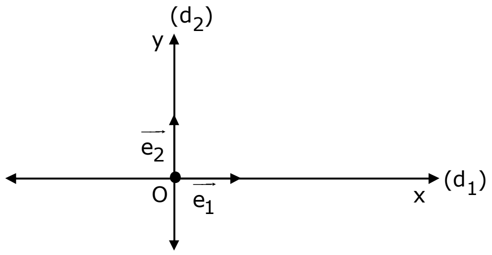
3. bölümde **sentetik** olarak ele aldığımız **vektörler**i, bu bölümde yeniden **koordinat sistemi**ne yerleştireceğiz.

Tanım – 4.1

Düzlemde birbirine dik $\overrightarrow{\mathbf{e_1}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{e_2}}$ *birim vektörleri verilmiş olsun.* $\overrightarrow{\mathbf{e_1}}$ *ile* $\overrightarrow{\mathbf{e_2}}$ *vektörlerinin taşıyıcıları* $\mathbf{d_1}$ *ile* $\mathbf{d_2}$ *doğruları ve* $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ *ise,* $\left(\mathbf{O};\overrightarrow{\mathbf{e_1}},\overrightarrow{\mathbf{e_2}}\right)$ *üçlüsüne düzlemin* ***dik koordinat sistemi*** *denir. O noktası bu sistemin* ***orijini*** *ya da* ***başlangıç noktası****dır. Koordinat sistemi ile donatılmış düzleme* ***koordinat düzlemi*** *ya da* ***analitik düzlem*** *adı verilir.*

Genellikle; d_1 *doğrusu* ***x ekseni****,* d_2 *doğrusu* ***y ekseni*** *diye adlandırılır.*

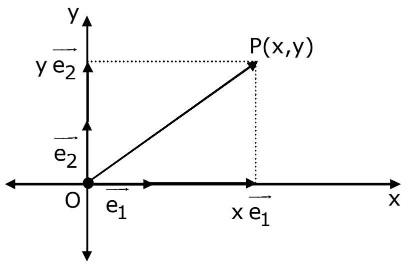
Aşağıdaki şekil, $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ koordinat sisteminin sayfamıza çizdiğimiz **model**idir. Bu durumda sayfamız da **analitik düzlem**in bir parçasının **modeli** olur.



(d_1,d_2) düzleminde her $\overrightarrow{OP}$ vektörü, doğrusal bağımsız $\overrightarrow{e_1}$ ve $\overrightarrow{e_2}$ vektörleri türünden ifade edilebilir.

$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ gibi.

x ve y sayılarının, P noktasının koordinatları olduğu açıktır.



Buna göre; düzlemin her P noktası, orijinden P'ye yönlenmiş bir vektörü temsil eder.

Bir (x,y) ikilisinin P noktasına ait olduğu P(x,y) biçiminde gösterilir. (x,y) ikilisinin $\overrightarrow{OP}$ ya da $\vec{P}$ vektörünü gösterdiği $\overrightarrow{OP} = (x,y)$ ya da $\vec{P} = (x,y)$ eşitliği ile belirtilir.

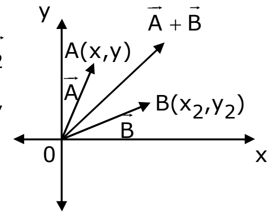
$x,\ y \in R$ ise $(x,y) \in RXR$ veya $(x,y) \in R^2$ olduğunu 9. sınıftan biliyorsunuz.

O halde; düzlemdeki vektörlerin kümesi V ise, $V = R^2$ diyebiliriz.

Etkinlik – 4.1

$\vec{P} = (x,y) \Leftrightarrow \vec{P} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$

olduğunu dikkate alarak,



a. $\vec{A} = (x_1,y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2,y_2)$ ise $\vec{A}+\vec{B} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ olduğunu gösteriniz.

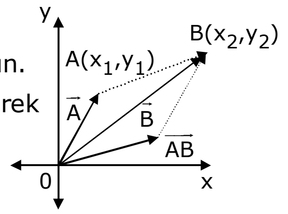
b. $k \in R$ olmak üzere; $\vec{M} = (x,y)$ ise $k\vec{M} = (kx,ky)$ olduğunu gösteriniz.

c. $\vec{A} = (-3,1)$, $\vec{B} = (2,-4)$, $\vec{C} = (1,-5)$ olduğuna göre, $\vec{A}+2\vec{B}-\vec{C}$ vektörünü bulunuz.

Not: Bu denemede, öğrencinin tam olarak işe ortak olmasının gerektiği düşünülen tüm çalışmalara **etkinlik** adı verildi.

Etkinlik – 4.2

a. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilmiş olsun. Yandaki şekli inceleyerek $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ olduğunu gösteriniz.



b. $A(-2,1)$ ve $B(2,-2)$ ise $\overrightarrow{AB}$ nü bulunuz.

■ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ ise, $\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçasına $\overrightarrow{AB}$'nün **yer vektörü** ya da **konum vektörü** denir.

Etkinlik – 4.3

a. $\vec{P} = (x, y)$ ise

$$|\vec{P}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olduğunu gösteriniz.

b. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ ise $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ olduğunu gösteriniz.

c. $A(-3,4)$ ve $B(1,-4)$ ise $\overrightarrow{AB}$ kaç birimdir?

Etkinlik – 4.4

a. $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vektörleri doğrusal bağımlı ise $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ olduğunu gösteriniz.

b. $\vec{u} = (m+1, -2)$ ve $\vec{v} = (1-m, 1)$ vektörleri doğrusal bağımlı ise m kaçtır?

Etkinlik – 4.5

$\vec{A} = (-3,1)$, $\overrightarrow{AB} = (-2,3)$, $\overrightarrow{BC} = (1,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C}$ toplamını bulunuz.

b. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA}$ ise $\vec{P}$'nü bulunuz.

c. $\overrightarrow{AR} + 2\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{BR}$ ise $\vec{R}$'nü bulunuz.

Etkinlik – 4.6

$\overrightarrow{AB} = (-1,2), \vec{B} = (3,-1), \vec{C} = (-2,4)$
$\overrightarrow{CD} = (k, 2-k)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{A}$ ile $\overrightarrow{CD}$ doğrusal bağımlı olduğuna göre, $\overrightarrow{AD}$'nü bulunuz.

b. $\vec{A} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$ eşitliğini sağlayan x ve y kat sayılarını bulunuz.

c. $x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = 0$ eşitliğini sağlayan en sade x, y, z tam sayılarını bulunuz.

d. A, B, D noktaları doğrusal ise k kaçtır?

Etkinlik – 4.7

$(-2,-3)$, $(1,-1)$, $(3,2)$ noktalarının, bir paralelkenarın köşelerinden 3'ü olduğu biliniyor. 4. köşe olabilecek noktaları bulunuz.

Etkinlik – 4.8

$\vec{A} = (-2,1)$ ve $\overrightarrow{AB} = (3,6)$ vektörleri veriliyor.

a. $\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{1}{2}$ olduğuna göre $\vec{E}$'nü bulunuz.

b. $\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FB}} = \frac{3}{2}$ olduğuna göre $\vec{F}$'nü bulunuz.

c. E ve F noktalarını AB doğrusu üzerinde gösteriniz.

Vektörlerin iç çarpımı

■ Düzlemdeki vektörlerin kümesi V;

$\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{v} = (x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{x_1x_2 + y_1y_2}$$

eşitliği ile tanımlanan işleme, $\vec{\mathbf{u}}$ ve $\vec{\mathbf{v}}$ vektörlerinin **Öklid iç çarpımı** adı verilir. İşlem sonucunun $x_1x_2 + y_1y_2$ gibi bir gerçel sayı olması nedeniyle, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ işlemin $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin **skaler çarpımı** da denir. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ işlemi, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ sembolü ile de gösterilir.

Etkinlik – 4.9

$\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ve $\vec{c} = (x_3, y_3)$ vektörlerini kullanarak;

a. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

b. $(k\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = k\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c};\ k \in R$

c. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + k\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{a} \cdot \vec{c};\ k \in R$

d. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ olduğunu gösteriniz.

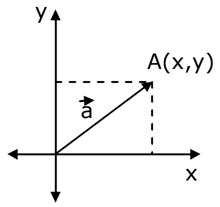
Vektörün normu

Etkinlik – 4.10

$\vec{a} = (x, y)$ vektörünü kullanarak,

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ olduğunu

gösteriniz.



■ $\vec{a} \cdot \vec{a}$ çarpımının pozitif karekökü $\vec{a}$'nün **norm**u olarak tanımlanır.

$\vec{a}$'nün normu $\|\vec{a}\|$ sembolü ile gösterilir. Buna göre, $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ dır.

Norm terimi **uzunluk** teriminden daha kapsamlıdır. 1, 2 ve 3 boyutlu uzaylarda bu terimler aynı anlama gelir. Ancak; ileride öğreneceğiniz -geometrik karşılığı olmayan- 3'ten fazla boyutlu uzaylarda **uzunluk** terimi değil, **norm** terimi geçerlidir.

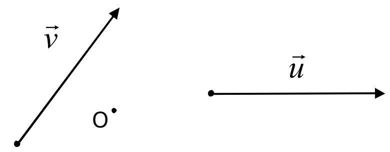
Buradan sonraki işlemlerimizde $[AB]$'nın uzunluğunu $|AB|$ ile, $\overline{AB}$'nün normunu $\|\overline{AB}\|$ ile göstereceğiz.

İç çarpımın açı türünden ifadesi

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin belirttiği açının ölçüsü α ise, $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{v}}\| \cdot \mathbf{cos}\alpha$ dır.

İç çarpım kavramı, açı türünden ifadesi ile, daha geniş uygulama alanları bulacağı açıktır.

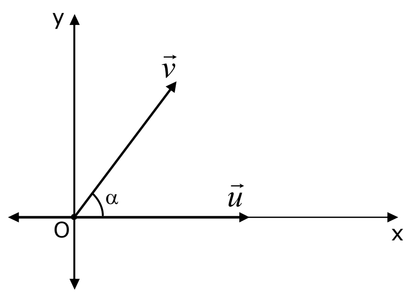
Bunu ispatlayalım:



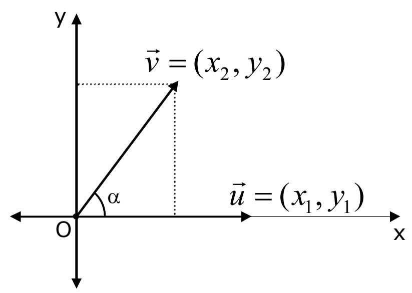
Düzlemde $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri ile bir O noktası şekildeki gibi verilmiş olsun.

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin taşıyıcılarının belirttiği dar açının ölçüsüne α diyelim.

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerini O noktasına taşıyalım. $\vec{u}$ vektörünü taşıyan doğruyu x ekseni, O noktasından x eksenine çizilen dik doğruyu y ekseni olarak alalım.



Bu koordinat sisteminde $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{v} = (x_2, y_2)$ olsun.



Şekilden; $x_1 = |\vec{u}|$, $y_1 = 0$, $x_2 = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$ ve $y_2 = |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$ olarak bulunur.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

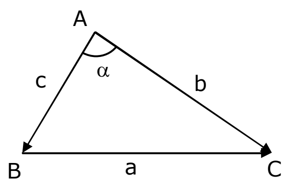
$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha + 0 \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

eşitliği ispatlanmış olur.

Uygulama

Bir üçgenin iki kenarının uzunluğu ile bunların belirttiği açının ölçüsü verildiğinde, üçüncü kenarın uzunluğunun bulunması (Kosinüs Teoremi)



$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Etkinlik – 4.11

a. $\vec{a} = (-1,2)$ ve $\vec{b} = (3,4)$ vektörleri arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

b. $\vec{a} = (-4,2)$, $\vec{b} = (k,-6)$ ve $\vec{a} \perp \vec{b}$ ise k kaçtır?

Etkinlik – 4.12

$\vec{a} = (2,-3)$, $\vec{b} = (-1,1)$ ve $\vec{c} = (1,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{a} + k\vec{b}$ ile $\vec{c}$ birbirine dik ise k kaçtır?

b. $\vec{a} + t\vec{b}$ ile $\vec{c}$ doğrusal bağımlı ise t kaçtır?

Etkinlik – 4.13

ABC dik üçgeninin B dik açı köşesi x ekseni üzerindedir. $A = (-1,2)$ ve $C = (4,3)$ olduğuna göre, B köşesi olabilecek noktaları bulunuz.

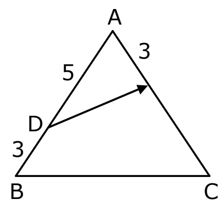
Etkinlik – 4.14

ABC üçgeni eşkenardır.
$|AD| = 5$ birim,

$|AE| = 3$ birim ve

$|BD| = 3$ birim ise

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC}$ kaçtır?



Etkinlik – 4.15

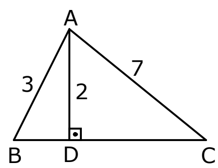
ABC üçgeninde,

$AD \perp BC$, $|AB| = 3$ birim,

$|AD| = 2$ birim ve

$|AC| = 7$ birim ise

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ kaçtır?



Etkinlik – 4.16

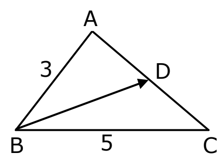
ABC üçgeninde

$|AD| = |DC|$ dir.

$|AB| = 3$ birim ve

$|BC| = 5$ birim ise

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DA}$ kaçtır?



Etkinlik – 4.17

$\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 3$ ve $\vec{a} + 2\vec{b} = (-3,-4)$ olduğuna göre, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kaçtır?

Etkinlik – 4.18

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ birim vektörleri arasındaki açı 60° dir.
$\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ve $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$ olduğuna göre, $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

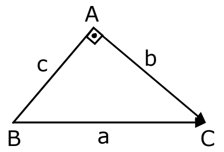
Etkinlik – 4.19

ABC dik üçgeninde;

$|AB| = c$, $|AC| = b$,

$|BC| = a$ ve

$AB \perp AC$ olsun.



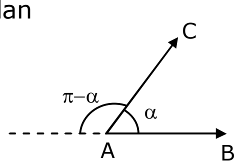
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ eşitliğini kullanarak $a^2 = b^2 + c^2$ (Pisagor Bağıntısı) olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 4.20

İki vektörün iç çarpımından yararlanarak,

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

olduğunu gösteriniz.



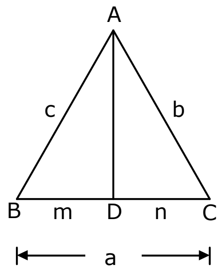
($\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AC}$'nün belirttiği açının ölçüsü α ise, $\overrightarrow{BA}$ ile $\overrightarrow{AC}$'nün belirttiği açının ölçüsü $\pi - \alpha$ 'dır.)

Etkinlik – 4.21

ABC üçgeninde,

$|AB| = c$, $|AC| = a$,

$|BD| = m$ ve $|DC| = n$ olsun.



a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$
olduğunu gösteriniz.

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ olduğunu gösteriniz.
(a'daki eşitlikten yararlanınız.)

c. $|AD|^2 = \dfrac{mb^2 + nc^2}{a} - m \cdot n$ olduğunu gösteriniz.

[$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{m}{a}\overrightarrow{BC}$

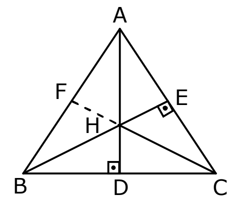
$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{m}{a}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{m}{a}\overrightarrow{BC}\right)$

sağ tarafı açınız.]

d. $b = 9$ birim, $c = 12$ birim, $m = 4$ birim ve $n = 2$ birim ise $|AD|$ kaç birimdir?

Etkinlik – 4.22

Herhangi bir üçgende yükseklikler aynı noktada kesişirler. İspatlayınız.

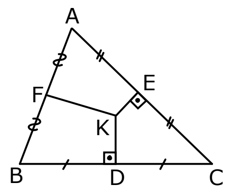


(ABC üçgeninde $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ ve $AD \cap BE = \{H\}$ olsun.

$AH \perp BC$ ve $BH \perp AC$ önermelerinin $CH \perp AB$ önermesini gerektirdiğini göstermelisiniz. Bu da, $\overrightarrow{AH}$ ve $\overrightarrow{BH}$'ın $\overrightarrow{CH}$ türünden ifade edilmesini akla getirmiyor mu?)

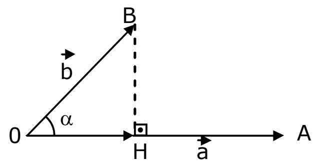
Etkinlik – 4.23

Bir üçgende kenar orta dikmelerinin aynı noktada kesişeceğini gösteriniz.



Bir vektörün başka bir vektör üzerine dik izdüşümü

■



$H \in OA$, $BH \perp OA$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ise $\overrightarrow{OH}$ ne $\vec{b}$ nün $\vec{a}$ üzerine **dik izdüşüm vektörü** denir. Bu izdüşüm vektörü $\mathbf{b}_{\vec{a}}$ ile de gösterilebilir.

$\overset{\Delta}{BOH}$ inde, $\|\overrightarrow{OH}\| = \|\vec{b}\| \cdot \cos\alpha$ olduğunu görünüz.

$\vec{a}$ doğrultusundaki birim vektör $\overrightarrow{u_a}$ olsun.

$\|\overrightarrow{u_a}\| = 1$ olduğundan

$\|\overrightarrow{OH}\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\overrightarrow{u_a}\| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \|\overrightarrow{OH}\| = \vec{b} \cdot \overrightarrow{u_a}$ yazılabilir.

$\left\|\overrightarrow{OH}\right\| = \left\|\overrightarrow{OH}\right\| \cdot \overrightarrow{u_a}$,

$\overrightarrow{u_a} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ ve $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{b_a}$ olduğuna göre;

$\left\|\overrightarrow{OH}\right\| = \left(\vec{b} \cdot \overrightarrow{u_a}\right) \cdot \overrightarrow{u_a}$ $\quad \Rightarrow \vec{b}_{\vec{a}} = \vec{b} \cdot \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

$\Rightarrow \vec{b}_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$ $\quad \Rightarrow \vec{b}_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \cdot \vec{a}$ bulunur.

Etkinlik – 4.24

$\vec{a} = (2,6)$, $\vec{b} = (4,2)$, $\vec{c} = (-4,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ doğrultuları ve yönlerindeki $\overrightarrow{u_a}$, $\overrightarrow{u_b}$ ve $\overrightarrow{u_c}$ birim vektörlerini bulunuz.

b. $\vec{a}$'nün $\vec{b}$ üzerindeki, $\overrightarrow{a_b}$ dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\overrightarrow{a_b}$ vertörlerini koordinat sisteminde gösteriniz.

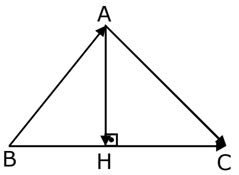
c. $\vec{b}$'nün $\vec{a}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

d. $\vec{c}$'nün $\vec{a}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

e. $\vec{b}$'nün $\vec{c}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

$\vec{b}$, $\vec{c}$ ve $\overrightarrow{b_c}$ vektörlerini koordinat sisteminde gösteriniz.

Etkinlik – 4.25



$\overset{\Delta}{ABC}$ 'inde,

$H \in [BC]$ ve

$AH \perp BC$'dir.

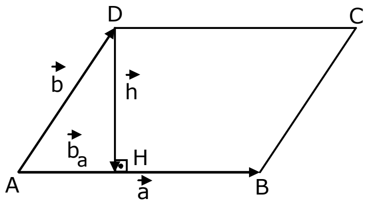
$\overrightarrow{BA} = (3,4)$ ve $\overrightarrow{BC} = (6,3)$ olduğuna göre;

a. $\overrightarrow{BH}$'nü bulunuz.

b. $\overrightarrow{AH}$'nü bulunuz.

Paralelkenarın ve üçgenin alanı

Etkinlik – 4.26



ABCD paralelkenarında, $H \in [AB]$ ve $DH \perp AB$ dir.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DH} = \vec{h}$ verilmiştir.

a. $\vec{b}$'nün $\vec{a}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünün

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{b_a} = \left(\vec{b} \cdot \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right) \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ olduğunu biliyorsunuz.

$\vec{h} = -\vec{b} + \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a}$ olduğunu gösteriniz.

b. $\|\vec{h}\| = \sqrt{\|\vec{b}\|^2 - \dfrac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2}{\|\vec{a}\|^2}}$ olduğunu gösteriniz.

c. Bir paralelkenarın alanının ölçüsünün, taban uzunluğu ile bu tabana ait yükseklik uzunluğunun çarpımına eşit olduğunu biliyorsunuz.

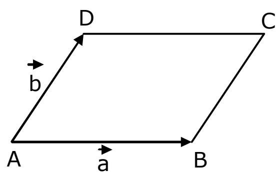
$A(ABCD) = |AB| \cdot |DH|$

$\Rightarrow A(ABCD) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{h}\|$ eşitliğini kullanarak

$A(ABCD) = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2}$ (1)

olduğunu gösteriniz.

d. $\vec{a} = (4,2)$ ve $\vec{b} = (1,3)$ ise c'de bulduğunuz formülü kullanarak ABCD paralelkenarının alanının ölçüsünü bulunuz.



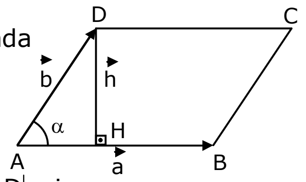
e. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\alpha$ eşitliğini kullanarak,

$$A(ABCD)=\sqrt{\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\quad(1)$$

formülünden

$A(ABCD)=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\alpha$ (2) formülünü elde ediniz.

ABCD paralelkenarında



$|DH|=|AD|\cdot\sin\alpha$,

$A(ABCD)=|AB|\cdot|DH|$

$\Rightarrow A(ABCD)=|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\alpha$

olduğunu 8. sınıf bilgilerinizle bulabilirdiniz.

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}\Rightarrow|AB|=\|\vec{a}\|$ ve $\overrightarrow{AD}=\vec{b}\Rightarrow|AD|=\|\vec{b}\|$

diyerek $A(ABCD)=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\alpha$ elde edilebilirdi.

Yine de; yalnız vektör bilgilerimizi kullanarak (2) formülünü elde edebilmeniz size de ilginç gelmedi mi?

f. ABCD paralelkenarında

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(4,-2)$ ve $\overrightarrow{AD}=\vec{b}=(6,2)$ ise paralelkenarın alanını $A(ABCD)=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\alpha$ formülü ile bulunuz.

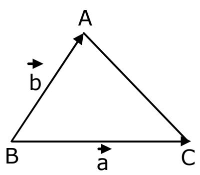
Bunun için, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\alpha$ eşitliğinden $\cos\alpha$ değerini, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ eşitliğinden de $\sin\alpha$ değerini bulmalısınız.

g. Bir paralelkenarda bir köşegen eşit alanlı iki üçgensel bölge ayırır.

Buna göre;

$\vec{a}=(3,-4)$ ve

$\vec{b}=(8,6)$ ise

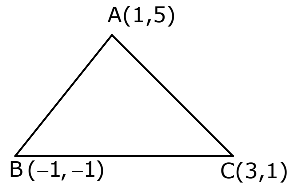


$\overset{\Delta}{ABC}$ inin alanının ölçüsünü hem (1), hem (2) formülü ile ayrı ayrı hesaplayınız.

h. $A(1,5)$, $B(-1,-1)$

ve $C(3,1)$

olduğuna göre



$\overset{\Delta}{ABC}$ inin alanının ölçüsünü hem (1), hem (2) formülü ile ayrı ayrı hesaplayınız.

Alıştırmalar ve Problemler – 4.1

1. $\vec{A}=(-2,3)$, $\vec{B}=(3,-1)$, $\vec{C}=(-4,2)$, $\overrightarrow{CD}=(1,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{A}+2\vec{B}-\vec{C}$ toplamını bulunuz.

b. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{CD}$ ise $\vec{P}$'nü bulunuz.

c. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AR}$ ise $\vec{R}$'nü bulunuz.

d. $\overrightarrow{AS}-2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SC}$ ise $\vec{S}$'nü bulunuz.

2. $\overrightarrow{AB}=(3,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,1)$, $\vec{C}=(2,-3)$, $\overrightarrow{CD}=(k,2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini bulunuz.

b. $\overrightarrow{AB}=x\vec{A}+y\vec{B}$ eşitliğini sağlayan x ve y kat sayılarını bulunuz.

c. $\vec{C}$ ve $\vec{D}$ doğrusal bağımlı ise k kaçtır?

d. $x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}=0$ eşitliğini sağlayan en sade x, y, z tam sayılarını bulunuz.

e. $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}$ eşitliğini sağlayan x ve y kat sayılarını bulunuz.

f. A, B, D noktaları doğrusal ise k kaçtır?

3. $\vec{A}=-3\vec{e_1}+4\vec{e_2}$ ve $\vec{B}=2\vec{e_1}-6\vec{e_2}$ vektörleri veriliyor.

a. $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}=\dfrac{-2}{3}$ olduğuna göre, $\vec{C}$'nü bulunuz.

b. $\dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}=2$ olduğuna göre, $\vec{D}$'nü bulunuz.

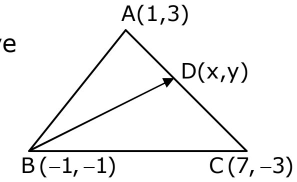
c. C ve D noktalarını AB doğrusu üzerinde gösteriniz.

4. $A(-3,4)$, $B(2,m)$, $C(-1,m-3)$ ve $D(n,m+2)$ noktaları veriliyor.

a. A, B, C doğrusal ise m kaçtır?

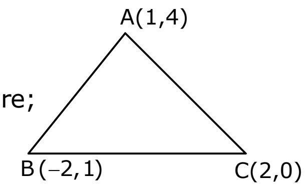
b. $[AD]$'nın orta noktası B ise m ve n kaçtır?

5. ABC üçgeninde $A(1,3)$, $B(-1,-1)$ ve $C(7,-3)$ veriliyor. $|DC| = 2|AD|$ ise $\overrightarrow{BD}$'nü bulunuz.



6. $H(1,2)$, $m(3,-1)$ ve $k(4,3)$ noktaları bir üçgenin kenarlarının orta noktalarıdır.
Üçgenin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

7. $A\overset{\Delta}{B}C$'inde $A(1,4)$, $B(-2,1)$ ve $C(2,0)$ olduğuna göre; $\cos\hat{A}$, $\cos\hat{B}$ ve $\cos\hat{C}$ sayılarını bulunuz.



8. $2\vec{a}+\vec{b}=(1,6)$ ve $3\vec{a}-2\vec{b}=(-9,16)$ olduğuna göre, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini bulunuz.

9. $\vec{v}=(1,7)$ vektörünün $\vec{a}=(2,-1)$ ve $\vec{b}=(-1,3)$ doğrultularındaki bileşenleri $\overrightarrow{v_a}$ ve $\overrightarrow{v_b}$ olduğuna göre $\overrightarrow{v_a}\cdot\overrightarrow{v_b}$ kaçtır?

10. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ birim vektörler olup aralarındaki açı $45°$ dir.

a. $\vec{A}=2\sqrt{2}\vec{a}-4\vec{b}$ ise $\|\vec{A}\|$ kaçtır?

b. $\vec{B}=2\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}$ ise $\|\vec{B}\|$ kaçtır?

c. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

11. $\vec{a}$ vektörü $\vec{u}=(1,-2)$ ile; $\vec{b}$ vektörü $\vec{v}=(-2,3)$ doğrusal bağımlıdır. $\vec{a}-2\vec{b}=(-11,+6)$ olduğuna göre, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini bulunuz.

12. $\vec{a}=(3,-1)$, $\vec{b}=(2,1)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{a}+k\vec{b}$ ile $\vec{c}$ vektörleri doğrusal bağımlı ise k kaçtır?

b. $2\vec{a}+k(\vec{a}+\vec{b})$ ile $t\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ vektörleri doğrusal bağımlı ise k kaçtır?

13. $\|\vec{a}\|=4$, $\|\vec{b}\|=2$ ve $\vec{a}-2\vec{b}=(2\sqrt{3},-2)$ olduğuna göre;

a. $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açı kaç derecedir?

b. $\vec{a}+\vec{b}$ ile $\vec{a}-\vec{b}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

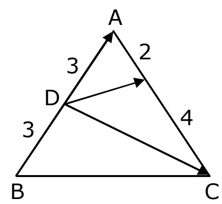
14. $\|\vec{a}\|=6$, $\|\vec{b}\|=4$ ve $\|\vec{a}+\vec{b}\|=8$ olduğuna göre;

a. $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

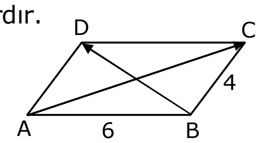
b. $\vec{a}+\vec{b}$ ile $\vec{a}-\vec{b}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

c. $\vec{a}-2\vec{b}$ ile $\vec{a}$ arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

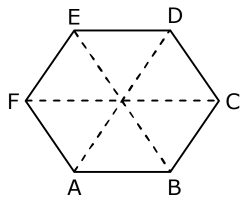
15. $A\overset{\Delta}{B}C$ eşkenardır. $|AD|=|DB|=3$ birim, $|AE|=2$ birim ve $|EC|=4$ birim ise $(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{DC}$ kaçtır?



16. ABCD paralelkenardır. $|AB|=6$ birim ve $|BC|=4$ birim ise $\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})$ kaçtır?



17. ABCDEF bir kenar uzunluğu 6 birim olan bir düzgün altıgendir.



a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ kaçtır?

b. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{EF}$ kaçtır?

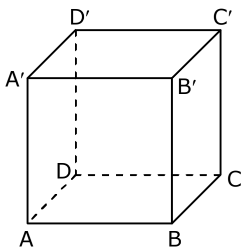
c. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\right)$ kaçtır?

d. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ kaçtır?

e. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ kaçtır?

f. $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}$ kaçtır?

18. ABCDA′B′C′D′ birim küptür.



a. $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{BC'}$ kaçtır?

b. $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC}$ kaçtır?

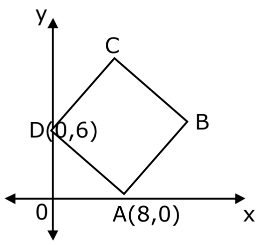
c. $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}$ kaçtır?

d. $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{BD'}$ kaçtır?

e. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)$ kaçtır?

f. $\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A'C}\right)\cdot\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{AC'}\right)$ kaçtır?

19. ABCD karedir.
$A(8,0)$,
$D(0,6)$
olduğuna göre;



a. $\vec{A}\cdot\overrightarrow{BC}$ kaçtır?

b. $\vec{B}\cdot\overrightarrow{CD}$ kaçtır?

c. $\vec{A}\cdot\overrightarrow{BD}$ kaçtır?

d. $\vec{B}\cdot\overrightarrow{AC}$ kaçtır?

e. $\left(\vec{A}+\vec{D}\right)\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$ kaçtır?

f. $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}+\vec{D}\right)$ kaçtır?

Bu soruları, üçgenlerin eşliğinden yararlanarak B ve C noktalarının koordinatlarını bulup kolayca cevaplayabilirsiniz. Bir de B ve C'nin koordinatlarını bulmadan yapmaya çalışınız.

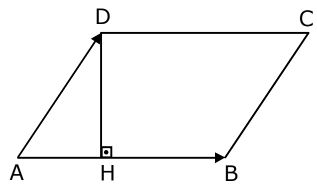
20. $\vec{a}=(-6,3)$, $\vec{b}=(4,2)$ ve $\vec{c}=(6,-2)$ vektörleri veriliyor.

a. $\vec{b}$'nün $\vec{c}$ üzerindeki $\overrightarrow{b_c}$ dik izdüşüm vektörünü bulunuz. $\vec{b}$, $\vec{c}$ ve $\overrightarrow{b_c}$'nü koordinat sisteminde gösteriniz.

b. $\vec{c}$'nün $\vec{b}$ üzerindeki $\overrightarrow{c_b}$ dik izdüşüm vektörünü bulunuz. $\vec{c}$, $\vec{b}$ ve $\overrightarrow{c_b}$'nü koordinat sisteminde gösteriniz.

c. $\vec{a}$'nün $\vec{b}$ üzerindeki $\overrightarrow{a_b}$ dik izdüşüm vektörünü bulunuz. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\overrightarrow{a_b}$'nü koordinat sisteminde gösteriniz.

21. ABCD paralelkenarında
$H\in[AB]$ ve
DH ⊥ AB'dir.
$\overrightarrow{AB}=(10,5)$ ve
$\overrightarrow{AD}=(2,6)$
olduğuna göre;



a. $\overrightarrow{AH}$'nü bulunuz.

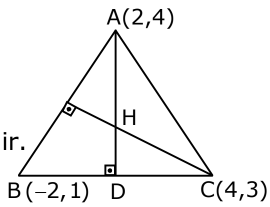
b. $\overrightarrow{DH}$'nü bulunuz.

c. a ve b de bulduklarınızı kullanarak A(ABCD) değerini bulunuz.

d. $A(ABCD)=\sqrt{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2}$ formülünü kullanarak A(ABCD) değerini bulunuz.

e. $A(ABCD)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\sin\alpha$ formülünü kullanarak A(ABCD) değerini bulunuz.

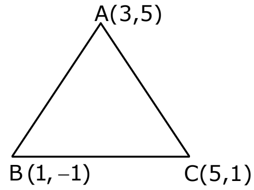
22. $\overset{\Delta}{ABC}$ inde
$D\in[BC]$, $E\in[AB]$,
AD ⊥ BC, CE ⊥ AB
ve $AD\cap CE=\{H\}$'dir.
$A(2,4)$,
$B(-2,1)$ ve $C(4,3)$ olduğuna göre;



a. $\overrightarrow{AD}$'nü bulunuz. **b.** $\overrightarrow{CE}$'nü bulunuz.

c. H noktasının koordinatlarını bulunuz.

23. $\overset{\Delta}{ABC}$'inde
$A(3,5)$, $B(1,-1)$
ve $C(5,1)$ dir.



a. $A(\overset{\Delta}{ABC}) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}\right)^2}$

formülünden yararlanarak açgenin alanını bulunuz.

b. $A(\overset{\Delta}{ABC}) = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$

formülünden yararlanarak üçgenin alanını bulunuz.

c. Köşelerin koordinatlarından yararlanarak üçgenin alanını bulunuz.

24. Aşağıda köşelerinin koordinatları verilen üçgenlerin alanlarını, bu koordinatlardan yararlanarak bulunuz.

a. $A(-1,4)$, $B(-1,-2)$, $C(3,5)$

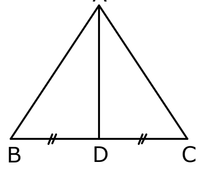
b. $A(1,5)$, $B(-1,1)$, $C(5,1)$

c. $A(3,5)$, $B(-2,1)$, $C(4,-1)$

d. $A(-3,+6)$, $B(1,2)$, $C(3,4)$

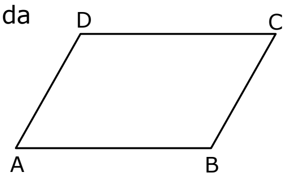
! Taslak üçgenleri koordinat sisteminde çizmenize gerek yoktur. Zihninizdeki koordinat sisteminin x ekseninin defterinizin alt kenarına, y ekseninin de yan kenarına paralel olacağını dikkate almanız yeter.

25. $\overset{\Delta}{ABC}$'inde
$|AB| = |AC|$ ve
$|BD| = |DC|$ ise
$AD \perp BC$ olduğunu,
vektör bilginizle ispatlayınız.

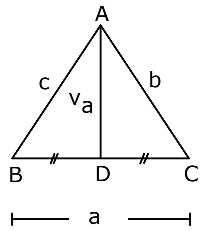


26. Bir eşkenar dörtgende köşegenlerin birbirine dik olduğunu, vektör bilginizle ispatlayınız.

27. ABCD paralelkenarında
$|AB| = a$, $|BC| = b$,
$|AC| = e$, $|BD| = f$,
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ve
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ vektörlerinden yararlanarak,
$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$ olduğunu gösteriniz.



28. $\overset{\Delta}{ABC}$'inde
$[AD]$ kenarortay,
$|AD| = v_a$,
$|BC| = a$, $|AC| = b$,
$|AB| = c$ olsun.



$\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ eşitliği ile

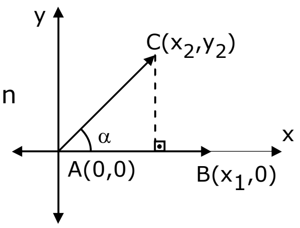
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$ eşitliğinden yararlanarak $v_a{}^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ bağıntısını bulunuz.

29. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri doğrusal bağımsız ise;
$\vec{C} = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \vec{b} + \left\|\vec{b}\right\| \cdot \vec{a}$ vektörünün $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açıyı ortaladığını gösteriniz.

30. a. $\vec{A} = (1,3)$ vektörü ile 45° lik açı yapan birim vektörleri bulunuz.
($\vec{A}$'ne dik bir vektör ile, $\vec{A}$'nün belirttiği açının açıortayından yararlanınız.)

b. $\vec{A} = (1,3)$ vektörü ile 22,5° lik açı yapan birim vektörleri bulunuz.

31. Düzlemde herhangi iki vektör $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AC}$ ve bu vektörlerin belirttiği açının ölçüsü α olsun.



a. $\overrightarrow{AB}$'nün taşıyıcısını x ekseni, x eksenine A'da dik olan doğruyu y ekseni olarak alınız. Bu koordinat sisteminde $A(0,0)$ olur. $B(x_1,0)$ ve $C(x_2,y_2)$ olsun. Bu sistemde $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos\alpha$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

b. $\overrightarrow{AC}$'nün taşıyıcısını y ekseni, y eksenine A'da dik olan doğruyu x ekseni olarak alınız. Bu koordinat sisteminde de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos\alpha$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

32. ABC üçgeninde

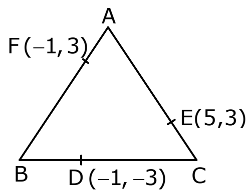
$|BC|=3|BD|$,

$|CA|=3|CE|$,

$|AB|=3|AF|$'dır.

$D(-1,-3)$, $E(5,3)$,

$F(-1,3)$ olduğuna göre;



a. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{BC}$ vektörlerini bulunuz.

b. A, B, C köşelerinin koordinatlarını bulunuz.