## İki Doğrunun Kesişme Koşulu

**I. yaklaşım:**

$$d_1: \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}=k_1\ ;$$

$$d_2: \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}=k_2$$

doğruları verilmiş olsun. $d_1$ üzerindeki bir $A_1(a_1k_1+x_1, b_1k_1+y_1, c_1k_1+z_1)$ ve $d_2$ üzerindeki bir $A_2(a_2k_2+x_2, b_2k_2+y_2, c_2k_2+z_2)$ noktası çakışık olsun.

Bu durumda;

$$\left.\begin{array}{l} a_1k_1+x_1=a_2k_2+x_2 \\ b_1k_1+y_1=b_2k_2+y_2 \\ c_1k_1+z_1=c_2k_2+z_2 \end{array}\right\}$$ denklem sistemini sağlayan, $k_1$ ve $k_2$ sayıları bulunabilmelidir.

**II. yaklaşım:**

$$d_1: \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}=k\ ;$$

$$d_2: \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

doğruları verilmiş olsun.

$d_1$ üzerindeki $P(x,y,z)$ noktasının koordinatlarının, k orantı sabiti türünden değerleri $d_2$ doğrusunun denklemini sağlamalıdır.

$P(a_1k+x_1, b_1k+y_1, c_1k+z_1)$ olduğuna göre;

$$\frac{a_1k+x_1-x_2}{a_2}=\frac{b_1k+y_1-y_2}{b_2}=\frac{c_1k+z_1-z_2}{c_2}$$

denklem sistemini sağlayan bir k değeri bulunabilmelidir. Bu k değeri $P(x,y,z)$ de yerine konularak P kesişme noktası bulunur.
Bu yaklaşımda işlemler diğerine göre daha kolay yürütülmektedir.

(**Gökhan Keçeci** Hocamıza teşekkürler.)

## Örnekler

**1.** $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}=k_1$ ve

$d_2: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}=k_2$ doğrularının (varsa) kesişme noktalarını bulunuz.

**Çözüm**

**I. yol**

$d_1$ üzerindeki $A_1(k_1, 2k_1-1, k_1+1)$ noktası ile $d_2$ üzerindeki $A_2(-k_2+1, 2k_2, 3k_2+1)$ noktası çakışık olsun.

$$\left.\begin{array}{l} k_1=-k_2+1 \\ 2k_1-1=2k_2 \\ k_1+1=3k_2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1=\frac{3}{4},\ k_2=\frac{1}{4}$$

k değerlerinden biri, ilgili olduğu noktada yerine konulursa kesişme noktası $A_1(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{7}{4})$ olarak bulunur.

**II. yol**

$$d_1: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}=k\ ;$$

$$d_2: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$$

$d_1$ üzerindeki $P(k, 2k-1, k+1)$ noktası, $d_2$ doğrusunun denklemini sağlamalıdır.

$$\frac{k-1}{-1}=\frac{2k-1}{2}=\frac{k+1-1}{3}$$

$k=\frac{3}{4}$ ve kesişme noktası $P(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{7}{4})$ bulunur

**2.** $d_1: \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{4}=k_1$ ve

$d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+a}{2}=k_2$ doğruları düzlemsel olduğuna göre a kaçtır?

**Çözüm**

**I. yol**

Verilen doğruların doğrultu vektörleri doğrusal bağımsız olduğundan, bu doğruların düzlemsel olmaları ancak kesişmeleri ile mümkün olur.
$d_1$ üzerindeki $A_1(-k_1, -k_1+1, 4k_1+1)$ noktası ile $d_2$ üzerindeki $A_2(k_2+2, -k_2+1, 2k_2-a)$ noktası çakışık olsun.

$$\left.\begin{array}{l} -k_1=k_2+2 \\ -k_1+1=-k_2+1 \\ 4k_1+1=2k_2-a \end{array}\right\} \Rightarrow k_1=k_2=-1,\quad a=1$$

bulunur.
$a=1$ için, doğrular $A_1(1,2,-3)$ noktasında kesişirler ve düzlemsel olurlar.

**II. yol**

$d_1 : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{4} = k$ ;

$d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+a}{2}$

$d_1$ üzerindeki $P(-k, -k+1, 4k+1)$ noktası, $d_2$ doğrusunun denklemini sağlamalıdır.

$$\frac{-k-2}{1} = \frac{-k+1-1}{-1} = \frac{4k+1+a}{2}$$

$k = -1$ ve $a = 1$ bulunur.
$a = 1$ için, doğrular $P(1, 2, -3)$ noktasında kesişirler ve düzlemsel olurlar.

**3.** $d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1} = k_1$ ve

$d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} = k_2$ doğrularının (varsa) kesişme noktalarını bulunuz.

**Çözüm**

**I. yol**

$d_1$ üzerindeki $A_1(k_1, 2k_1+1, -k_1+1)$ noktası ile $d_2$ üzerindeki $A_2(-k_2+1, 2k_2, k_2-1)$ noktası çakışık olsun.

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = -k_2 + 1 \\ 2k_1 + 1 = 2k_2 \\ -k_1 + 1 = k_2 - 1 \end{array}\right\}$$

İlk iki denklemden $k_1 = \frac{1}{4}$ ve $k_2 = \frac{3}{4}$ bulunur.

Bu değerler üçüncü denklemi sağlamazlar.
Doğrular kesişmez.

**II. yol**

$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1} = k$ ;

$d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

$d_1$ üzerindeki $P(k, 2k+1, -k+1)$ noktası, $d_2$ doğrusunun denklemini sağlamalıdır.

$$\frac{k-1}{-1} = \frac{2k+1}{2} = \frac{-k+1+1}{3}$$

Soldaki denklemden bulunan $k = \frac{1}{4}$ değeri sağdaki denklemi sağlamaz.
Doğrular kesişmez.