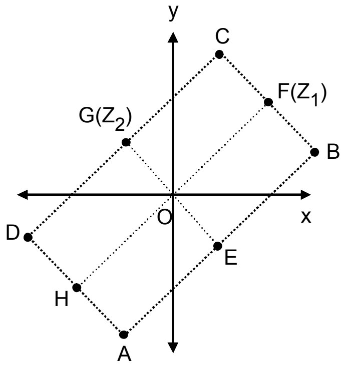
Problem-1

Aşağıdaki karmaşık düzlemde E, F, G, H noktaları ABCD paralelkenarının kenarlarının orta noktalarıdır.
F'nin koordinatı Z_1, G'nin koordinatı Z_2 dir.

Buna göre; A, B, C, D, E noktalarının koordinatlarını yazınız.



Çözüm

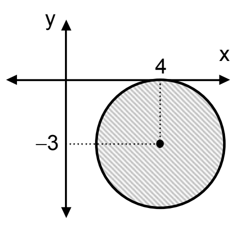
$A(-Z_1-Z_2)$, $B(Z_1-Z_2)$, $C(Z_1+Z_2)$, $D(-Z_1+Z_2)$ ve $E(-z_2)$ olur.

Problem-2

$\{z \mid |z-4+3i| \le 3\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$|z_1-z_2|$ ifadesi, z_1 ve z_2 sayılarına karmaşık düzlemde karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklığı belirtir.
Buna göre; verilen küme, karmaşık düzlemde şekildeki taralı bölgedeki noktaların kümesidir.



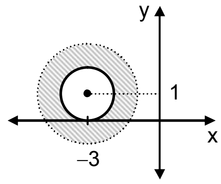
Problem-3

$\{z \mid 1 \le |z+3-i| < 2,\ z \in C\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$|z_1-z_2|$ ifadesi, karmaşık düzlemde z_1 ve z_2 sayılarına karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklığı gösterdiğine göre;

$\{z \mid |z-(a+bi)| = r\}$ kümesi de karmaşık düzlemde (a,b) merkezli ve r yarı çaplı çember üzerindeki noktaları gösterir.
Buna göre; verilen kümeye karmaşık düzlemde karşılık gelen şekil, grafikteki taralı bölge ile belirtildiği gibidir.



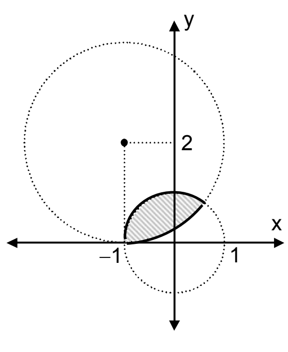
Problem-4

$\{z \mid |z+1-2i| \le 2 \wedge |z| \le 1,\ z \in C\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

Verilen küme, dairesel iki bölgenin kesişimidir.

$\{z \mid |z+1-2i| \le 2,\ z \in C\} \cap \{z \mid |z| \le 1,\ z \in C\}$



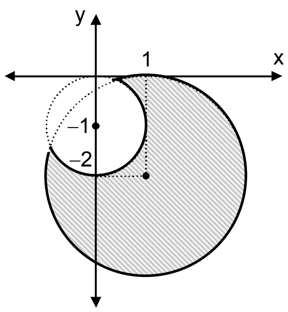
Problem-5

$\{z \mid |z-1+2i| \le 2 \wedge |z+i| \ge 1 \ , \ z \in C\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

Verilen küme, $(1,-2)$ merkezli 2 birim yarıçaplı daire ile $(0,-1)$ merkezli 1 birim yarıçaplı çemberin ve dış bölgesinin kesişimidir.

$\{z \mid |z-1+2i| \le 2 \ , \ z \in C\} \cap \{z \mid |z+i| \ge 1 \ , \ z \in C\}$



Problem-6

$Re[(1+i)\cdot z]=1$ koşulunu sağlayan z karmaşık sayılarına karşılık gelen noktaların geometrik yerini karmaşık düzlemde gösteriniz.

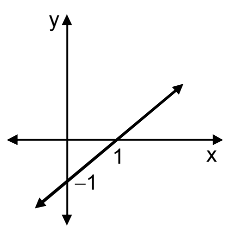
Çözüm

$z=x+yi$ olsun.

$(1+i)\cdot z=(1+i)\cdot(x+y\cdot i)=x-y+(x+y)\cdot i$

$\Rightarrow Re[(1+i)\cdot z]=x-y$ olur.

Öyleyse; geometrik yer, $x-y=1$ doğrusudur.



Problem-7

$|z+4+2i|=|z-2i|$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarına karşılık gelen noktaların geometrik yerini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$|z_1-z_2|$ ifadesi, karmaşık düzlemde z_1 ve z_2 sayılarına karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklığı gösterir.

Buna göre; $|z-z_1|=|z-z_2|$ eşitliğini sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktalar, $A(z_1)$ ve $B(z_2)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunurlar. Öyleyse; bu noktaların geometrik yeri, [AB] doğru parçasının orta dikmesidir.

Verilen denklem,

$|z+4+2i|=|z-2i|$

$\Rightarrow |z-(-4-2i)|=|z-(2i)|$

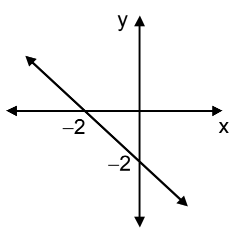
biçiminde yazılırsa, z sayılarına karşılık gelen noktaların, $A(-4,-2)$ ve $B(0,2)$ olmak üzere,[AB] doğru parçasının orta dikmesi olduğu görülür.

[AB]'nin orta noktası $D(-2,0)$ 'dır.

P(x,y) noktaları orta dikme üzerinde ise,

$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \quad \Rightarrow (-2-x,0-y)\cdot(4,4)=0$

$\Rightarrow PD: y=-x-2$ bulunur.



Problem-8

$|z+1+i| \le |z-3-i|$ eşitsizliğini sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktaların geometrik yerini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

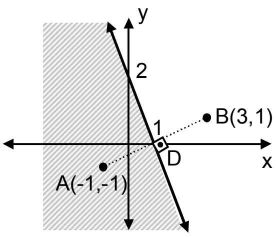
$A(-1,-1)$ ve $B(3,1)$ olmak üzere; istenilen geometrik yer, [AB]'nin orta dikmesi üzerindeki noktalar ile bu orta dikmenin A noktası tarafında kalan noktaların kümesidir.

[AB]'nin orta noktası $D(1,0)$ 'dır.

P(x,y) noktaları orta dikme üzerinde ise,

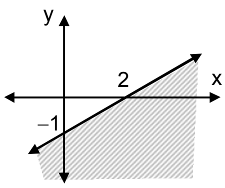
$\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \Rightarrow (1-x, 0-y) \cdot (4,2) = 0$

$\Rightarrow PD : y = -2x + 2$ bulunur.



Problem-9

Karmaşık düzlemde yandaki taralı bölge ile belirtilen şekle karşılık gelen kümeyi yazınız.



Çözüm

I. yol

xoy koordinat sisteminde, taralı bölgenin sınır doğrusunun denklemi $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$ 'dir. İki taraf 2 ile çarpılırsa $x - 2y = 2$ olur. Taralı bölgenin, $O(0,0)$ noktasının sağlamayacağı eşitsizlikle gösterilmesi gerekir. Buna göre; taralı bölgenin cebirsel ifadesi $x - 2y \ge 2$ olur.

xoy koordinat düzleminin karmaşık düzlem olduğu ve $z = x + yi$ olduğu dikkate alınırsa, taralı bölgeye karşılık gelen küme,

$\{z \mid \mathrm{Re}(z) - 2 \cdot \mathrm{İm}(z) \ge 2 \ , \ z \in C\}$ olur.

II. yol

Taralı bölge, verilen sınır doğrusunu orta dikme sayan bir doğru parçasının uç noktaları türünden yazılabilir. Şöyle ki;

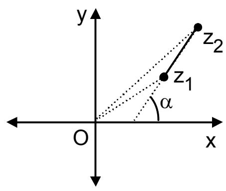
Sınır doğrusunun doğrultu vektörü $\vec{d} = (2,1)$, buna dik bir vektör $\overrightarrow{n_1} = (-1,2)$'dir. Bu vektörün iki katının bileşenleri 2 ile bölünebilir.

$\vec{n} = 2 \cdot \overrightarrow{n_1} = (-2,4)$ alalım. $\vec{n}$ vektörünün orta noktasını sınır doğrusu üzerindeki $K(0,-1)$ noktası olarak alırsak, başlangıç noktası $A(1,1)$ ve uç noktası $B(-1,-3)$ olur. Bu [AB] doğru parçasının orta dikmesi, küme ile ifade edilecek olan şeklin sınır doğrusudur.

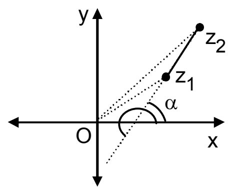
A noktasına karşılık gelen sayı $z_1 = 1 + i$ ve B noktasına karşılık gelen sayı $z_2 = -1 - 3 \cdot i$ olup belirtilen şekle karşılık gelen kümelerden biri,

$\{z \mid |z+1+i| \le |z-3-i|, \ z \in C\}$ olur.

III. yol



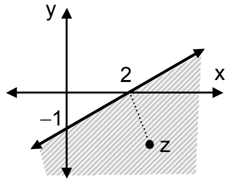
$\mathrm{Arg}(z_2 - z_1) = \alpha$



$\mathrm{Arg}(z_1 - z_2) = \pi + \alpha$

Şekillerdeki açıklamalara göre; taralı bölgeye karşılık gelen küme, aşağıdaki gibi yazılabilir:

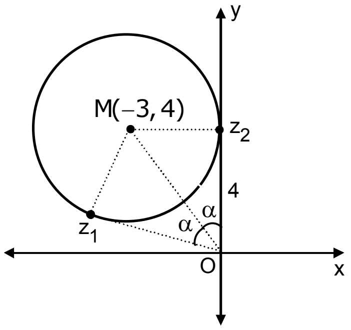
$\{z \mid \mathrm{Arg}(z\text{-}2) \le \mathrm{Arg}(2+i) \vee \mathrm{Arg}(z-2) \ge \mathrm{Arg}(-2-i), \ z \in C\}$



Problem-10

$|z + 3 - 4i| = 3$ koşulunu sağlayan z sayılarının argümentlerinin en büyük değeri ile en küçük değerini bulunuz.

Çözüm



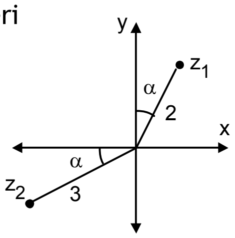
Şekilde; argümenti en büyük olan sayı z_1, en küçük olan sayı z_2 olarak gösterilmiştir.

$\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ ve $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{24}{7}$ olduğu görülür. Buna göre;

$\mathrm{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{Arc}\tan\dfrac{24}{7}$ ve $\mathrm{Arg}(z_2) = \dfrac{\pi}{2}$ bulunur.

Problem-11

z_1 ve z_2 sayılarının modülleri ve argümentleri karmaşık düzlemde verilmiştir.
Buna göre,
$z_1 \cdot z_2$ sayısını
bulunuz.



Çözüm

$z_1 = 2\mathrm{cis}(\dfrac{\pi}{2} - \alpha)$ ve $z_2 = 3\mathrm{cis}(\pi + \alpha)$'dır.

$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot \mathrm{cis}(\dfrac{\pi}{2} - \alpha + \pi + \alpha) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = -6i$

bulunur.

Problem-12

Aşağıda verilen kümeleri karmaşık düzlemde gösteriniz.

a. $\left\{ z \;\middle|\; \mathrm{Arg}(z + 3 - i) = \dfrac{3\pi}{4}, z \in C \right\}$

b. $\left\{ z \;\middle|\; \mathrm{Arg}(z + 3 - i) = \dfrac{7\pi}{4}, z \in C \right\}$

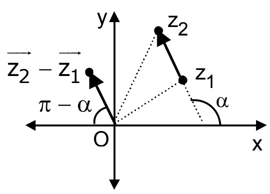
c. $\left\{ z \;\middle|\; \mathrm{Arg}(-3 + i - z) = \dfrac{3\pi}{4}, z \in C \right\}$

d. $\left\{ z \;\middle|\; \mathrm{Arg}(-3 + i - z) = \dfrac{7\pi}{4}, z \in C \right\}$

Çözüm

z_1 ve z_2 sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktaları da z_1 ve z_2 ile gösterelim.

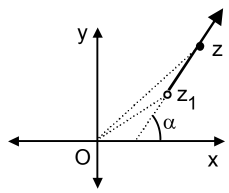
z_1 ve z_2 noktaları aynı zamanda $\overrightarrow{z_1}$ ve $\overrightarrow{z_2}$ vektörlerine karşılık gelir. Buna göre; $z_2 - z_1$ sayısı da $\overrightarrow{z_1 z_2}$ vektörüne, yani $\overrightarrow{z_2} - \overrightarrow{z_1}$ vektörüne karşılık gelecektir. $z_2 - z_1$ sayısının argümenti ise $\overrightarrow{z_2} - \overrightarrow{z_1}$ vektörünün x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü olur.



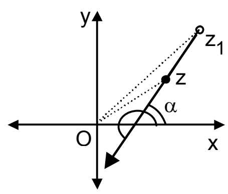
$\mathrm{Arg}(z_2 - z_1) = \alpha$

Bu bilgilere dayanarak, $\mathrm{Arg}(z - z_1) = \alpha$ eşitliğini sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktaların geometrik yeri olan yarı doğrunun grafiği aşağıda verilmiştir.

$\mathrm{Arg}(z - z_1) = \alpha$ iken $\mathrm{Arg}(z_1 - z) = \pi + \alpha$ olacağı da belirtilerek grafikte gösterilmiştir.



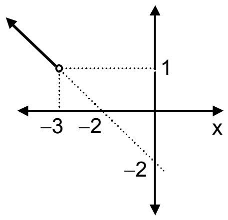
$\mathrm{Arg}(z - z_1) = \alpha$



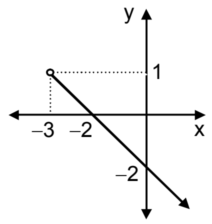
$\mathrm{Arg}(z_1 - z) = \pi + \alpha$

Bu açıklamalara göre; verilen kümelere karmaşık düzlemde karşılık gelen şekiller aşağıdaki gibi olur.

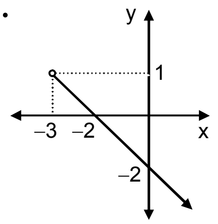
a.



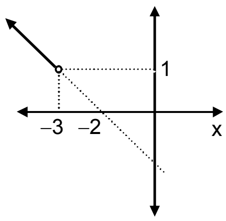
b.



c.



d.



Not
Yarı doğruların başlangıç noktalarına karşılık gelen karmaşık sayılar $z - z_1 = 0 + 0i$ sayısına karşılık gelirler. Arg(0) kimilerince "belirsiz", kimilerince "tanımsız" sayılır. "Belirsiz" sayanlar yarı doğrunun başlangıç noktasını doldurarak, geometrik yerin bir "ışın" olduğunu söylerler. Ancak; başlangıç noktasındaki "belirsizlik" yüzünden biz de , geometrik yerin "yarı doğru" olduğunu söyleyenlere katılıyoruz.
Bu farklı yaklaşımları da çok önemli bulmuyoruz.

Problem-13

Karmaşık düzlemde $\left|\frac{z-6i}{z+2}\right| = 1$ koşulunu sağlayan $z = x + yi$ noktalarının geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm

$\left|\frac{z-6i}{z+2}\right| = 1 \Rightarrow |z-6i| = |z+2|$ olur.

Bu eşitliğe karşılık gelen noktaların geometrik yeri de, $A(0,6)$ ve $B(-2,0)$ olmak üzere, [AB] doğru parçasının orta dikmesidir.
Problem-7'deki yöntemle, $x + 3y = 8$ bulunur.

Problem-14

Karmaşık düzlemde $\left|\frac{z}{z+i}\right| = 2$ koşulunu sağlayan $z = x + yi$ noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$\left|\frac{z}{z+i}\right| = 2 \Rightarrow |z| = 2 \cdot |z+i|$ olur.

Bu eşitliğe karşılık gelen noktaların geometrik yeri de; karmaşık düzlemde $A(0,0)$ noktasına uzaklığı, $B(0,-1)$ noktasına uzaklığının 2 katı olan $P(x,y)$ noktalarının kümesidir.

$$|PA| = 2 \cdot |PB| \Rightarrow |PA|^2 = 4 \cdot |PB|^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \cdot \left[x^2 + (y+1)^2\right]$$
$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 8y + 4 = 0$$

bulunur.

Problem-15

Karmaşık düzlemde $\text{Re}\ (z+1) = |z-1|$ koşulunu sağlayan $z = x + yi$ noktalarının geometrik yerini, x ve y türünden ifade ediniz.

Çözüm

$z = x + yi \Rightarrow z+1 = x + 1 + yi \Rightarrow \text{Re}(z+1) = x + 1$

ve $|z-1| = |x + yi - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ dir.

$$\text{Re}(z+1) = |z-1| \Rightarrow x + 1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4x \quad \text{olur.}$$

Buna göre; geometrik yerin cebirsel ifadesi,

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x \\ x \geq -1 \end{array}\right\}$$

olarak bulunur.

Problem-16

Karmaşık düzlemde $\arg(z-1+3i)=\frac{3\pi}{4}$ koşulunu sağlayan $z=x+yi$ noktalarının geometrik yerini, x ve y türünden ifade ediniz.

Çözüm

Problem-12'deki açıklamalara göre; geometrik yer, uç noktası $A(1,-3)$ ve eğimi $m=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ olan yarı doğrulardan $x<1$ bölgesinde bulunanıdır. Bu şeklin cebirsel ifadesi,

$$\left.\begin{array}{l} x+y=-2 \\ x<1 \end{array}\right\}$$

olur.

Problem-17

$\operatorname{Arg}(-i\cdot z)=\frac{9\pi}{10}$ olduğuna göre, $\operatorname{Arg}(\bar{z})$ kaç radyandır?

Çözüm

$$\operatorname{Arg}(-i\cdot z)=\frac{9\pi}{10}\Rightarrow \operatorname{Arg}(-i)+\operatorname{Arg}(z)=\frac{9\pi}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{2}+\operatorname{Arg}(z)=\frac{9\pi}{10}$$

Arg(z) negatif olmayacağından, eşitliğin sağına 2π eklemeliyiz:

$\operatorname{Arg}(z)=2\pi+\frac{9\pi}{10}-\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \operatorname{Arg}(z)=\frac{7\pi}{5}$ bulunur.

$\operatorname{Arg}(z)=\alpha$ ise $\operatorname{Arg}(\bar{z})=2\pi-\alpha$'dır.

Buna göre;

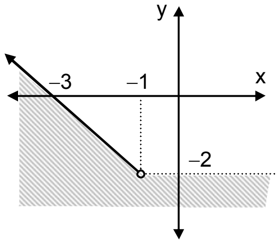
$\operatorname{Arg}(\bar{z})=2\pi-\frac{7\pi}{5}\quad\Rightarrow\quad \operatorname{Arg}(\bar{z})=\frac{3\pi}{5}$ olur.

Problem-18

$\operatorname{Arg}(z+1+2i)\geq\frac{3\pi}{4}$ eşitsizliğini sağlayan sayılara karşılık gelen noktaların kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

Problem-12'de verilen bilgilere göre; eşitsizliği sağlayan sayılara karşılık gelen noktaların kümesi grafikteki taralı bölge olur.



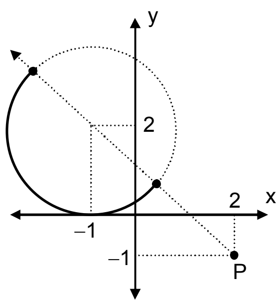
Problem-19

$$\left.\begin{array}{l} |z+1-2i|=2 \\ \operatorname{Arg}(z-2+i)\geq\frac{3\pi}{4} \end{array}\right\}$$

sistemini sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktaların kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$|z+1-2i|=2$ denklemi $M(-1,2)$ merkezli ve 2 birim yarıçaplı çemberi; $\operatorname{Arg}(z-2+i)\geq\frac{3\pi}{4}$ eşitsizliği de ucu $P(2,-1)$ noktası ve eğimi -1 olan yarı doğrulardan $x<2$ bölgesinde olanının altındaki noktaları gösterir. Verilen sistem, bu iki şeklin kesişimine karşılık gelir.



Problem-20

$\mathrm{Arg}(z+4i)=\dfrac{3\pi}{4}$ ve $\mathrm{Arg}(z-2)=\dfrac{5\pi}{4}$ koşullarını sağlayan z karmaşık sayısını bulunuz.

Çözüm

$\mathrm{Arg}(z+4i)=\dfrac{3\pi}{4}$ koşulunu sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktalar, ucu $A(0,-4)$ ve eğimi -1 olan yarı doğrulardan $x<0$ bölgesinde olanı üzerindedir. $(y=-x-4,\ \ x<0)$

$\mathrm{Arg}(z-2)=\dfrac{5\pi}{4}$ koşulunu sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktalar da, ucu $B(2,0)$ ve eğimi 1 olan yarı doğrulardan $x<2$ bölgesinde olanı üzerinde bulunurlar. $(y=x-2,\ \ x<2)$

Bu yarı doğruların kesim noktası $K(-1,-3)$ olup aranan karmaşık sayı $z=-1-3i$'dir.

Problem-21

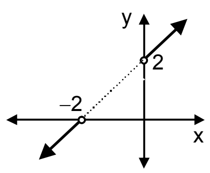
Karmaşık düzlemde arg(z − 2i) = arg(z + 2) eşitliğini sağlayan $z=x+yi$ sayılarına karşılık gelen noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm

Karmaşık düzlemde z ve $2i$ sayılarına karşılık gelen noktalardan geçen doğru ile z ve -2 sayılarına karşılık gelen noktalardan geçen doğrunun eğim açıları eşit olacağından z, -2 ve $2i$ noktaları doğrusaldır. Buna göre; geometrik yer $A(-2,0)$ noktası ile $B(0,2)$ noktasından geçen doğru üzerindedir. Ancak; $[AB]$ üzerindeki $P(z)$ noktaları için $\overrightarrow{AP}$ ve $\overrightarrow{BP}$ vektörleri zıt yönlü olacağından $z-2i$ ve $z+2$ sayılarının argümentleri arasında π radyanlık fark olur.

Buna göre; geometrik yerin cebirsel karşılığı,

$\{(x,y)\mid y=x+2,\ x<-2 \vee x>0;\ x,y\in R\}$ olup grafiği aşağıdaki gibidir.



Problem-22

$$\left.\begin{array}{l}|z+1-2i|\le 2\\ |z|\le|z-2-2i|\end{array}\right\}$$

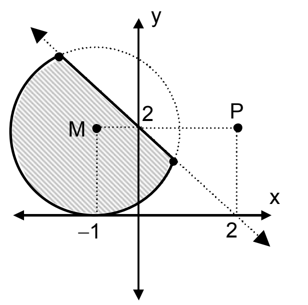
sistemini sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktaların kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm

$|z+1-2i|\le 2$ eşitsizliği, merkezi $M(-1,2)$ noktası olan 2 birim yarıçaplı daireyi gösterir.

$|z|\le|z-2-2i|$ eşitsizliği de, $O(0,0)$ ve $P(2,2)$ olmak üzere; $[OP]$'nin orta dikmesi üzerindeki ve bu orta dikmenin O noktası tarafındaki noktaların kümesine karşılık gelir.

Aranan küme; bu iki kümenin kesişimidir.



Problem-23

$\mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(\bar{z})=\dfrac{3\pi}{5}$ olduğuna göre;

$\mathrm{Arg}(z)$ ve $\mathrm{Arg}(\bar{z})$ değerlerini bulunuz.

Çözüm

$\mathrm{Arg}(z)$ ve $\mathrm{Arg}(\bar{z})$ değerlerinin, z ve $\bar{z}$ sayılarının esas argümentleri olduklarını dikkate alarak,

$\mathrm{Arg}(z)=\alpha$ diyelim. $\mathrm{Arg}(\bar{z})=2\pi-\alpha$ olur.

$$\mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(\bar{z})=\frac{3\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha-(2\pi-\alpha)=\frac{3\pi}{5} \quad \Rightarrow 2\alpha=2\pi+\frac{3\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha=\pi+\frac{3\pi}{10} \quad \Rightarrow \alpha=\frac{13\pi}{10} \text{ bulunur.}$$

$\mathrm{Arg}(z)=\dfrac{13\pi}{10}$ ve $\mathrm{Arg}(\bar{z})=\dfrac{7\pi}{10}$ dur.

Problem-24

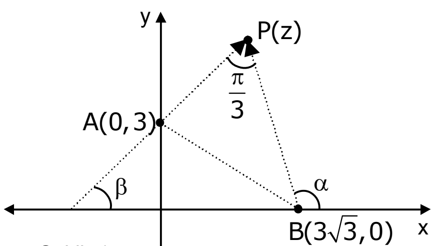
$z \in C$ olmak üzere; $\operatorname{Arg}(z-3\sqrt{3}) - \operatorname{Arg}(z-3i) = \dfrac{\pi}{3}$ eşitliği veriliyor.

a. Karmaşık düzlemde, bu eşitliği sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktaların geometrik yerini bulunuz.

b. Eşitliği sağlayan sayılardan modülü en büyük olanı ile modülü en küçük olanını bulunuz.

c. Eşitliği sağlayan sayılardan argümenti en büyük olanı ile argümenti en küçük olanını bulunuz.

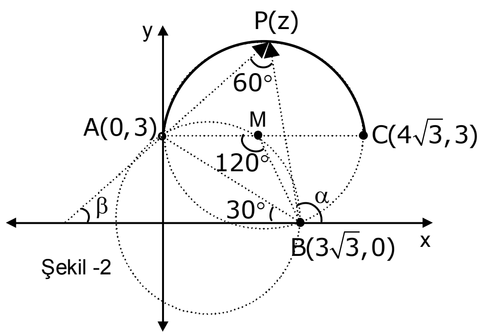
Çözüm



Şekil -1

a. $\operatorname{Arg}(z-3\sqrt{3}) = \alpha$ ve $\operatorname{Arg}(z-3i) = \beta$ olsun.

Şekil-1 incelenirse; $\operatorname{Arg}(z-3\sqrt{3}) - \operatorname{Arg}(z-3i) = \dfrac{\pi}{3}$ eşitliğini sağlayan noktaların, [AB] doğru parçasını 60° lik açı altında gören noktaların belirttiği çember yayları üzerinde aranacağı anlaşılır.

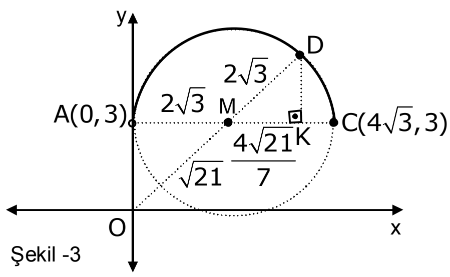


Şekil -2

Şekil-2 incelendiğinde; [AB]'yi 60° lik açı altında gören yaylardan, merkezi [AB] kirişinin orijin tarafında olan yay üzerindeki noktaların verilen koşulu sağlamadığı, sadece $M(2\sqrt{3},3)$ merkezli çembere ait $(\overset{\frown}{APC}]$ yayı üzerindeki noktaların eşitliği sağladığı görülür.

Bu incelemeler yapılırken, söz konusu argümentlerin, sayıların esas argümentleri olduğu dikkate alınmalıdır.

b.



Şekil -3

Modülü en büyük olan sayı, [OM ışınının çember yayını kestiği D noktasına karşılık gelen sayıdır.

D'nin koordinatları $\overset{\Delta}{OMA} \sim \overset{\Delta}{DMK}$ benzerliğinden yararlanılarak bulunur.

Bu sayı, $(2\sqrt{3} + \dfrac{4\sqrt{21}}{7}) + (3 + \dfrac{6\sqrt{7}}{7}) \cdot i$ sayısıdır.

A noktası verilen eşitliğe karşılık gelen şekil üzerinde olsaydı, modülü en küçük olan sayı $3 \cdot i$ dir, diyebilecektik. Ancak; $\operatorname{Arg}(z-3i)$ ifadesi $3 \cdot i$ için belirsiz olduğundan $3 \cdot i$ eşitliği sağlamaz.

Dolayısıyla; modülü en küçük olan sayı yoktur.

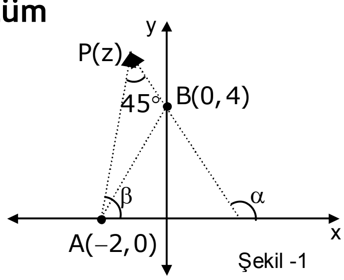
c. Şekil-3'te görüldüğü gibi; argümenti en küçük olan sayı, C noktasına karşılık gelen $4\sqrt{3} + 3 \cdot i$ sayısıdır.

Verilen eşitliği sağlayan, argümenti en büyük olan sayı yoktur.

Problem-25

$\operatorname{Arg}(z-4i)-\operatorname{Arg}(z+2)=\frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarına, karmaşık düzlemde karşılık gelen noktaların geometrik yerini bulunuz.

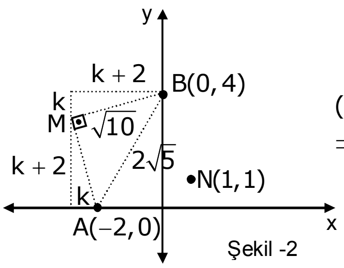
Çözüm



Şekil -1

I.yol

Şekil-1 incelenirse; $\operatorname{Arg}(z-4i)-\operatorname{Arg}(z+2)=\frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan noktaların, [AB] doğru parçasını 45° lik açı altında gören noktaların belirttiği çember yayları üzerinde aranacağı anlaşılır.

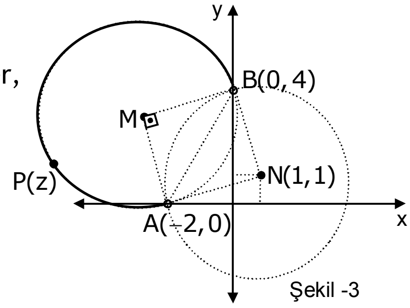


Şekil -2

$$(k+2)^2+k^2=10$$
$$\Rightarrow k=1$$

[AB] doğru parçasını 45° lik açı altında gören noktaların belirttiği çember yaylarının merkezleri [AB]'yi dik açı altında görürler. Şekil-2 incelenirse, bu yayların merkezlerinin $M(-3,3)$ ve $N(1,1)$ olduğu görülür. $N(1,1)$ noktası, $M(-3,3)$ noktasının AB'ye göre simetriğidir.

Geometrik yer, şekildeki açık uçlu $(\overset{\frown}{APB})$ yayıdır.



Şekil -3

II.yol

$\operatorname{Arg}(z-4i)=\alpha,\quad \operatorname{Arg}(z+2)=\beta$

ve $z=x+yi$ olsun.

$z-4i=x+(y-4)i$ olup $\tan\alpha=\dfrac{y-4}{x}$ ve

$z+2=x+2+yi$ olup $\tan\beta=\dfrac{y}{x+2}$ olur.

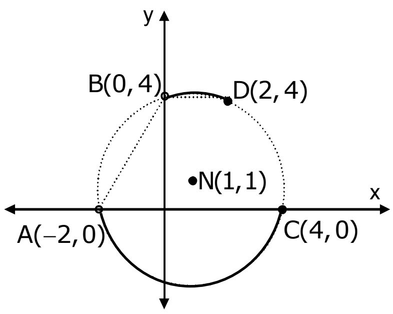
$$\tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=1$$
$$\Rightarrow \tan\alpha-\tan\beta=1+\tan\alpha\cdot\tan\beta$$
$$\Rightarrow \frac{y-4}{x}-\frac{y}{x+2}=1+\frac{y-4}{x}\cdot\frac{y}{x+2}$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+6x-6y+8=0$$
$$\Rightarrow (x+3)^2+(y-3)^2=10$$

Geometrik yerin, $(x+2)^2+(y-3)^2=10$ çemberi üzerinde aranacağı görülür.

Problem-26

$\operatorname{Arg}(z+2)-\operatorname{Arg}(z-4i)=\frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarına, karmaşık düzlemde karşılık gelen noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm



$\left[\overset{\frown}{AB}\right]$ ve $\left(\overset{\frown}{CD}\right)$ yayları üzerindeki noktalara karşılık gelen sayıların verilen eşitliği sağlamadığına dikkat ediniz.

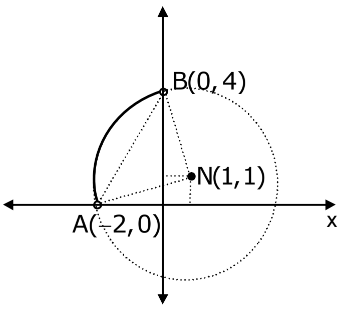
Problem-25'teki trigonometrik yol ile, yayların ait olduğu çemberin denkleminin, $(x-1)^2+(y-1)^2=10$ olduğu bulunabilir.

Problem-27

$\text{Arg}(z+2)-\text{Arg}(4i-z)=\frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarına, karmaşık düzlemde karşılık gelen noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm

$A(-2,0)$ ve $B(0,4)$ olmak üzere; geometrik yer $N(1,1)$ merkezli çemberin, uçları açık $(\widehat{AB})$ yayıdır.



Problem-28

$\left|z^2-1\right| = 2\cdot|z|+2;\ z\in C$ denklemi veriliyor.

a. Denklemi sağlayan z karmaşık sayıları için $|z|$'nin en küçük değeri ile en büyük değerini bulunuz.

b. Denklemi sağlayan z sayılarından, mutlak değeri en küçük olanları ile mutlak değeri en büyük olanları bulunuz.

Çözüm

a.

Her $z\in C$ için; $\left|z^2\right|-|1| \le \left|z^2-1\right| \le \left|z^2\right|+|-1|$ dir.

$\left|z^2-1\right|$ yerine $2\cdot|z|+2$ koyalım:

$$|z|^2-1\le 2\cdot|z|+2\le |z|^2+1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}|z|^2-1\le 2\cdot|z|+2\\ 2\cdot|z|+2\le |z|^2+1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|z|^2-2\cdot|z|-3\le 0\\ |z|^2-2\cdot|z|-1\ge 0\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 1+\sqrt{2}\le |z|\le 3$ bulunur.

b.

$|z|$'nin en küçük değeri $1+\sqrt{2}$'dir.

Mutlak değeri $1+\sqrt{2}$ olan sayıyı bulalım:

$z=x+yi$ olsun.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1+\sqrt{2}\Rightarrow x^2+y^2=3+2\sqrt{2}$,

$z^2=x^2-y^2+2xyi\Rightarrow z^2-1=x^2-y^2-1+2xyi$

olur.

$\sqrt{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}+2$

$\Rightarrow \sqrt{(x^2+y^2)^2-2x^2+2y^2+1}=2\sqrt{2}+4$

$\Rightarrow 18+12\sqrt{2}-2(x^2-y^2)=24+16\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2-y^2=-3-2\sqrt{2}$ olur.

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=3+2\sqrt{2}\\ x^2-y^2=-3-2\sqrt{2}\end{array}\right\}$$

sisteminden $x=0$ ve $y=\mp(1+\sqrt{2})$ bulunur.

İstenen sayılar $z_1=(-1-\sqrt{2})i$, $z_2=(1+\sqrt{2})i$'dir.

$|z|$'nin en büyük değeri 3'tür.

Mutlak değeri 3 olan sayıyı bulalım:

$z=x+yi$ olsun.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=3\Rightarrow x^2+y^2=9$,

$z^2=x^2-y^2+2xyi\Rightarrow z^2-1=x^2-y^2-1+2xyi$

olur.

$\sqrt{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}+2$

$\Rightarrow \sqrt{(x^2+y^2)^2-2x^2+2y^2+1}=8$

$\Rightarrow 82-2(x^2-y^2)=64$

$\Rightarrow x^2-y^2=8$ olur.

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=17\\ x^2-y^2=8\end{array}\right\}$$

sisteminden $x=\mp\frac{\sqrt{34}}{2}$ ve $y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

Buna göre; mutlak değeri 3 olan 4 sayı vardır.

$z_1=-\frac{\sqrt{34}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{34}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$,

$z_3=\frac{\sqrt{34}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4=\frac{\sqrt{34}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Problem-29

a. $\left|z^2 - 2i\right| = |z| + 4;\ z \in C$ denklemi veriliyor.

Denklemi sağlayan z karmaşık sayıları için $|z|$ 'nin en küçük değeri ile en büyük değerini bulunuz.

b. Denklemi sağlayan z sayılarından, mutlak değeri en küçük olanları ile mutlak değeri en büyük olanları bulunuz.

Çözüm

a.

Her $z \in C$ için; $\left|z^2\right| - |2i| \le \left|z^2 - 2i\right| \le \left|z^2\right| + |2i|$ dir.

$\left|z^2 - 2i\right|$ yerine $|z| + 4$ koyalım:

$$|z|^2 - 2 \le |z| + 4 \le |z|^2 + 2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} |z|^2 - 2 \le |z| + 4 \\ |z| + 4 \le |z|^2 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |z|^2 - |z| - 6 \le 0 \\ |z|^2 - |z| - 2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 2 \le |z| \le 3$ bulunur.

b.

$|z|$ 'nin en küçük değeri 2'dir.

Mutlak değeri 2 olan sayıyı bulalım:

$z = x + yi$ olsun.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$,

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow z^2 - 2i = x^2 - y^2 + (2xy - 2)i$

olur.

$$\sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2xy + 4} = 6$$

$$\Rightarrow 20 - 8xy = 36$$

$\Rightarrow xy = -2$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = -2 \end{array}\right\}$$

sisteminden $x = \mp\sqrt{2}$ ve $y = \pm\sqrt{2}$ bulunur.

Aradığımız sayılar,

$z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$ ve $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$ dir.

$|z|$ 'nin en büyük değeri 3'tür.

Mutlak değeri 3 olan sayıyı bulalım:

$z = x + yi$ olsun.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$,

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow z^2 - 2i = x^2 - y^2 + (2xy - 2)i$

olur.

$$\sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 8xy + 4} = 7$$

$$\Rightarrow 85 - 8xy = 49$$

$\Rightarrow xy = -\dfrac{9}{2}$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = -\dfrac{9}{2} \end{array}\right\}$$

sisteminden $x = \mp\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ve $y = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

Buna göre; mutlak değeri 3 olan 2 sayı vardır.

$z_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

Problem-30

$\left|z^2 - 1\right| = 1$ denklemini sağlayan z karmaşık sayılarına karmaşık düzlemde karşılık gelen noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm

$z = r\cos\theta + i \cdot r\sin\theta$ olsun.

$z^2 = r^2\cos 2\theta + i \cdot r^2 \sin 2\theta$ ve

$z^2 - 1 = -1 + r^2\cos 2\theta + i \cdot r^2\sin 2\theta$ olur.

$\left|z^2 - 1\right| = 1 \Rightarrow \left|z^2 - 1\right|^2 = 1$ dir.

Buna göre;

$$\left|z^2 - 1\right|^2 = (-1 + r^2\cos 2\theta)^2 + (r^2\sin 2\theta)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 1 - 2r^2\cos 2\theta + r^4 = 1$$

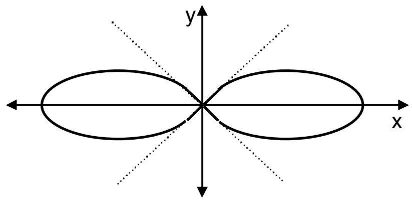
$\Rightarrow r^2 = 2\cos 2\theta$ bulunur.

Bu da; kutupsal koordinatlarda,

$r = -\sqrt{2\cos 2\theta}$ ve $r = \sqrt{2\cos 2\theta}$ eğrilerinin birlikte denklemidir.

$r = \sqrt{2\cos 2\theta}$ denklemi incelenirse;
- verilen eşitliği sağlayan z sayılarından modülü en büyük olanının modülünün $\sqrt{2}$ olduğu,
- modülü en küçük olanının modülünün sıfır olduğu,
- θ değişkenine $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığından değerler verileceği görülür.

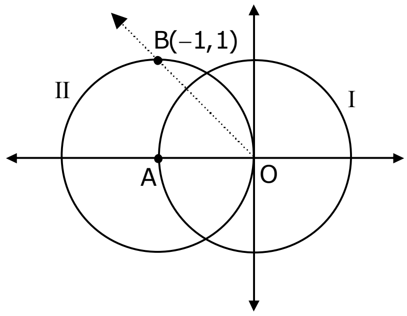
Nokta nokta çizim yapılabilir.
$r^2 = 2\cos 2\theta$'nın grafiği aşağıdaki gibi olur.



Problem-31

$|z| = 1$ ve $Arg(z^2 - 1) = \frac{3\pi}{4}$ eşitliklerini sağlayan z karmaşık sayılarını bulunuz.

Çözüm



Şekilde (I) ile gösterilen çember $|z| = 1$ denklemini sağlayan z sayılarına karşılık gelen noktaların geometrik yeridir. Bu çemberin üzerindeki noktalar z^2 sayılarına da karşılık gelirler. $A(-1, 0)$ merkezli ve 1 birim yarıçaplı çember üzerindeki noktalar da $z^2 - 1$ sayılarına karşılık gelirler. Bu çember üzerinde, argümenti $\frac{3\pi}{4}$ olan sayıya karşılık gelen nokta $B(-1,1)$; bu noktaya karşılık gelen sayı da $-1 + i$ sayısıdır.

$$z^2 - 1 = -1 + i \quad \Rightarrow \quad z^2 = i$$

$$\Rightarrow z_1 = cis\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ ve } z_2 = cis\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ olur.}$$

Problem-32

$Arg(z - 4) + Arg(z - 2i) = \pi$ denklemini sağlayan z karmaşık sayılarına karmaşık düzlemde karşılık gelen noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm

Bunu sizlere bırakıyorum.