3.4 – İşlem

3.4.1 – İşlem Kavramı

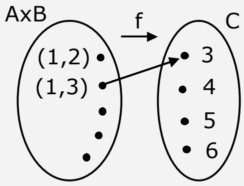
Etkinlik – 3.52

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ ve $C = \{3, 4, 5, 6\}$ kümeleri veriliyor.

a. AxB kümesini yazınız.

b. AxB'den C'ye f bağıntısı $f(x, y) =$ "x ile y'den, küçük olmayanı" biçiminde tanımlanıyor.

f bağıntısını yandaki gibi bir Venn şeması ile gösteriniz.



c. AxB'den C'ye f bağıntısı bir fonksiyon mudur?

d. AxB'nin C ile eşlenen elemanlarının kümesi E olsun. f bağıntısı E'den C'ye bir fonksiyon mudur?

$f : E \to C$ bağıntısının kuralını "Δ" sembolü ile temsil ederek f bağıntısını yandaki gibi bir tablo ile gösteriniz.

Δ	2	3	4 ← B
1	·	3	?
2	·	?	?
3	?	?	4

A ↑ ; f(E) = $\underbrace{\;2\;\;3\;\;4\;}$ sütunları

[(1,2) ve (2,2) ikililerinin C'de görüntüleri olmadığı için, yerleri boş bırakılmıştır.]

Tanım - 3.27

A, B, C kümeleri boş kümeden farklı olmak üzere, AxB'nin bir alt kümesinden C'ye her fonksiyona bir ***ikili işlem*** *denir.*

Etkinlik – 3.52'de yazdığınız, E'den C'ye f fonksiyonu bir ikili işlemdir.

Bu işlemi,

$f(x, y) =$ "x ile y'den, küçük olmayanı" kuralı ile belirtebileceğimiz gibi,

x∆y = "x ile y'den, küçük olmayanı" biçiminde de gösterebiliriz.

Buna göre; örneğin, $3 \Delta 4 = 4$ olur.

Etkinlik – 3.53

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor.

a. AxA'dan A'ya

$f(x, y) =$ "x ile y'den, küçük olmayanı" bağıntısını Venn şeması ile gösteriniz.

b. AxA'dan A'ya f bağıntısı bir fonksiyon mudur?

$f : AxA \to A$ bağıntısının kuralını "Δ" sembolü ile temsil ederek bağıntıyı yandaki gibi bir tablo ile gösteriniz.

Δ	1	2	3
1	1	?	?
2	?	?	3
3	?	3	?

Tanım - 3.28

A kümesi boş kümeden farklı olmak üzere, AxA'nın bir alt kümesinden A'ya her fonksiyona A'da bir ***ikili iç işlem*** *denir.*

Tanım – 3.28 şöyle de ifade edilebilir:

f fonksiyonunun A'da ikili iç işlem olması için gerek ve yeter koşul

$\forall (x, y) \in E,\ E \subset AxA$ için $f(x, y) = z \in A$ olmasıdır.

Etkinlik– 3.53'te yazdığınız AxA'dan A'ya f fonksiyonu bir ikili iç işlemdir.

Tanım – 3.27 ve Tanım – 3.28'den, A'dan B'ye her fonksiyonun **birli işlem**, A'dan A'ya her fonksiyonun **A'da birli iç işlem** olduğu sonucu çıkarılabilir.

$f : AxA \to B$ bir bağıntı, $f(AxA) \neq \varnothing$ olmak üzere, A'da **ikili işlem** belirtir.

$B = A$ ise bu işlem A'da **ikili iç işlem**; $B \neq A$ ise, A'da **ikili işlem**dir.

Biz bu konuda yalnız A'da ikili iç işlemleri inceleyeceğiz. Bu yüzden **işlem** dediğimizde –aksi belirtilmedikçe– bundan **ikili iç işlem** deyimi anlaşılmalıdır.

A'da bir $\mathbf{f(x, y) = z}$ işlemi, işlemin kuralı Δ, ★, o, □, ... gibi sembollerle temsil edilerek, kısaca **x∆y = z , x★y = z , ...** biçiminde gösterilir.

x işlem y ya da **x üçgen işlemi y**,

x yıldız işlemi y, ... diye okunur.

x∆y = z işleminde x'e **birinci bileşen**, y'ye **ikinci bileşen**, z'ye **x ile y'nin ∆ işlemine göre bileşkesi** ya da **x∆ y'nin sonucu** denir.

İşlemlerin birer fonksiyon olarak tanımlanmasından önce +, x, −, :, ∪, ∩, ∨, ∧, … sembollerini birbirinden bağımsız olarak öğrendiğiniz belirli işlemlere karşılık getirerek kullandınız. Yeni anlamlar yüklenmedikçe, bu sembolleri yine bildiğiniz anlamlarda kullanacaksınız.

Örnek – 3.39

$A = \{2,3,4,6\}$, $B = \{1,2,3,4,6\}$ ve A kümesinde x □ y = EBOB(x, y) işlemi verilmiş olsun.

Yukarıda verdiğimiz bilgileri bu işlem üzerinde açıklayalım:

□ işlemine göre,

2□2 = 2	3□2 = 1	4□2 = 2	6□2 = 2
2□3 = 1	3□3 = 3	4□3 = 1	6□3 = 3
2□4 = 2	3□4 = 1	4□4 = 4	6□4 = 2
2□6 = 2	3□6 = 3	4□6 = 2	6□6 = 6

olur. Bu kadar fazla sayıda eşlemenin Venn şemasında gösterilmesi zor olur. Bu yüzden işlemler genellikle bir **işlem tablosu** ile gösterilirler.

□ işlemi, **AxA'nın bir alt kümesinden A'ya bir fonksiyon** (**A'da ikili iç işlem**) olarak tanımlanmış olsun.

Buna göre, □ işleminin tablosunu yapalım:

□	2	3	4	6 ← A
2	2	.	2	2
3	·	3	·	3
4	2	·	4	2
6	2	3	2	6
↑ A		A		

İşlem tablosunda sol sütundaki elemanlar işlemin birinci bileşenleri, üst satırdaki elemanlar işlemin ikinci bileşenleridir. Sol sütundaki bir elemanın satırı ile üst satırdaki bir elemanın sütununun kesiştiği yere, bu elemanların işlemlerinin sonucu yazılmıştır.

$1 \notin A$ olduğundan 2 □ 3 = 1 gibi sonuçlar tabloda gösterilmemiştir.

$E = AxA - \{(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$ olmak üzere, $f : E \to A$, $f(x,y) = EBOB(x,y)$ bağıntısı bir fonksiyondur.

□ işlemi **AxA'nın bir alt kümesinden B'ye bir fonksiyon** (**A'da ikili işlem**) olarak tanımlanmış olsaydı, işlem tablosu yandaki gibi olacaktı.

□	2	3	4	6
2	2	1	2	2
3	1	3	1	3
4	2	1	4	2
6	2	3	2	6
		B		

Burada, $f : AxA \to B$, $f(x,y) = EBOB(x,y)$ bağıntısı bir fonksiyondur.

Bir Kümenin Bir İşleme Göre Kapalılığı

Tanım - 3.29

*A kümesinde f işlemi, AxA'dan A'ya bir fonksiyon ise **A kümesi f işlemine göre kapalıdır**, denir.*

Bu tanıma göre, A kümesinin bir ★ işlemine göre kapalı olması demek

$\forall x,\ y \in A$ için $(x \star y) \in A$ olması demektir.

Örnek – 3.40

$A = \{1,2,3,4,6\}$ kümesinde x□y = EBOB(x, y) işlemi verilmiş olsun.

A kümesi □ işlemine göre kapalıdır. (Sonuçların her biri A kümesinin elemanıdır.)

□	1	2	3	4	6
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2
3	1	1	3	1	3
4	1	2	1	4	2
6	1	2	3	2	6

Etkinlik – 3.54

Doğal sayılar, tam sayılar, gerçek sayılar kümeleri üzerinde **toplama, çıkarma, çarpma, bölme** işlemlerini birer fonksiyon olarak ifade ediniz.

Bu kümelerin bu işlemlere göre kapalı olup olmadıklarını belirtiniz.

Etkinlik – 3.55

$A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinde tanımlanan "o" işleminin tablosu yanda verilmiştir.

o	a	b	c	d	e
a	e	d	a	c	b
b	d	a	b	e	c
c	a	b	c	d	e
d	c	e	d	b	a
e	b	c	e	a	d

a. $d\circ e = ?$

b. $b\circ(a\circ d) = ?$

c. $(a\circ x)\circ b = c\circ d$ eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.

d. $a\circ(x\circ b) = x\circ(d\circ e)$ eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.

e. $a\circ(x\circ d) = x\circ(b\circ e)$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

Etkinlik – 3.56

R'de $x\Delta y = x + 2y - xy$ işlemi veriliyor.

a. $(-1)\Delta 2 = ?$

b. $3\Delta[(-2)\Delta 1] = ?$

c. $2\Delta(3\Delta a) = 4$ ise a kaçtır?

d. $a\Delta(1\Delta 2) = (2\Delta a)\Delta 1$ ise a kaçtır?

Etkinlik – 3.57

R'de $x\square y = \begin{cases} x+y & x<y \text{ ise} \\ x-y & x\geq y \text{ ise} \end{cases}$ işlemi veriliyor.

a. $(2\square 4)\ \square(4\square 2) = ?$

b. $2\square x = x\square 4$ ise x kaçtır?

Etkinlik – 3.58

R'de "$\star$" işlemi $2(x\star y) + (y\star x) = 2x + y$ biçiminde tanımlanıyor.

a. $2\star 3 = ?$

b. "$\star$" işleminin kuralını bulunuz.

3.4.2 – İşlemlerin Özelikleri

Değişme Özeliği

Etkinlik – 3.59

R'de, $x\circ y = 2x + 2y - xy$ ve $x\Delta y = x + 2y$ işlemleri veriliyor.

a. $2\circ 3$ ve $3\circ 2$ değerlerini bulunuz.

b. $a\circ b$ ve $b\circ a$ işlemlerinin sonuçlarını yazınız.

c. $a\circ b$ ve $b\circ a$ işlemlerinin sonuçları arasında bir bağıntı kurabiliyor musunuz?

d. $a\Delta b$ ve $b\Delta a$ işlemlerinin sonuçları arasında c'dekine benzer bir bağıntı var mıdır?

Tanım - 3.30

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun.

$\forall x, y\in A$ için $\boldsymbol{x\circ y = y\circ x}$ *oluyorsa; "o" işleminin* ***değişme özeliği*** *vardır, denir.*

Etkinlik – 3.59'da $a\circ b = b\circ a$ olduğunu göstererek, "o" işleminin değişme özeliğinin olduğunu;

$a\Delta b \neq b\Delta a$ olduğunu göstererek, "Δ" işleminin değişme özeliğinin olmadığını ispatlamış oldunuz.

A'da bir işlem tablosunda xoy ve yox değerleri, köşegene göre simetrik konumlarda bulunurlar. O hâlde, işlem tabloları köşegene göre simetrik olan işlemlerin değişme özelikleri vardır.

Örnek – 3.41

Yandaki işlem tablosunun köşegene göre simetrik olduğuna dikkat ediniz. O hâlde, $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde "$\star$" işleminin değişme özeliği vardır. Örneğin; $b\star c = a$ ve $c\star b = a$ olup $b\star c = c\star b$ dir.

$\star$	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

Birleşme Özeliği

Etkinlik – 3.60

R'de, $x\circ y = x + y - 2$ ve $x\Delta y = 2x + y$ işlemleri veriliyor.

a. $(3\circ 5)\circ 4$ ve $3\circ(5\circ 4)$ değerlerini bulunuz.

b. $(a\circ b)\circ c$ ve $a\circ(b\circ c)$ işlemlerinin sonuçlarını bulunuz. Bu sonuçlar arasında bir bağıntı kurabiliyor musunuz?

c. $(a\Delta b)\Delta c$ ve $a\Delta(b\Delta c)$ işlemlerinin sonuçları arasında benzer bir bağıntı var mı?

Tanım - 3.31

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun.

$\forall x, y, z \in A$ için $\boldsymbol{xo(yoz) = (xoy)\,oz}$ *oluyorsa; A'da "o" işleminin* ***birleşme özeliği*** *vardır.*

Etkinlik – 3.60'ta $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ olduğunu göstererek, "o" işleminin birleşme özeliğinin olduğunu; $(a\Delta b)\Delta c \neq a\Delta(b\Delta c)$ olduğunu göstererek, "Δ" işleminin birleşme özeliğinin olmadığını ispatlamış oldunuz.

Bir işlemin birleşme özeliği varsa, bu işlemin art arda uygulanmasında parantez kullanma zorunluluğu yoktur.

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$ yazılabilir.

Bir işlemin hem birleşme hem değişme özelikleri varsa, bu işlemin art arda uygulanmasında elemanların sıralaması istenildiği gibi değiştirilebilir.

$(a \circ b) \circ c = b \circ c \circ a = c \circ a \circ b = , \ldots$ gibi.

Etkinlik – 3.61

a. Gerçek sayılar kümesinde **toplama, çıkarma, çarpma, bölme** işlemlerinin;

b. Bir E kümesinin kuvvet kümesinde **birleşme, kesişme, fark, kartezyen çarpım** işlemlerinin;

c. Önermelerde **birleşme ($\vee$), kesişme ($\wedge$), koşul ($\Rightarrow$)** işlemlerinin

değişme ve **birleşme** özeliklerinin olup olmadığını belirtiniz.

Etkinlik – 3.62

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinde "$\star$" işleminin değişme ve birleşme özelikleri vardır.

$2\star 4 = 2$ ve $5\star 2 = 4$ olduğuna göre,

a. $(4\star 5)\star(2\star 2)$ işleminin sonucu kaçtır?

b. $(2\star 5)\star(4\star 4)$ işleminin sonucu kaçtır?

Bir İşlemin Diğer Bir İşlem Üzerine Dağılma Özeliği

Etkinlik – 3.63

R'de, $x \circ y = 2xy$ ve $x\Delta y = 2x + y$ işlemleri veriliyor.

a. $a \circ (b\Delta c)$ işleminin sonucunu yazınız.

b. $(a \circ b)\Delta(a \circ c)$ işleminin sonucunu yazınız.

c. $a \circ (b\Delta c)$ ve $(a \circ b)\Delta(a \circ c)$ işlemlerinin sonuçları arasında bir bağıntı kurabiliyor musunuz?

d. $a\Delta(b \circ c)$ işleminin sonucunu yazınız.

e. $(a\Delta b) \circ (a\Delta c)$ işleminin sonucunu yazınız.

f. $a\Delta(b \circ c)$ ve $(a\Delta b) \circ (a\Delta c)$ işlemlerinin sonuçları arasında c'deki gibi bir bağıntı kurabiliyor musunuz?

Tanım - 3.32

A kümesinde, "o" ve "Δ" işlemleri verilmiş olsun.

$\forall x, y, z \in A$ *için,* $\boldsymbol{xo(y\Delta z) = (xoy)\Delta(xoz)}$ *oluyorsa; A'da "o" işleminin "Δ" işlemi üzerine* ***soldan dağılma özeliği*** *vardır, denir.*

$\forall x, y, z \in A$ *için,* $\boldsymbol{(x\Delta y)oz = (xoz)\Delta(yoz)}$ *oluyorsa; A'da "o" işleminin "Δ" işlemi üzerine* ***sağdan dağılma özeliği*** *vardır, denir.*

Bir "o" işleminin bir "Δ" işlemi üzerine hem soldan hem sağdan dağılma özeliği varsa; bu kısaca, **"o" işleminin "Δ" işlemi üzerine dağılma özeliği vardır**, diye ifade edilir.

Etkinlik – 3.63'te verilen "o" işleminin, "Δ" işlemi üzerine soldan dağılma özeliği olduğunu

$a \circ (b\Delta c) = (a \circ b)\Delta(a \circ c)$ eşitliğini kurarak gösterdiniz. "Δ" işleminin "o" işlemi üzerine soldan dağılma özeliği olmadığını gördünüz.

"o" işleminin "Δ" işlemi üzerine sağdan dağılma özeliği olduğunu da gösteriniz.

Etkinlik – 3.64

R'de, $x \circ y = x + 3y$ ve $x\Delta y = 2x - y$ işlemleri veriliyor.

"o" işleminin "Δ" işlemi üzerine dağılma özeliği olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 3.65

a. Gerçek sayılar kümesinde **çarpma** işleminin, **toplama** ve **çıkarma** işlemleri üzerine;

b. Gerçek sayılar kümesinde **bölme** işleminin, **toplama** ve **çıkarma** işlemleri üzerine;

c. önermelerde "$\wedge$" ile "$\vee$" işlemlerinin birbiri üzerine;

d. önermelerde "⇒" işleminin "∧" ile "∨" işlemleri üzerine;

e. bir E kümesinin kuvvet kümesinde "∪" ile "∩" işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özeliklerinin olup olmadığını belirtiniz.

Bir Kümenin Bir İşleme Göre Etkisiz (Birim) Elemanı

Etkinlik – 3.66

R'de, $x \circ y = x + y - 2$ işlemi veriliyor.

a. $2 \circ 3 = ?$ **b.** $4 \circ 2 = ?$ **c.** $2 \circ (-3) = ?$

Tanım - 3.33

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun. A'nın her x elemanı için $\mathbf{x \circ e = x}$ *ve* $\mathbf{e \circ x = x}$ *eşitliklerini gerçekleyen bir* $e \in A$ *varsa,* ***e****'ye A kümesinin "o" işlemine göre* ***etkisiz eleman****ı ya da* ***birim eleman****ı denir.*

Örneğin, gerçek sayılar kümesinde toplama işlemine göre etkisiz eleman 0; çarpma işlemine göre etkisiz eleman 1'dir. Çıkarma ve bölme işlemlerine göre etkisiz elemanlar yoktur. (Neden?)

Etkinlik – 3.67

Boş kümeden farklı sonlu bir E kümesinin kuvvet kümesinin;

a. "∪" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) belirtiniz.

b. "∩" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) belirtiniz.

Teorem - 3.9

Bir A kümesinde tanımlı bir "o" işlemine göre, A'nın etkisiz elemanı (varsa) bir tanedir.

İspat

A kümesinin, "o" işlemine göre $\mathbf{e_1}$ ve $\mathbf{e_2}$ gibi birbirinden farklı iki tane etkisiz elemanı olduğunu varsayalım.

Etkisiz elemanın tanımına göre,

$\forall x \in A$ için, $x \circ e_1 = x = e_1 \circ x$ ① ve

$x \circ e_2 = x = e_2 \circ x$ ② dir.

Bu eşitlikler A'nın her elemanı için doğru olacağından e_2 elemanı ①'i, e_1 elemanı ②'yi sağlar.

Buna göre,

$e_2 \circ e_1 = e_2 = e_1 \circ e_2$ ③ ve

$e_1 \circ e_2 = e_1 = e_2 \circ e_1$ ④ olur.

③ ve ④'ten, $e_1 = e_2$ bulunur.

Bu da bize, birbirinden farklı e_1 ve e_2 gibi iki etkisiz elemanın olamayacağını gösterir.

Örnek – 3.42

R'de, $x \circ y = 2x + 2y - xy - 2$ işlemi veriliyor.

R'nin "o" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) bulunuz.

Çözüm

$\forall x \in R$ için, $x \circ e = x$ ve $e \circ x = x$ eşitliklerini sağlayan bir e sayısının bulunup bulunmadığını araştıracağız.

İşlemin kuralına göre, $x \circ y = y \circ x$ olduğu kolayca görülür. Demek ki, işlemin değişme özeliği vardır.

O hâlde; $\forall x \in R$, $x \circ e = x$ eşitliğini sağlayan e değerini aramak yeter.

$x \circ y = 2x + 2y - xy - 2$

$\Rightarrow x \circ e = 2x + 2e - xe - 2$ olur.

e etkisiz eleman olduğundan

$x \circ e = x$

$\Rightarrow 2x + 2e - xe - 2 = x$

$\Rightarrow 2e - xe = 2 - x$

$\Rightarrow e(2 - x) = 2 - x$ bulunur.

$x = 2$ olduğunda, e'nin her değeri için eşitlik sağlanır. Bu durumu **bir elemanın tersi** kısmında inceleyeceğiz.

$x \neq 2$ için,

$$e = \frac{2-x}{2-x} \Rightarrow e = 1 \text{ olur.}$$

Buna göre, hiç işlem yapmadan,

örneğin; $3 \circ 1 = 3$, $1 \circ (-5) = -5, \ldots$ olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek – 3.43

R'de, $x\Delta y = 2xy - x + y - 1$ işlemi veriliyor.

R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) bulunuz.

Çözüm

"Δ" işleminin değişme özeliğinin olmadığını görünüz. O hâlde,

$\forall x \in R$ için, $x\Delta e = x$ ve $e\Delta x = x$ eşitliklerinin ikisini de sağlayan e değerini arayacağız.

Önce $\forall x \in R$ için $x o e = x$ eşitliğini sağlayan e'yi bulalım:

$x\Delta y = 2xy - x + y - 1$

$\Rightarrow x\Delta e = 2xe - x + e - 1$ olur.

$x\Delta e = x$

$\Rightarrow 2xe - x + e - 1 = x$

$\Rightarrow 2xe + e = 2x + 1$

$\Rightarrow e(2x+1) = 2x + 1$

$\Rightarrow e = 1 \quad (2x + 1 \neq 0)$ bulunur.

Bundan sonrasını iki değişik yolla yapabiliriz.

I. yol

Bir de $\forall x \in R$ için, $e\Delta x = x$ eşitliğini sağlayan e değerini bulalım:

$x\Delta y = 2xy - x + y - 1$

$\Rightarrow e\Delta x = 2ex - e + x - 1$ olur.

$e\Delta x = x$

$\Rightarrow 2ex - e + x - 1 = x$

$\Rightarrow e(2x-1) = 1$

$\Rightarrow e = \dfrac{1}{2x-1} \qquad (2x - 1 \neq 0)$ bulunur.

Etkisiz eleman varsa, yalnız bir tane olacağından, e x'e bağlı olamaz. Burada da $e = 1$ bulmalıydık.

O hâlde, R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı yoktur.

II. yol

R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı 1 ise,

$\forall x \in R$ için $1\Delta x = x$ olmalıdır.

$x\Delta y = 2xy - x + y - 1$

$\Rightarrow 1\Delta x = 2 \cdot 1 \cdot x - 1 + x - 1$

$\Rightarrow 1\Delta x = 3x - 2$ olur.

Bu durumda,

$\forall x,\ 1\Delta x = x$

$\Rightarrow \forall x,\ 3x - 2 = x$ önermesi yanlıştır.

O hâlde, R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı yoktur.

✚ Bir A kümesinin bir "o" işlemine göre etkisiz elemanının var olduğu biliniyorsa, etkisiz elemanı bulmak için **$\forall x \in A$, $x o e = x = e o x$** önermesinin A'nın herhangi bir elemanı için **yorumlama**sından yararlanılabilir.

Örnek – 3.44

R'de, $x\Delta y = 3xy + 3y + 2xy + 3$ işlemi veriliyor.

R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı var olduğuna göre, bu kaçtır?

Çözüm

Etkisiz eleman e olsun. Örneğin, $0\Delta e = 0$ olmalıdır.

$x\Delta y = 3x + 3y + 2xy + 3$

$\Rightarrow 0\Delta e = 3 \cdot 0 + 3e + 2 \cdot 0 \cdot e + 3$ olur.

$0\Delta e = 0$

$\Rightarrow 3e + 3 = 0$

$\Rightarrow e = -1$ bulunur.

Bu yöntem test sorularının çözümünde işe yarar.

Örnek – 3.45

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde "$\star$" işlemi tablodaki gibi tanımlanmıştır. A'da "$\star$" işleminin etkisiz elemanı nedir?

$\star$	a	b	c	d
a	c	a	d	b
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	b	d	a	c

Çözüm

İşlemin elemanlarının birinci bileşenlerinin bulunduğu sütun, ikinci bileşenlerin bulunduğu satırda "b"nin altına yazılmıştır. Buna göre;

$a\star b = a,\ b\star b = b,\ c\star b = c,\ d\star b = d$ olduğundan etkisiz eleman "b" olabilir.

İşlemin elemanlarının ikinci bileşenlerinin bulunduğu satır, birinci bileşenlerin bulunduğu sütunda yine "b"nin hizasına yazılmıştır.

O hâlde, etkisiz eleman "b" dir.

Kısaca;

İşlem tablosu ile verilen işlemlerde; sonuçların, kümedeki elemanların sırasıyla göründüğü satır ile sütunun kesişimindeki eleman etkisiz elemandır. Doğal olarak, bu elemanın köşegen üzerinde olması gerekir.

Etkinlik – 3.68

Gerçek sayılar kümesinin, aşağıda verilen işlemlere göre etkisiz elemanlarını (varsa) bulunuz.

Etkisiz elemanın varlığı, işlemin değişme özeliğinin olmasını zorunlu kılar mı?

a. $x \circ y = x + y + 3$

b. $x \Delta y = x + y - 2xy$

c. $x \star y = 2x + 3y - xy - 3$

d. $x \square y = x + y + x^2 y$

Bir Kümenin Bir İşleme Göre Yutan Elemanı

Etkinlik – 3.69

Z'de, $x \Delta y = 4x + 4y - 2xy - 6$ işlemi veriliyor.

a. $(-3)\Delta 2 = ?$ **b.** $4\Delta 2 = ?$ **c.** $2\Delta 8 = ?$

Tanım - 3.34

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun. A'nın her x elemanı için **xoy = y** *ve* **yox = y** *eşitliklerini gerçekle-yen bir y∈A varsa,* ***y****'ye A kümesinin "o" işlemine göre* ***yutan eleman****ı denir.*

Örneğin; R'nin çarpma işlemine göre yutan elemanı sıfırdır.

$\forall x \in R$ için, $x \cdot 0 = 0$ ve $0 \cdot x = 0$ olur.

Etkinlik – 3.69'da Z kümesinin "Δ" işlemine göre yutan elemanının 2 olabileceğini sezmişsinizdir.

Ancak, üç denemeyle yutan elemanın 2 olduğunu söyleyemeyiz. Bunun ispatlanması gerekir.

Örnek – 3.46

Z'de, $x \Delta y = 4x + 4y - 2xy - 6$ işlemi veriliyor.

Z'nin "Δ" işlemine göre yutan elemanının "2" olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\forall x \in Z$ için $x\Delta 2 = 2$ önermesinin doğru olduğu gösterilmelidir. İşlemin değişme özeliği olduğundan, "$\forall x,\ 2\Delta x = 2$"nin doğruluğunu da göstermeye gerek yoktur.

Gerçekten,

$x \Delta y = 4x + 4y - 2xy - 6$

$\Rightarrow x\Delta 2 = 4x + 4 \cdot 2 - 2 \cdot x \cdot 2 - 6$

$\Rightarrow x\Delta 2 = 2$ bulunur.

2, Z'nin "Δ" işlemine göre yutan elemanıdır.

Örnek – 3.47

R'de, $x \star y = x + y - 2xy$ işlemi veriliyor.

R'nin "⋆" işlemine göre yutan elemanını (varsa) bulunuz.

Çözüm

İşlemin değişme özeliği olduğundan

$\forall x,\ x \star y = y$ önermesini doğru yapan y değerini bulmamız yeterlidir.

$\forall x,\ x \star y = y$

$\Rightarrow \forall x,\ x + y - 2xy = y$

$\Rightarrow \forall x,\ x(1 - 2y) = 0$ olur.

$y = \frac{1}{2}$ iken bu önerme doğrudur. R'nin, "⋆" işlemine göre yutan elemanı $\frac{1}{2}$ dir.

Örnek – 3.48

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde "⋆" ve "Δ" işlemleri tablolardaki gibi tanımlanmıştır.

⋆	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	a	b	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	a

Δ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	b	d	a
c	b	b	b	b
d	d	b	a	c

A'nın "⋆" işlemine göre etkisiz elemanı "b"; yutan elemanı "c" dir. (Neden?)

A'nın "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı da yutan elemanı da yoktur. (Neden?)

Teorem - 3.10

Bir A kümesinde tanımlı bir "o" işlemine göre, A'nın yutan elemanı (varsa) bir tanedir.

Etkinlik – 3.70

Teorem – 3.10'u ispatlayınız.

Etkinlik – 3.71

R'de, $x \star y = 3x + 3y - 2xy + k$ işlemi veriliyor.

R'nin "$\star$" işlemine göre yutan elemanı var olduğuna göre, bu kaçtır?

Bir İşleme Göre Bir Elemanın Tersi

Tanım - 3.35

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun. A'nın "o" işlemine göre ***e*** *etkisiz elemanı varsa ve belli bir $a \in A$ için $\mathbf{a o b} = \mathbf{b o a} = \mathbf{e}$ eşitliklerini sağlayan en az bir $b \in A$ varsa, b'ye* ***a'nın "o" işlemine göre tersi*** *denir. A'nın tersi* $\mathbf{a^{-1}}$ *ile gösterilir.*

$\mathbf{a o a^{-1}} = \mathbf{a^{-1} o a} = \mathbf{e}$ olacağından a^{-1} in tersi de a olur.

$\mathbf{e o e} = \mathbf{e}$ olup $\mathbf{e^{-1}} = \mathbf{e}$ dir.

Gerçek sayılar kümesinde, bir **a** sayısının toplama işlemine göre tersi $-\mathbf{a}$; çarpma işlemine göre tersi $\mathbf{\frac{1}{a}}$ $(a \neq 0)$ dır. Çıkarma ve bölme işlemlerine göre etkisiz elemanlar olmadığından, bu işlemlere göre ters elemanlardan söz edilemez.

! Ters eleman kavramı tanıtılmadan önce $\mathbf{a^{-1}}$ sembolünü, a'nın çarpma işlemine göre tersi olan $\mathbf{\frac{1}{a}}$ anlamında kullandınız.

Artık $\mathbf{a^{-1}}$ sembolünün anlamının daha geniş olduğunu biliyorsunuz. Bu sembolü gördüğünüzde; bunun, a'nın hangi işleme göre tersi olduğunu araştırmanız gerekir. Ortada tanımlanmış başka bir işlem yok iken yine a^{-1} i $\frac{1}{a}$ anlamında kullanabilirsiniz.

Aşağıdaki örnekte bir kümenin bir işleme göre **etkisiz eleman**ı, **yutan eleman**ı ve **tersi olmayan eleman**ları arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

Örnek – 3.49

R'de, $x \star y = 3x + 3y + xy + 6$ işlemi veriliyor.

a. R'nin "$\star$" işlemine göre **etkisiz eleman**ını, **tersi olmayan eleman**ını, **yutan eleman**ını bulunuz.

b. R'de, $\star$ işlemine göre (-1) in tersini bulunuz.

c. R'de, $\star$ işlemine göre a'nın $(a \neq -3)$ tersini bulunuz.

Çözüm

a. Etkisiz elemanı bulmak üzere işe başlayalım.

$\forall x \in R$ için $x \star e = e \star x = x$ önermesini doğru yapan e değerini bulacağız. İşlemin değişme özeliği olduğundan $\forall x$, $x \star e = x$ önermesini doğru yapan e değerini bulmak yeterlidir.

$x \star e = x$

$\Rightarrow 3x + 3e + x \cdot e + 6 = x$

$\Rightarrow e(3 + x) = -2(3 + x)$ olur.

Bu eşitlik hem etkisiz elemanı, hem tersi olmayan elemanı hem de yutan elemanı bulmamıza yetecektir.

$\forall x$, $e(3 + x) = -2(3 + x)$ önermesinin $x = -3$ yorumlaması e'nin her değeri için doğrudur.

$(-3) \star e = -3$ ve $e \star (-3) = -3$ eşitlikleri her $e \in R$ için sağlanır.

O hâlde, $-\mathbf{3}$ **yutan eleman**dır.

$e = \dfrac{-2(3 + x)}{3 + x}$ ifadesi $x = -3$ için tanımsızdır.

$x = -3$ için etkisiz eleman tanımsız olduğundan, -3'ün tersinden söz edilemez.

O hâlde; $-\mathbf{3}$, R'nin "$\star$" işlemine göre **tersi olmayan eleman**ıdır.

$x \neq -3$ için, $e = \dfrac{-2(3 + x)}{3 + x} \Rightarrow \mathbf{e = -2}$ bulunur.

Her ne kadar, $x = -3$ için "e" tanımsız ise de $(-3) \star e = -3$ ve $e \star (-3) = -3$ eşitlikleri $e = -2$ için de sağlandığından $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x \star e = x}$ önermesi $e = -2$ için doğru olur. $-\mathbf{2}$ değeri R'nin $\star$ işlemine göre **etkisiz eleman**ıdır.

Kısaca; bir kümenin bir işleme göre tersi olmayan elemanı, etkisiz elemanı tanımsız yapan elemandır. Yutan eleman ile tersi olmayan eleman aynıdır.

b. (-1) in tersi k olsun. Tanıma göre,

$x o x^{-1} = e$

$\Rightarrow (-1) o k = -2$

$\Rightarrow 3\cdot(-1)+3\cdot k+(-1)\cdot k+6=-2$

$\Rightarrow k=\frac{-5}{2}$ bulunur.

c. a'nın tersi k olsun.

$x o x^{-1} = e$

$\Rightarrow a o k = -2$

$\Rightarrow 3a+3k+a\cdot k+6=-2$

$\Rightarrow (3+a)k=-8-3a$

$\Rightarrow k=\frac{-8-3a}{3+a}$ $(a\neq -3)$ bulunur.

Etkinlik – 3.72

R'de, $x o y = 2x+2y+xy+2$ işlemi veriliyor.

a. R'nin "o" işlemine göre etkisiz elemanını bulunuz.
b. R'de, "o" işlemine göre hangi elemanın tersi yoktur?
c. R'nin "o" işlemine göre yutan elemanını bulunuz.
d. R'de, "o" işlemine göre 2'nin tersini bulunuz.
e. R'de, "o" işlemine göre tersi tanımlı olan a sayısının tersini bulunuz.

Etkinlik – 3.73

R'de, $x o y = x+y+xy$ işlemi veriliyor. "o" işleminin birleşme özeliği olduğuna göre,
$2 o 3^{-1} = a o 4$ eşitliğini sağlayan a değerini en kısa yoldan bulunuz.

Etkinlik – 3.74

$A=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde "★" işlemi tablodaki gibi tanımlanmıştır.

★	a	b	c	d	e
a	c	d	a	e	b
b	e	a	b	c	d
c	a	b	c	d	e
d	b	c	d	e	a
e	d	a	e	b	c

a. A kümesinin "★" işlemine göre etkisiz elemanı nedir?
b. "★" işleminin değişme özeliği var mıdır?
c. "★" işleminin birleşme özeliği var mıdır?
d. $(a\star b)\star(d\star c)=?$
e. $(b\star d^{-1})\star(d\star e^{-1})=?$
f. $(b^{-1}\star x)\star c^{-1}=a^{-1}\star d$ denklemini sağlayan x değerini bulunuz.

Alıştırmalar ve Problemler – 3.4

1. Aşağıda, R'de işlemler verilmiştir.
Her birindeki istenenleri bulunuz.

a. $x o y = x^y - x\cdot y$; $2 o (-1) = ?$

b. $2^x \star 2^y = \frac{x}{y}-\frac{y}{x}$; $\left(\frac{1}{2}\right)\star\left(\frac{1}{4}\right)=?$

c. $\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)\Delta\left(\frac{1}{y}\right)}=\frac{x}{y}$; $2\Delta 4=?$

d. $x \square y = \begin{cases} 2x+y & x\le y \text{ ise} \\ x-2y & x>y \text{ ise}\end{cases}$; $(3\square 2)\square 4=?$

2. $A=\{a,b,c\}$ ve AxA'nın bir alt kümesi,
$E=\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,c)\}$ olsun.
$f:E\to A$ fonksiyonu $f(a,a)=b$, $f(a,b)=c$,
$f(b,c)=a$, $f(c,c)=b$ biçiminde tanımlanıyor.

a. f, A'da bir işlem midir?
b. A, f işlemine göre kapalı mıdır?
c. RxR'den R'ye $g(3^x,3^y)=\frac{x}{y}-x\cdot y$ biçiminde tanımlı bir g bağıntısı R'de bir işlem midir?
d. R, g işlemine göre kapalı mıdır?

3. $A=\{-1,0,1\}$ olduğuna göre,

a. A kümesi toplama işlemine göre kapalı mıdır? A'nın toplama işlemine göre etkisiz elemanı ve her elemanının tersi var mıdır?
b. A kümesi çarpma işlemine göre kapalı mıdır? A'nın çarpma işlemine göre etkisiz elemanı ve her elemanının tersi var mıdır?

4. $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ kümesinde "Δ" işleminin birleşme özeliği vardır.
$2\Delta 5=3$, $3\Delta 4=5$ ve $5\Delta 3=2$ olduğuna göre;

a. $2\Delta(5\Delta 4)$ ün değeri kaçtır?
b. $(5\Delta 2)\Delta(5\Delta 2)\Delta(5\Delta 4)$ ün değeri kaçtır?
c. "Δ" işleminin değişme özeliği de varsa, $(5\Delta 4)\Delta(3\Delta 2)$ nin değeri kaçtır

5. R'de $x \circ y = 3xy - 2x - y$ işlemi veriliyor.

a. $(-2)\circ(-3) = ?$

b. $3\circ[(-1)\circ 2] = ?$

c. $(1\circ a)\circ 3 = (-3)\circ(-1)$ ise a kaçtır?

d. $(-1)\circ(a\circ 2) = (-2\circ a)\circ(-1)$ ise a kaçtır?

6. R'de $x \star y = x + 2y + xy$ işlemi veriliyor.

a. "$\star$" işleminin değişme ve birleşme özeliklerinin varlığını araştırınız.

b. R'nin "$\star$" işlemine göre etkisiz elemanı var mıdır?

7. $A = \{0,1,2,3,4\}$ kümesinde,
$x \oplus y = $ "x + y'nin 5 ile bölümünden kalan"
ve
$x \odot y = $ "$x \cdot y$'nin 5 ile bölümünden kalan"
işlemleri veriliyor.

a. "$\oplus$" ve "$\odot$" işlemlerini tablo ile gösteriniz.

b. İşlemlerin değişme ve birleşme özeliklerinin varlığını araştırınız.

c. A'nın "$\oplus$" ve "$\odot$" işlemlerine göre etkisiz elemanlarını (varsa) bulunuz.

d. A'nın elemanlarının, verilen işlemlere göre terslerini (varsa) bulunuz.

e. "$\odot$" işleminin "$\oplus$" işlemi üzerine dağılma özeliği var mıdır?

8. R'de, $x \circ y = x + y - 2$, $x \star y = 2y - x$,

$x \Delta y = y^x - xy$, $x \square y = 2 - xy$

işlemleri veriliyor.

a. $(-1\circ 3)\star(2\Delta 1) = ?$

b. $(3\star 4)\square(-2\circ 2) = ?$

c. $(3\circ x)\star(1\Delta 3) = (-2\square x)\circ 2$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

d. $(2\star 2x)\circ(3x\square 1) = (x\Delta 1)\circ(4x)$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

9. R'de "Δ" işleminin birleşme ve değişme özelikleri vardır.

$3(x\Delta y) + 6xy = 2x + 2y + (y\Delta x)$ olduğuna göre,

a. $-2\Delta 3$ ün değeri kaçtır?

b. "Δ" işleminin kuralını bulunuz.

10. R'de "$\square$" işlemi için

$x(x\square y) + xy + 2y = 2x^2 + x + (y\square x)$ olduğuna göre,

a. $2\square 3$ ün değeri kaçtır?

b. "$\square$" işleminin kuralını bulunuz.

11. R'de aşağıda verilen işlemlere göre, etkisiz elemanları, yutan elemanları, tersi kendine eşit olan elemanları, tersi tanımlı olan elemanların terslerini bulunuz.

a. $x \circ y = x + y + 2$

b. $x \Delta y = x + y + 4xy$

c. $x \star y = 4x + 4y + 3xy + 4$

12. R'de, $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + k$ işlemine göre etkisiz elemanın bulunduğu bilindiğine göre;

a. k kaçtır?

b. Etkisiz eleman kaçtır?

c. Tersi olmayan eleman kaçtır?

13. R'de, $x \circ y = x + y + kxy$ işlemine göre,

$1^{-1} = \frac{1}{2}$ olduğu bilinmektedir.

Buna göre, 2^{-1} kaçtır?

14. N'de, $x \circ y = x^2 y$ ve $x \Delta y = 2x + y$ işlemleri veriliyor.
"$\circ$" işleminin "Δ" işlemi üzerine dağılma özeliği var mıdır?

15. R'de, $x \circ y = ax + by + cxy$ işleminin,

a. değişme özeliğinin olması için a, b, c kat sayıları hangi koşulları sağlamalıdır?

b. birleşme özeliğinin olması için a, b, c kat sayıları hangi koşulları sağlamalıdır?

16. R'de, $x \star y = ax + by$ ve $x \square y = cx + dy$ işlemleri veriliyor.
"$\star$" işleminin "$\square$" işlemi üzerine dağılma özeliğin olması için a, b, c, d kat sayıları hangi koşulları sağlamalıdır?

17. R'de, $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$ işleminin birleşme özeliği olduğuna göre, $x \circ 3 = 2$ ise x kaçtır? (Etkisiz elemanı bulmadan çözünüz.)

18. R^2'de, $(x,y)\circ(z,t) = (x+z, y\cdot t)$ işlemi veriliyor.

a. $(2,3)\circ(1,2) = ?$

b. $(-1,2)\circ(x,y) = (3,6)$ ise $(x,y) = ?$

c. R^2'nin "$\circ$" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) bulunuz.

d. $(3,4)^{-1} = ?$

19. R^2'de, "$\star$" ve "Δ" işlemleri için,

$a\cdot(a\star b) = a^3 - b^3 + b(a\Delta b)$ ve

$a\cdot(a\Delta b) = ab^2 - b + (a\star b)$ eşitlikleri geçerlidir.

a. $1\star 2$ nin değeri kaçtır?

b. "$\star$" ve "Δ" işlemlerinin kurallarını bulunuz.

20. $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ kümesinde "□" işlemi tabloda verilmiştir.

□	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	1	1	2	3	6
3	3	1	1	1	2	4
4	4	2	1	1	1	3
6	6	3	2	1	1	2
12	12	6	4	3	2	1

a. 2□(12□4) = ?

b. (3□x) □4 = 2 ise x kaçtır?

c. (2□6) □ x = 6 denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

d. (3□12) □x = 1 denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

e. 4'ün "□" işlemine göre terslerini bulunuz.

f. "□" işlemine göre, $(6□2^{-1})□3^{-1}$ ifadesinin belirli bir değeri var mıdır?

21. R^2 den R'ye,

$f(x,y) =$ "x ve y'den, büyük olmayanı" ve

$g(x,y) =$ "x ve y'den, küçük olmayanı" fonksiyonları veriliyor.

$f(g(2,3), f(-2,-3))$ değeri kaçtır?

22. $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinde "Δ" işlemi tabloda verilmiştir.

Δ	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	3	5	0	2	4
2	2	5	1	4	0	3
3	3	0	4	1	5	2
4	4	2	0	5	3	1
5	5	4	3	2	1	0

a. İşlemin değişme özeliği var mıdır?

b. İşlemin birleşme özeliği var mıdır?

c. $(1\Delta 2)\Delta(2^{-1}\Delta 4) = ?$

d. $(2\Delta x)\Delta 3^{-1} = 1^{-1}\Delta 4^{-1}$ ise x kaçtır?

e. $(2^{-1}\Delta x)\Delta 3 = x^{-1}\Delta(4\Delta 5)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

f. $3^{-1}\circ(2\circ x) = (x\circ 3)\circ 2^{-1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

23. $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinde "$\star$" işlemi tablodaki gibi tanımlanmıştır.

$\star$	a	b	c	d	e
a	e	d	a	c	b
b	d	a	b	e	c
c	a	b	c	d	e
d	c	e	d	b	a
e	b	c	e	a	d

A'dan A'ya

$f(x) = a^{-1}\star x$ ve

$g(x) = x^{-1}\star a$

olduğuna göre, $f(b)\star g(d)$ işleminin sonucu nedir?

24. $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinde "$\star$" işlemi tabloda verilmiştir.

$\star$	a	b	c	d	e
a	e	d	a	c	b
b	d	a	b	e	c
c	a	b	c	d	e
d	c	e	d	b	a
e	b	c	e	a	d

$\forall x, y \in A$ için;

a. $x\Delta y = x\star e\star y$ biçiminde tanımlanan "Δ" işlemine göre, A'nın etkisiz elemanı nedir?

b. $x□y = x\star y\star a$ biçiminde tanımlanan "□" işlemine göre, A'nın etkisiz elemanı nedir?