Örnek Problem -1

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot y\cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right] & x\neq y \text{ ise} \\ 0 & x=y \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu için $f_{xy}(0,0)+f_{yx}(0,0)$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -1 B) 2 C) 0 D) 1 E) 3

Çözüm

$x\neq y$ iken,

$$f(x,y)=xy\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right]$$

$$\Rightarrow f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{xy\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right]\right\}=y\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right]-\frac{\pi xy^2}{(x-y)^2}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right] \text{ ve}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{xy\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right]\right\}=x\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right]+\frac{\pi x^2y}{(x-y)^2}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right] \text{ olur.}$$

Tanımdan,

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0 \text{ ve}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0 \text{ bulunur.}$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\sin\frac{\pi}{2}-0}{h}=1 \quad \text{ve}$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k\cdot\sin\frac{-\pi}{2}-0}{k}=-1 \text{ olup}$$

$$f_{xy}(0,0)+f_{yx}(0,0)=1+(-1)$$

$$\Rightarrow f_{xy}(0,0)+f_{yx}(0,0)=0$$

elde edilir.

Örnek Problem -2

$f(x,y) = x + 2y$ fonksiyonunun $B = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1\}$ bölgesindeki extremum noktaları aşağıdakilerden hangileridir?

A) $(-1,1)$ ve $(-1,-1)$ B) $(-1,-1)$ ve $(1,-1)$ C) $(-1,-1)$ ve $(0,0)$

D) $(-1,-1)$ ve $(1,1)$ E) $(-1,1)$ ve $(1,-1)$

Çözüm

$f_x = 1$, $f_y = 2$, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 0$ olup $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ dır.

Bu durumda; Δ testi ekstremum noktaları hakkında bilgi vermez.

$f_x = 1 > 0$ olduğundan, y sabit tutulduğunda f fonksiyonu x arttırıldıkça artar.

$f_y = 2 > 0$ olduğundan, x sabit tutulduğunda f fonksiyonu y arttırıldıkça artar.

Öyleyse;

$-1 \le x \le 1$ ve $-1 \le y \le 1$ aralıklarından değerler verilecek olan $f(x,y) = x + 2y$ fonksiyonu

$(x,y) = (-1,-1)$ için en küçük değerini,

$(x,y) = (1,1)$ için en büyük değerini alacaktır.

...

Fonksiyon ile belirtilen bölge;

$f(x,y) = z = x + 2y \quad \Rightarrow \quad x + 2y - z = 0$ düzleminde

$2y - z - 1 = 0$, $2y - z + 1 = 0$, $x - z - 2 = 0$, $x - z + 2 = 0$ doğruları ile sınırlanmış bölgedir.

(Doğru denklemleri, düzlem denklemindeki x ile y değerlerinin verilen aralıklara yerleştirilmesiyle bulundu.)

Örnek Problem -3

B bölgesi $|x|+|y|=1$ karesi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre,

$f(x,y)=y-2x^2$ fonksiyonunun B bölgesi üzerindeki integrali kaçtır?

A) 15 B) $-\frac{7}{3}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

Çözüm

B bölgesi $y=x+1$, $y=-x-1$, $y=x-1$, $y=-x+1$ doğrularının sınırladığı bölgedir.
Koordinat sisteminde gösterilirse, integrali $-1\le x\le 0$ ve $-x-1\le y\le x+1$ aralıklarının belirlediği bölge ile $0\le x\le 1$ ve $x-1\le y\le -x+1$ aralıklarının belirlediği bölgelerde alacağımız anlaşılır.

$$\begin{aligned}\iint_B \left(y-2x^2\right)dxdy &= \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1}\left(y-2x^2\right)dydx+\int_{0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1}\left(y-2x^2\right)dydx\\ &= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}y^2-2x^2y\right)\Bigg|_{-x-1}^{x+1}dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}y^2-2x^2y\right)\Bigg|_{x-1}^{-x+1}dx\\ &= \int_{-1}^{0}\left(-4x^3-4x^2\right)dx+\int_{0}^{1}\left(4x^3-4x^2\right)dx\\ &= \frac{-2}{3}\end{aligned}$$

…

2. bir yol olarak;

$u=x+y$ ve $v=x-y$ dönüşümü yapılırsa, $x=\frac{1}{2}(u+v)$ ve $y=\frac{1}{2}(u-v)$ olur.

$$\begin{aligned}\iint_B \left(y-2x^2\right)dxdy &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(u-v-u^2-v^2-2uv\right)dudv\\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}u^2-vu-\frac{1}{3}u^3-v^2u-vu^2\right)\Bigg|_{-1}^{1}dv\\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(-2v-2v^2-\frac{2}{3}\right)dv\\ &= \frac{-2}{3}\end{aligned}$$

(Baştaki ½ lerden biri dönüşümdeki determinanttan gelir.)

Örnek Problem -4

$(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$ diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^{x-\frac{3}{2}(x+y)}=c\left[4-2(x+y)\right]$

B) $e^{x-y}=4(x+y)$

C) $e^{x-2}=c(4+x)$

D) $y=x+2c$

E) $y=\dfrac{e}{x^2+y^2}$

Çözüm

$z=x+y$ dönüşümü ile, değişkenleri ayrılabilen denkleme dönüştürülür.

$z=x+y \quad \Rightarrow \quad dz=dx+dy \quad \Rightarrow \quad dy=dz-dx$ olur.

Bu ifadeler denklemlerde yerlerine konulursa,

$$zdx+(3z-4)(dz-dx)=0$$

$$\Rightarrow (4-2z)dx+(3z-4)dz=0$$

$$\Rightarrow dx-\frac{3z-4}{2z-4}dz=0$$

$$\Rightarrow dx+\left(\frac{1}{(2-z)}-\frac{3}{2}\right)dz=0$$

$$\Rightarrow x-\ln(2-z)-\frac{3}{2}z+c_1=0$$

$$\Rightarrow \ln(2-z)=x-\frac{3}{2}z+c_1$$

$$\Rightarrow e^{x-\frac{3}{2}z+c_1}=2-z$$

$$\Rightarrow c_2\cdot e^{x-\frac{3}{2}z}=2-z$$

$z=x+y$ ifadesi yerine konulur ve c_2 sağ yana alınırsa,

$e^{x-\frac{3}{2}(x+y)}=c\left[2-(x+y)\right]$ elde edilir.

Bu sonuç A seçeneğindeki gibi yazılabilir.