İlk Tanımlar

Tanım-1

Bir doğru ve bunun dışındaki bir noktanın belirttiği düzlemde, noktaya uzaklıklarının doğruya uzaklıklarına oranı sabit olan noktaların geometrik yerine **konik** denir.

Sabit olarak verilen noktaya **koniğin odak noktası**, doğruya **koniğin doğrultmanı**, sabit orana da **koniğin dışmerkezliği** adı verilir. Dışmerkezlik **e** ile gösterilir.

Konik adı, bu şekillerin bir konik yüzeyin bir düzlemle arakesitleri olarak da elde edilebilmesinden gelir.

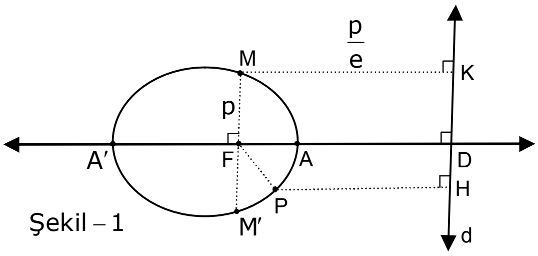
Tanım-2

Konikler, odaklarından geçen ve doğrultmanlarına dik olan doğruya göre simetriktirler.

Bu doğruya **koniğin ekseni** denir.

Tanım-3

Koniğin odağından geçen ve koniğin eksenine dik olan kirişin uzunluğunun yarısına **koniğin parametresi** denir. **p** ile gösterilir.



Şekil – 1

Şekil-1'de, F noktasına ve d doğrusuna uzaklıklarının oranı $e = \frac{|PF|}{|PH|}$ olan P noktalarının geometrik yeri çizilmiştir. Bu şekil bir koniktir.

- F noktası koniğin odağı;
- d doğrusu koniğin doğrultmanı;
- $e = \frac{|PF|}{|PH|}$ koniğin dışmerkezliği;
- $|MF| = p$ koniğin parametresi;
- $|MK| = |FD| = \frac{p}{e}$ odağın doğrultmana uzaklığıdır.

Koniğin ekseninin koniği kestiği noktalara **koniğin tepeleri** (veya köşeleri) denir.

Şekil-1'de A ve A′ noktaları koniğin tepe noktalarıdır.

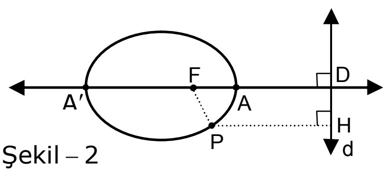
Koniklerin genel tanımına göre; (Tanım-1)

$$\frac{|PF|}{|PH|} = e, \quad \frac{|AF|}{|AD|} = e, \quad \frac{|MF|}{|MK|} = e \quad \text{ve} \quad \frac{|A'F|}{|A'D|} = e$$

olur. (Şekil-1)

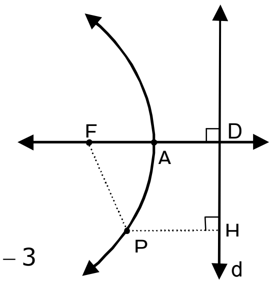
Dışmerkezlik ve Konikler

1. $e = \frac{|PF|}{|PH|} < 1$ ise konik elipstir.



Şekil – 2

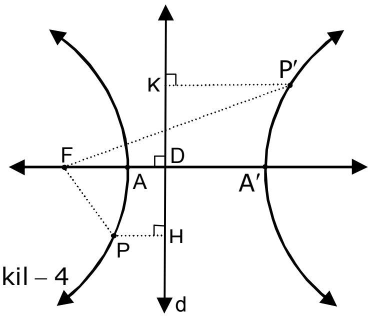
2. $e = \frac{|PF|}{|PH|} = 1$ ise konik paraboldür.



Şekil – 3

3. $e = \frac{|PF|}{|PH|} > 1$ ise konik hiperboldür.

$\left(e = \frac{|PF|}{|PH|} = \frac{|P'F|}{|P'K|} > 1 \right)$



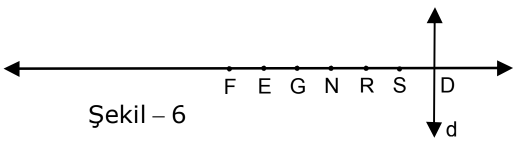
Şekil – 4

1., 2. ve 3. maddede söylediklerimizi, konikleri nokta nokta çizerek de görebileceğiz.

Düzlemde bir d doğrusu ve bunun dışında bir F noktası alarak, değişik konikleri nasıl elde edebileceğimize bir bakalım:

Şekil – 5

F noktasından geçen ve d doğrusuna D noktasında dik olan FD doğrusunu –koniğin eksenini – çizelim. $|FD| = 6$ birim olsun. Bir birim aralıklı noktaları işaretleyelim:



Şekil – 6

E, G, N, R, S noktaları farklı koniklerin tepe noktaları olarak alınabilirler.

$e_1 = \frac{|EF|}{|ED|} = \frac{1}{5} < 1$ ve $e_2 = \frac{|GF|}{|GD|} = \frac{2}{4} < 1$

olduğundan, E ile G noktaları odağı F ve doğrultmanı d olan birer elipsin tepeleri olurlar.

$e_3 = \frac{|NF|}{|ND|} = \frac{3}{3} = 1$ olduğundan, N noktası bir parabolün tepesi;

$e_4 = \frac{|RF|}{|RD|} = \frac{4}{2} > 1$ ve $e_5 = \frac{|SF|}{|SD|} = \frac{5}{1} > 1$

olduğundan , R ile S noktaları da birer hiperbolün tepeleri olacaklardır.

Başka bir deyişle; [FD] üzerindeki noktalardan F'ye daha yakın olanları birer elipsin, D'ye yakın olanları birer hiperbolün tepeleri olurlar. [FD]'nin orta noktası da bir parabolün tepesidir.

Bu şekillerin hepsini bir arada çizeceğiz.

Koniklerin Çizimi

Tepesi G olan elipsi çizelim:

Elipse ait bir nokta P olsun. $\frac{|GF|}{|GD|} = \frac{1}{2} = e$ olduğunu biliyoruz. P noktasından d doğrusuna çizilen dikmenin ayağına H dersek, $\frac{|PF|}{|PH|} = \frac{1}{2}$ olacaktır.

Buna göre; bu elipsi çizmek demek, $\frac{|PF|}{|PH|} = \frac{1}{2}$ koşulunu sağlayan tüm P noktalarını kağıt üzerine kondurmak demektir. Öyle P noktaları ki; $|PF| = k$ iken $|PH| = 2k$ olacaktır.

Başka bir deyişle; P noktaları F noktasından k birim, d doğrusundan 2k birim uzakta olacaklardır. Böyle P noktaları, F merkezli ve değişen k birim yarıçaplı çemberlerle d doğrusuna 2k birim uzaklıktaki paralel doğruların kesim noktaları olurlar.

F noktasının d doğrusuna uzaklığının 6 birim olduğu dikkate alınırsa; F merkezli k birim yarıçaplı çemberle, d'ye 2k birim uzaklıktaki paralel doğrunun kesişebilmesi için,

$k + 2k \geq 6$ birim ve $2k - k \leq 6$ birim olması gerektiği görülür. (Şekiller çizerek görünüz.)

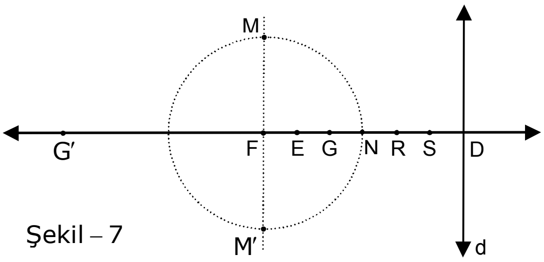
Demek ki; 2 br $\leq k \leq 6$ br alınmalıdır.

$k = 2$ br uzunluğuna karşılık gelen nokta elipsin G tepesidir.

$k = 6$ br uzunluğuna karşılık gelen nokta da elipsin G' tepesi olur.

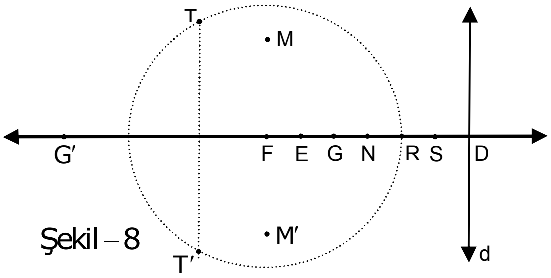
$k = 3$ br yarıçaplı çemberle, d'den 6 br uzaktaki paralelin kesim noktaları elipse ait diğer iki nokta olur.

Böylece; elipse ait G, G', M ve M' noktalarını elde etmiş oluruz.



Şekil – 7

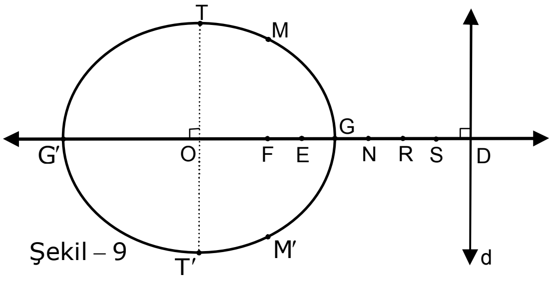
$k = 4$ br alarak da T ve T' noktalarını elde ederiz.



Şekil – 8

Elipse ait nokta sayısını arttırarak, şekli istediğimiz hassaslık derecesinde çizebiliriz.

Odağı F, doğrultmanı d, dışmerkezliği $e = \frac{1}{2}$ olan elips aşağıdaki gibidir.



Şekil – 9

Tanım-4

Elipsin, elipsin ekseninde ayırdığı kirişe **elipsin büyük ekseni** (veya asal ekseni); bu kirişin orta noktasına **elipsin merkezi**; merkezden geçen ve elipsin eksenine dik olan kirişe **elipsin küçük ekseni** (veya yedek ekseni) denir.

Şekil-9'da $[GG']$ büyük eksen, $[TT']$ küçük eksendir.

Küçük eksenin uç noktaları da elipsin diğer iki tepesidir. (G, G', T, T' elipsin tepeleri.)

Alıştırmalar ve Problemler – I

1. Şekil-9'da $|FG| = 2$ br ve $|FD| = 6$ br 'dir.

Buna göre; odağı F, doğrultmanı d ve bir tepesi G olan elipsin küçük eksen uzunluğunu ($|TT'|$) bulunuz.

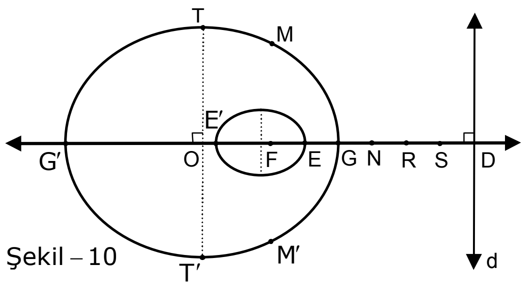
2. Şekil-9'da, bir tepesi E olan elipsin odağı F noktası ve doğrultmanı d doğrusudur. $|FE| = 1$ br ve $|FD| = 6$ br 'dir.

Buna göre;

a. bu elipsin E' tepe noktasının d doğrultmanından uzaklığını bulunuz.

b. bu elipsin küçük ekseninin uzunluğunu bulunuz.

2. soruya bulunacak cevaplarla, köşesi E olan elipsi, köşesi G olan elipsin yanına şekil-10' daki gibi koyarız.



Şekil – 10

Tepesi N olan parabolü çizelim:

Parabole ait bir nokta P olsun. $\frac{|NF|}{|ND|} = 1 = e$ olduğunu biliyoruz. P noktasından d doğrusuna çizilen dikmenin ayağına H dersek, $\frac{|PF|}{|PH|} = 1$ olacaktır.

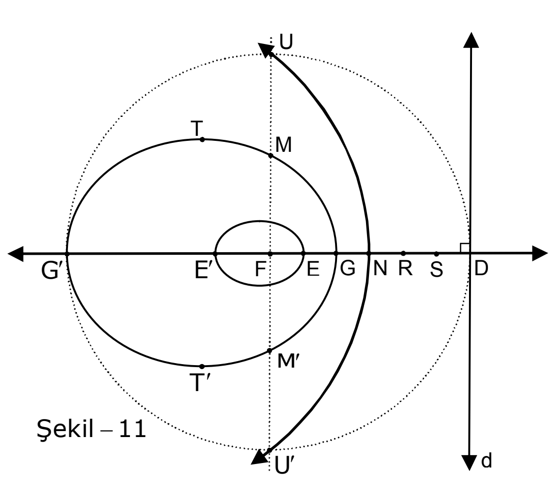
Bu durumda; F odağından ve d doğrultmanından eşit uzaklıkta bulunan P noktalarını arayacağız. $|PF| = |PH| = k$ eşitliklerini sağlayan P noktalarını…

Böyle P noktaları, F merkezli ve değişen k birim yarıçaplı çemberlerle d doğrusuna k birim uzaklıktaki paralel doğruların kesim noktaları olurlar.

F noktasının d doğrusuna uzaklığının 6 birim olduğu dikkate alınırsa; F merkezli k birim yarıçaplı çemberle, d'ye k birim uzaklıktaki paralel doğrunun kesişebilmesi için, $k + k \geq 6$ br $\Rightarrow$ $k \geq 3$ br olmasının gerekli ve yeterli olacağı görülür.

$k = 3$ br uzunluğuna karşılık gelen nokta parabolün N tepesidir.

$k = 6$ br yarıçaplı çemberle, d'den 6 br uzaktaki paralelin U ve U′ kesim noktaları parabole ait iki nokta olacaktır. Aynı yöntemle yeteri kadar nokta bulunarak çizim tamamlanır. Şekil-11'de U, N, U′ noktalarından geçen parabol gösterilmiştir.



Şekil – 11

Tepesi R olan hiperbolü çizelim:

Hiperbole ait bir nokta P olsun. $\frac{|RF|}{|RD|} = 2 = e$ olduğunu biliyoruz. P noktasından d doğrusuna çizilen dikmenin ayağına H dersek, $\frac{|PF|}{|PH|} = 2$ olacaktır. Bu durumda; $|PF| = 2k$ ve $|PH| = k$ eşitliklerini sağlayan P noktalarını yerleştireceğiz.

Böyle P noktaları, F merkezli 2k br yarıçaplı çemberlerle d doğrusuna k birim uzaklıktaki paralel doğruların kesim noktaları olurlar.

F noktasının d doğrusuna uzaklığı 6 birimdir. Öyleyse; F merkezli 2k birim yarıçaplı çemberle, d'ye k birim uzaklıktaki paralel doğrunun kesişebilmesi için, $2k + k \geq 6$ br $\Rightarrow$ $k \geq 2$ br olması gerekli ve yeterlidir.

$k = 2$ br için elde edilen P noktası, hiperbolün R tepesi ile çakışır.

$k = 3$ br için, P noktaları, hiperbole ait V ile V′ noktalarıdır. (Şekil-12)

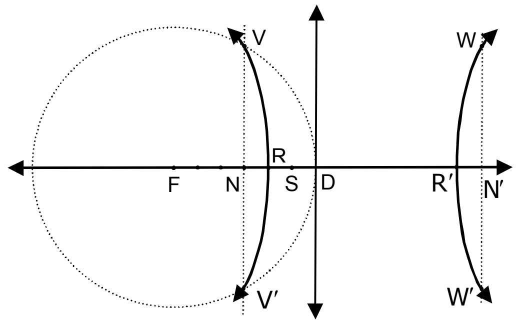
V, R ve V′ noktalarından geçirdiğimiz eğri, hiperbolün bir kolunu oluşturur.

$k \geq 6$ br iken; 12 birimden büyük yarıçaplı bir çemberi, doğrultmanın iki tarafında ve 2k uzaklıktaki iki paralel doğru da keser.

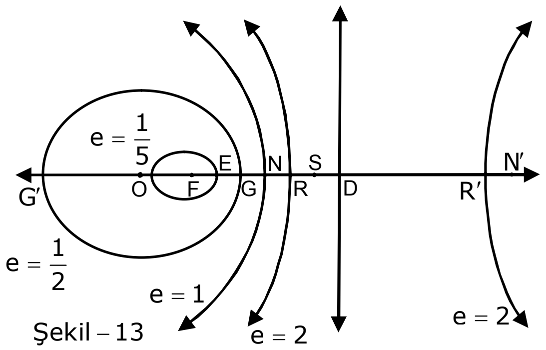
$k = 6$ br için hiperbolün R′ tepesi ile elde edilir.

$k = 7$ br için, P noktaları, hiperbole ait W ile W′ noktaları olur. (Şekil-12)

W, R′ ve W′ noktalarından geçirdiğimiz eğri de, hiperbolün diğer koludur.



Çizdiğimiz konikleri bir arada gösterelim:



Şekil – 13

Alıştırmalar ve Problemler – II

Şekil-13'teki koniklerin odakları F noktası ve doğrultmanları d doğrusudur.

FD, koniklerin ekseni olup $|FD| = 6$ br 'dir.

$|FD| = |EG| = |GN| = |NR| = |RS| = |SD| = 1$ br 'dir.

Buna göre;

1. Koniklerden herbiri üzerinde, d doğrultmanından uzaklıkları 5 birim olan noktaların F odağına uzaklıklarını bulunuz.

2. $e = 2$ hiperbolü üzerinde, d doğrultmanından 8 birim uzaklıkta bulunan noktaların FD eksenine uzaklıklarını bulunuz.

3. Koniklerden herbiri üzerinde, FD ekseninden 1 birim uzaklıkta bulunan noktaların F odağına uzaklıklarını bulunuz.

4. İki tepesi G ve G′ noktaları olan elipsin O merkezinden GG′ eksenine dik çizilen doğruyu y ekseni ve GG′ doğrusunu x ekseni sayarak oluşturacağınız koordinat sisteminde;

a. F odağının koordinatlarını bulunuz.

b. d doğrultmanının denklemini yazınız.

c. Tepesi G olan elipsin denklemini yazınız.

d. Tepesi E olan elipsin denklemini yazınız.

5. GG′ doğrusunu x ekseni ve buna N noktasında çizilecek dikmeyi y ekseni sayarak oluşturacağınız koordinat sisteminde;

a. F odağının koordinatlarını bulunuz.

b. d doğrultmanının denklemini yazınız.

c. Tepesi N olan parabolün denklemini yazınız.

6. [RR′] doğru parçasının orta noktası O′ olsun.

O′ noktasından RR′ doğrusuna çizilecek dikmeyi y ekseni ve RR′ doğrusunu x ekseni sayarak oluşturacağınız koordinat sisteminde;

a. F odağının koordinatlarını bulunuz.

b. R ve R′ tepelerinin koordinatlarını bulunuz.

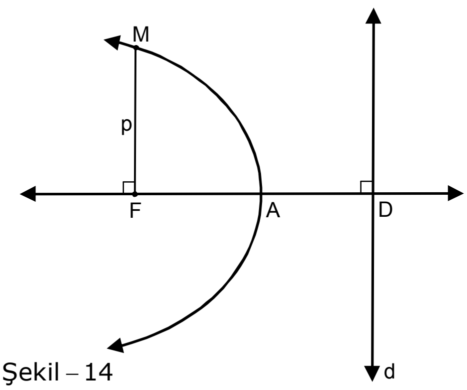
c. d doğrultmanının denklemini yazınız.

d. Tepesi R olan hiperbolün denklemini yazınız.

Parametre ve Konikler

Şekil-14'te, odağı F noktası ve doğrultmanı d doğrusu olan bir konik verilmiştir.

Koniğin F odağından geçen ve FD eksenine dik olan [MF] yarım kirişi çizilmiştir.



Şekil – 14

$|MF|$ uzunluğuna **koniğin parametresi** denildiğini ve **p** ile gösterildiğini biliyoruz.

$|MF| = p$ ve $|FD|$ uzunlukları biliniyor ise koniğin türünü bulabilir miyiz?

Bu soruya kolayca **evet** cevabını verebiliriz.

Çünkü; konik üzerindeki M noktasının F odağına uzaklığının d doğrultmanına uzaklığına oranı dışmerkezliği verecektir. Burada; p ve $|FD|$ uzunlukları belli olduğuna göre $\frac{|MF|}{|FD|} = e$ oranı bellidir. Öyleyse; koniğin türü de bellidir.

Demek ki; **parametre**, koniklerin dışmerkezlik türünden bir elemanıdır. Koniğin türünü ve biçimini belirtir.

$\frac{|MF|}{|FD|} = e$ eşitliğinden, şu sonuçları hemen çıkarabiliriz:

1. $p < |FD|$ ise, konik elipstir.

2. $p = |FD|$ ise, konik paraboldür.

3. $p > |FD|$ ise, konik hiperboldür.

Alıştırmalar ve Problemler – III

Şekil-14'teki koniğin odağı F noktası ve doğrultmanı d doğrusudur.

FD, koniklerin ekseni olup $|FD| = 6$ br 'dir.

Buna göre; aşağıda verilen $|MF| = p$ değerleri için koniğin türünü belirtiniz.

Her durumda, $|AD|$ uzunluğunu bulunuz.

1. $p = 3$ br **2.** $p = 4$ br

3. $p = 6$ br **4.** $p = 8$ br