

Örnek Problem

$x^2 + y^2 = a^2$ ve $x^2 + z^2 = a^2$ silindirik yüzeylerinin sınırladığı bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm

Hesaplanacak hacim koordinat düzlemleri ile 8 eş bölgeye ayrılmıştır.

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ bölgesindeki kısmın hacmini bulmak için $x = 0, y = 0$ ve $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ile sınırlanmış D bölgesinde, $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ fonksiyonunun integralini almalıyız. İstenen hacim da bunun 8 katı olur:

$$\begin{aligned} V &= 8 \cdot \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy dx \\ \Rightarrow V &= 8 \cdot \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ \Rightarrow V &= 8 \cdot \left(a^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a \\ \Rightarrow V &= \frac{16 \cdot a^3}{3} \end{aligned}$$
