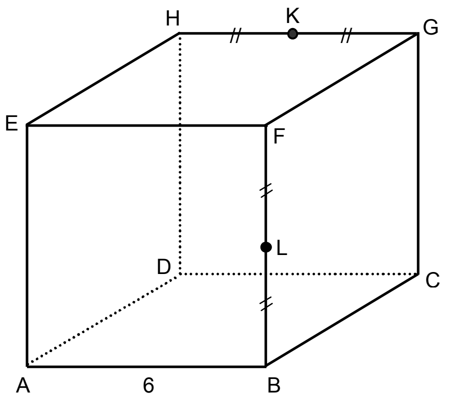
Uzayda Doğru ve Düzlem **Çalışma Kağıdı-5** **Muharrem Şahin**

1.



ABCDEFGH, ayrıt uzunluğu 6 birim olan bir küptür. $K \in [HG]$, $L \in [BF]$, $|HK| = |KG|$ ve $|BL| = |LF|$ 'dir.

DA doğrusu x ekseni, DC doğrusu y ekseni, DH doğrusu z ekseni olacak biçimde bir koordinat sistemi belirtiniz.

Bu koordinat sisteminde;

a. Köşelerin ve K ile L noktalarının koordinatlarını bulunuz.

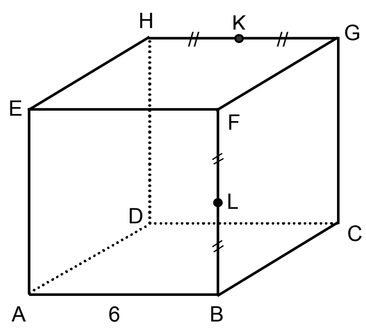
b. Ayrıtları taşıyan doğruların denklemlerini bulunuz.

c. AK, EK, KL, AL ve DL doğrularının denklemlerini bulunuz.

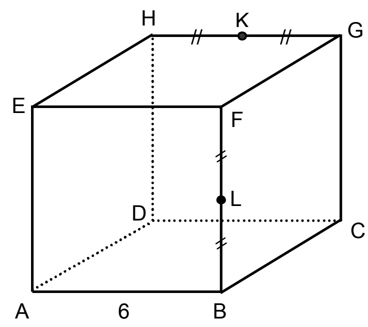
d. Küpün yüzlerini taşıyan düzlemlerin denklemlerini bulunuz.

e. (ACG), (ADG), (BCE), (BDF) ve (DEG) düzlemlerinin denklemlerini bulunuz. Bu düzlemleri küpün içinde kalan kısmı ile gösteriniz.

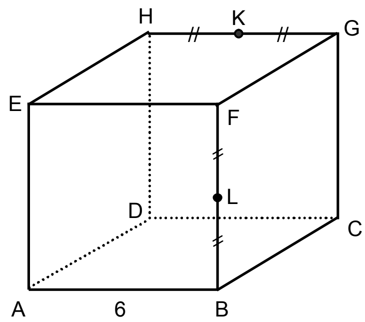
(ACG)



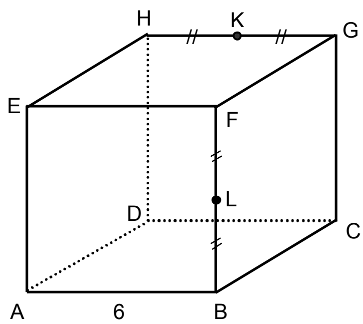
(ADG)



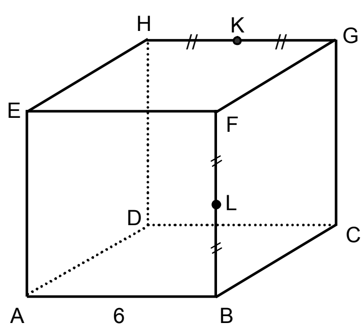
(BCE)



(BDF)

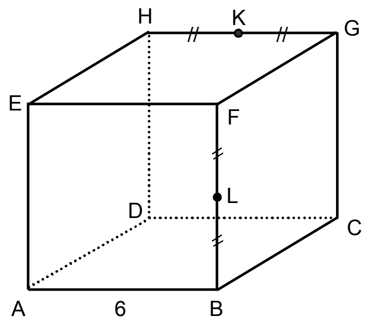


(DEG)

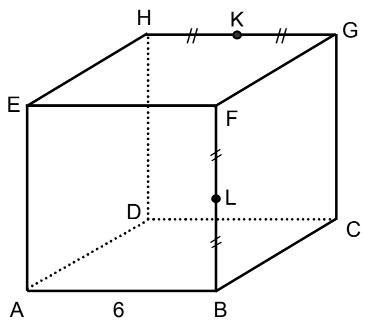


f. (ABK), (ALK), (CKL), (DAL) ve (DLK) düzlemlerinin denklemlerini bulunuz.
Bu düzlemleri küpün içinde kalan kısmı ile gösteriniz.

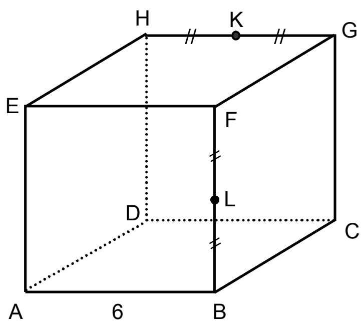
(ABK)



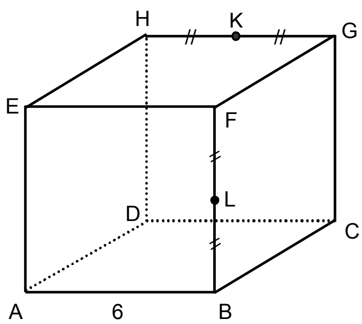
(ALK)



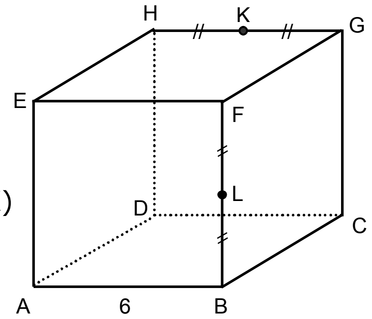
(CKL)



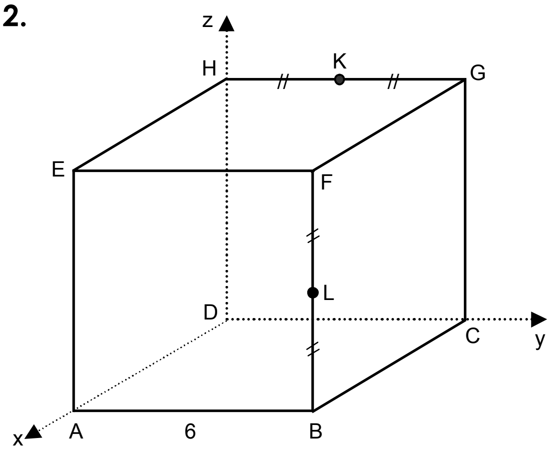
(DAL)



(DLK)

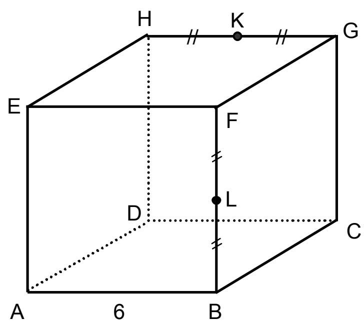


2.

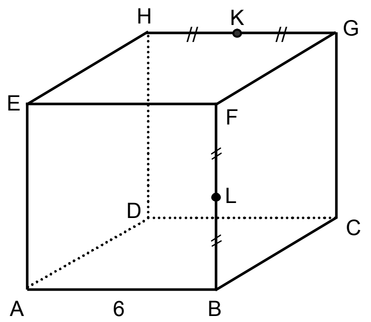


Ayrıt uzunluğu 6 birim olan ABCDEFGH küpü, D-xyz koordinat sistemine şekildeki gibi yerleştirilmiştir.
$K \in [HG]$, $L \in [BF]$, $|HK| = |KG|$ ve $|BL| = |LF|$'dir.

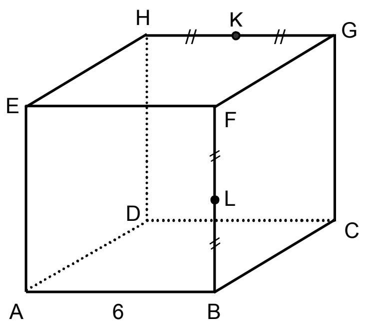
a. K'dan geçen ve EK doğrusuna dik olan düzlemi belirtiniz ve bu düzlemin denklemini bulunuz.
Bu düzlemi küpün içinde kalan kısmı ile gösteriniz.



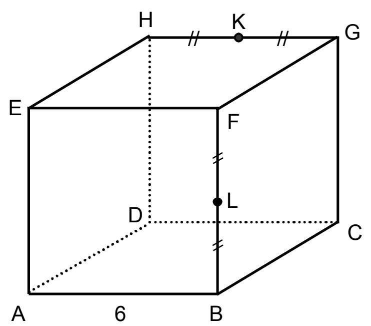
b. E ile K noktalarından geçen ve CG doğrusuna paralel olan düzlemi belirtiniz ve bu düzlemin denklemini bulunuz.
Bu düzlemi küpün içinde kalan kısmı ile gösteriniz.



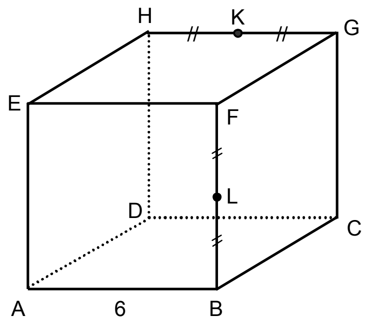
c. B noktasından geçen ve CE doğrusu ile AK doğrusuna paralel olan düzlemi belirtiniz ve bu düzlemin denklemini bulunuz.
Bu düzlemi gösteriniz.



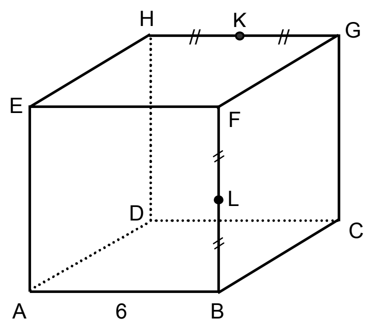
d. A noktasından geçen ve (BFK) düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.
Bu düzlemi küpün içinde kalan kısmı ile gösteriniz.



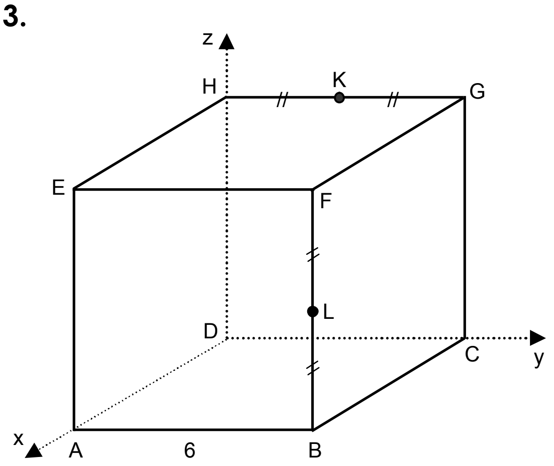
e. B noktasından geçen ve (AEK) düzlemine paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.
Bu düzlemi gösteriniz.



f. C noktasından geçen ve BK doğrusu ile DL doğrusuna paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.
Bu düzlemi gösteriniz.

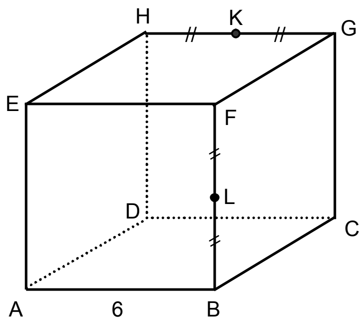


3.

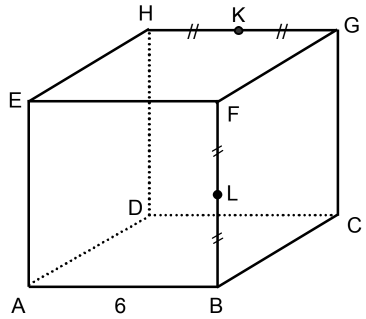


Ayrıt uzunluğu 6 birim olan ABCDEFGH küpü, D-xyz koordinat sistemine şekildeki gibi yerleştirilmiştir.
$K \in [HG]$, $L \in [BF]$, $|HK| = |KG|$ ve $|BL| = |LF|$ 'dir.

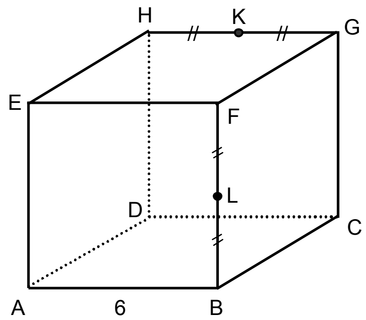
a. (ABC) ile (DKL) düzlemlerinin arakesitini belirtiniz ve arakesitin denklemini bulunuz.
Bu düzlemleri ve arakesiti, küpün içinde kalan kısmı ile gösteriniz.



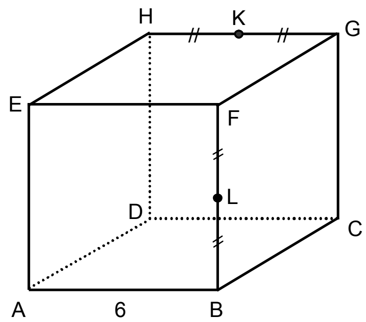
b. (ABC) ile (EKL) düzlemlerinin arakesitini belirtiniz ve arakesitin denklemini bulunuz.
Bu düzlemleri ve arakesiti gösteriniz.



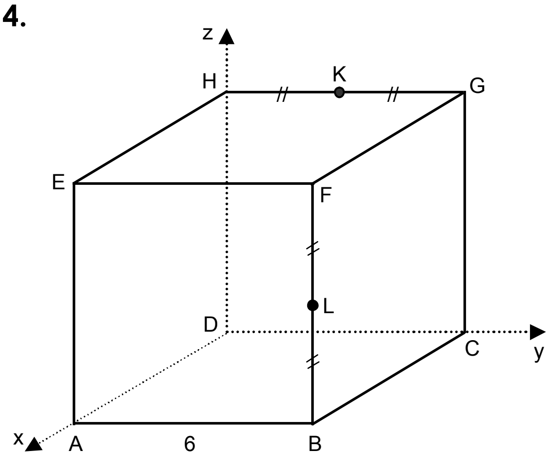
c. (ADG) ile (BKE) düzlemlerinin arakesitini belirtiniz ve arakesitin denklemini bulunuz.
Bu düzlemleri ve arakesiti, küpün içinde kalan kısmı ile gösteriniz.



d. (AFH) ile (EKL) düzlemlerinin arakesitini belirtiniz ve arakesitin denklemini bulunuz.
Bu düzlemleri ve arakesiti, küpün içinde kalan kısmı ile gösteriniz.

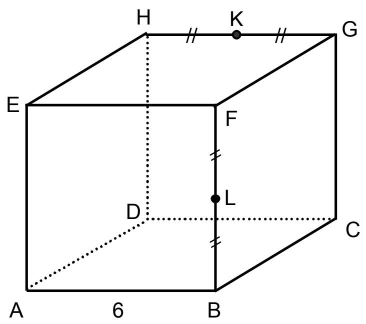


4.

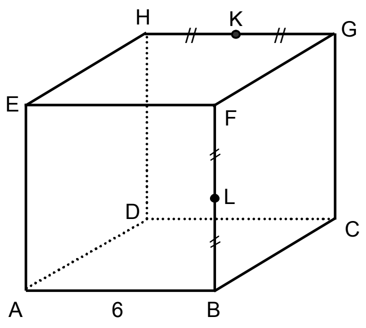


Ayrıt uzunluğu 6 birim olan ABCDEFGH küpü, D-xyz koordinat sistemine şekildeki gibi yerleştirilmiştir.
$K \in [HG]$, $L \in [BF]$, $|HK| = |KG|$ ve $|BL| = |LF|$ 'dir.

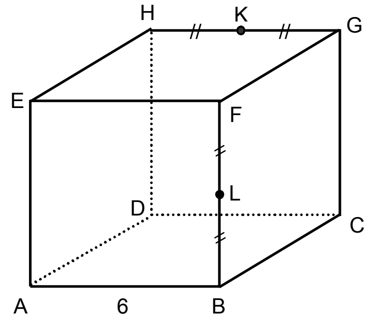
a. HL doğrusunun (ABC) düzlemini deldiği noktayı bulunuz.
Şekil ile gösteriniz.



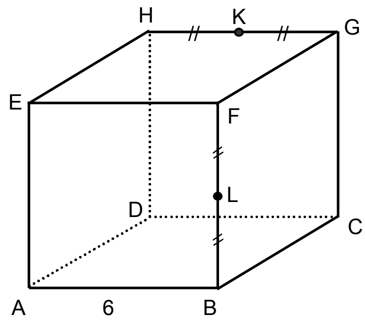
b. BK doğrusunun (ACF) düzlemini deldiği noktayı bulunuz.
Şekil ile gösteriniz.



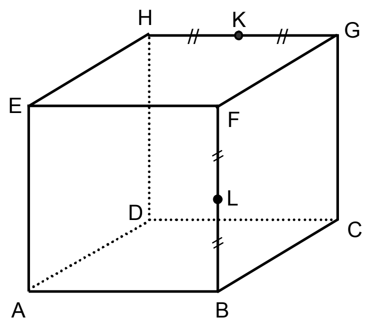
c. KL doğrusunun (BEG) düzlemini deldiği noktayı bulunuz.
Şekil ile gösteriniz.



d. AK doğrusunun (CEL) düzlemini deldiği noktayı bulunuz.
Şekil ile gösteriniz.

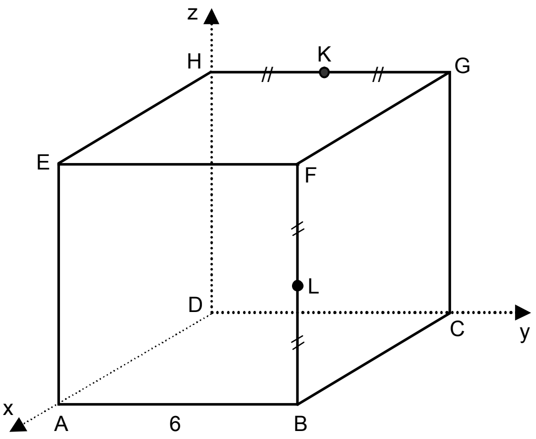


5. Siz de; doğrular, düzlemler, bunların arakesitleri ve bunların denklemleri üzerine problemler kurunuz. Kurduğunuz problemleri çözünüz.



Bu şekil, problemlerinizden biri içindir.

Örnek Çözümler



1. a. $B(6,6)$

b. $FG: \ (x,y,z)=(0,6,6)+\lambda(1,0,0)$

c. $DL: \ (x,y,z)=\lambda(2,2,1)$

d. $(BCGF): \ y=6$

e.

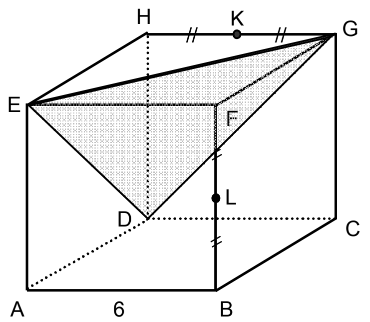
I. yol: (DEG) düzleminin değişen bir noktası $P(x,y,z)$ olsun.

$D(0,0,0)$, $E(6,0,6)$ ve $G(0,6,6)$ olduğundan;

$\overrightarrow{DP}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{DE}=(6,0,6)$ ve $\overrightarrow{DG}=(0,6,6)$

olur. $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{DE}$ ve $\overrightarrow{DG}$ vektörleri doğrusal bağımlı olacağından, bunları satır satır yazdığımızda elde edeceğimiz matrisin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu eşitlik bize (DEG) düzleminin denklemini verir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}=0 \ \Rightarrow \ (DEG): x+y-z=0 \text{ bulunur.}$$



(DEG)

II. Yol

$\overrightarrow{DE}=(6,0,6)$ ve $\overrightarrow{DG}=(0,6,6)$ vektörlerinin vektörel çarpımı, (DEG) düzleminin normal vektörünü verir.

$$\vec{n}=\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DG}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}=-36e_1-36e_2+36e_3$$

$$\Rightarrow \vec{n}=(-36,-36,36)$$

En sade biçimiyle, $\vec{n}=(1,1,-1)$ alınabilir.

Normal vektörü, $\vec{n}=(1,1,-1)$ olan düzlemin denklemi $(1)\cdot x+(1)\cdot y+(-1)\cdot z+d=0$ biçimindedir. (DEG) düzlemi için $D(0,0,0)$ noktası bu denklemi sağlar.

$(DEG): x+y-z=0$ bulunur.

III. yol

Bir düzlemin denklemi, $ax+by+cz+d=0$ biçimindedir.

(DEG) düzlemi için; $D(0,0,0)$, $E(6,0,6)$ ve $G(0,6,6)$ noktaları bu denklemi sağlamalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} d=0 \\ 6a+6c=0 \\ 6b+6c=0 \end{array}\right\} \text{ sisteminden, } a=b=-c \text{ ve}$$

$(DEG): x+y-z=0$ bulunur.

2. c. İstenen düzleme (R) diyelim. (R) düzleminin değişen bir noktası $P(x,y,z)$ olsun.

$D(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,6,0)$ $E(6,0,6)$ ve $K(0,3,6)$ olduğundan;

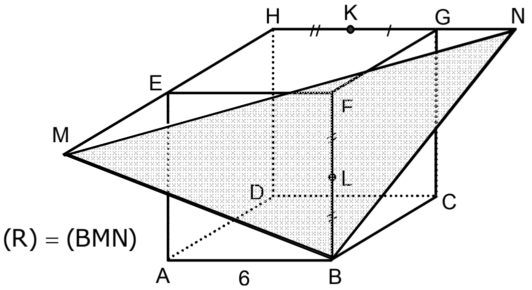
$\overrightarrow{BP}=(x-6,\ y-6,\ z)$, $\overrightarrow{CE}=(6,-6,6)$ ve $\overrightarrow{AK}=(-6,3,6)$ olur.

$\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CE}$ ve $\overrightarrow{AK}$ vektörleri düzlemsel olup doğrusal bağımlı olacağından, bunları satır satır yazdığımızda elde edeceğimiz matrisin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu eşitlik bize (R) düzleminin denklemini verir:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-6 & z \\ 6 & -6 & 6 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (R): 3x+4y-z=42$$

bulunur.

(R) düzlemini şekil ile gösterebilmek için; bu düzlemi, B'den geçen ve doğrultu vektörleri $\overrightarrow{CE}$ ile $\overrightarrow{AK}$ olan doğruların belirttiği görülmelidir.
(Şekilde, BM ve BN)



$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE}$ ve $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AK}$ eşitliklerini sağlayan M ve N noktalarının (R) düzlemine ait olacağı da düşünülebilirdi.

2. e.

I. Yol: Paralel iki düzlemin normal vektörleri doğrusal bağımlıdır. Başka bir deyişle, bunlar aynı vektör olarak alınabilir.
$\overrightarrow{AE} = (0,0,6)$ ve $\overrightarrow{AK} = (-6,3,6)$ vektörlerinin vektörel çarpımı (AEK) düzleminin, dolayısıyla, istenen (S) düzleminin normal vektörünü verir.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AK}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 6 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -18e_1 - 36e_2$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (-18,-36,0)$$

En sade biçimiyle, $\vec{n} = (1,2,0)$ alınabilir.

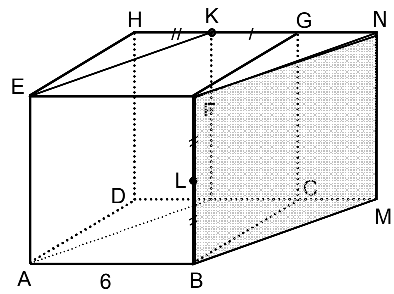
Normal vektörü, $\vec{n} = (1,2,0)$ olan düzlemin denklemi $(1)\cdot x + (2)\cdot y + (0)\cdot z + d = 0$ biçimindedir. (S) düzlemi için $B(6,6,0)$ noktası bu denklemi sağlar.

$(S): x+2y=-18$ bulunur.

II. Yol

B noktasından geçen ve (AEK) düzlemine paralel olan (S) düzleminin, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CF}$ ve $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AK}$ eşitliklerini sağlayan $F(6,6,6)$ ve $N(0,9,6)$ noktalarından da geçtiği görülür.
$B(6,6,0)$, $F(6,6,6)$ ve $N(0,9,6)$ noktalarından geçen düzlemin denklemi "1.e" deki yollardan biri ile bulunur.

$(S): x+2y=-18$ ya da $(BFN): x+2y=-18$ yazılır.



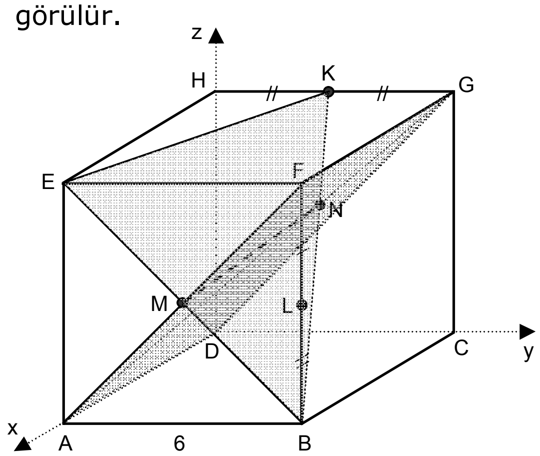
3. İki düzlemin arakesitinin denklemini bulmak için;

I. Bu düzlemlerin denklemleri bulunur; bu denklemlerin ortak çözümleri yapılır.

II. Bu düzlemlerin ortak iki noktası bulunur; bu noktalardan geçen doğrunun denklemi arakesitin denklemi olur.

3. c.

I. Yol: Şekilden,
$(ADG) = (AFGD)$ olduğu;
AG ile BK'nın (ABGH) düzleminde olduğu;
AF ile BE'nin (ABFE) düzleminde olduğu görülür.



$AF \cap BE = \{M\}$ ve $AG \cap BK = N$ ise (ADG) ve (BKE) düzlemlerinin arakesiti MN doğrusu olur.

$AF : (x, y, z) = (6, 0, 0) + \lambda_1 (0, 1, 1);$

$BE : (x, y, z) = (6, 6, 0) + \lambda_2 (0, -1, 1);$

$AG : (x, y, z) = (6, 0, 0) + \lambda_3 (-1, 1, 1);$

$BK : (x, y, z) = (6, 6, 0) + \lambda_4 (-2, -1, 2)$

denklemlerinden,

$AF \cap BE = \{M\}$ için

$(6, 0, 0) + \lambda_1 (0, 1, 1) = (6, 6, 0) + \lambda_2 (0, -1, 1)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 6 - \lambda_2$ ve $\lambda_1 = \lambda_2$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$\Rightarrow M(6, 3, 3)$

ve aynı yolla, $N(2, 4, 4)$ elde edilir.

$MN : (x, y, z) = (6, 3, 3) + \lambda (-4, 1, 1)$ bulunur.

4. d. AK doğrusu ile (CEL) düzleminin kesiştikleri noktanın bulunması için, bunların denklemlerinin ortak çözümü yapılır.

$A(6,0,0)$, $K(0,3,6)$ ve

$C(0,6,0)$, $E(6,0,6)$, $L(6,6,3)$

noktaları ile, bilinen yollardan,

$AK : (x, y, z) = (6, 0, 0) + \lambda (-2, 1, 2)$ ve

$(CEL) : x - y - 2z + 6 = 0$ bulunur.

AK'nın denkleminden bulunacak, $x = 6 - 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 2\lambda$ değerleri (CEL) düzleminin denkleminde yerlerine yazılırsa,

$AK \cap (CEL) = \left\{\left(\frac{18}{7}, \frac{12}{7}, \frac{24}{7}\right)\right\}$

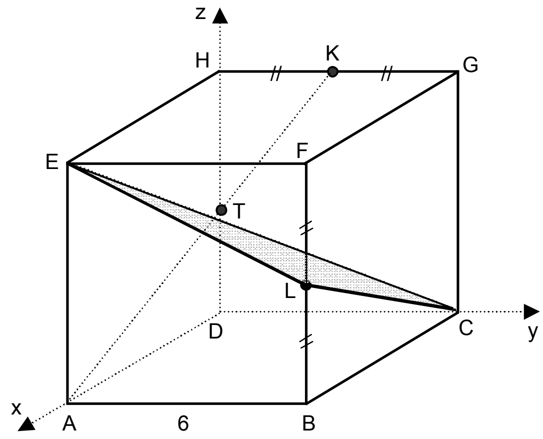
ya da;

$AK \cap (CEL) = \{T\}$ denirse,

$T\left(\frac{18}{7}, \frac{12}{7}, \frac{24}{7}\right)$

elde edilir.

Şekil incelendiğinde; T noktasının, CEL üçgensel bölgesinin dışında olacağı görülür.



Bu durumda; (CEL) düzlemini, küpün içinde kalan kısmı ile göstermek daha uygun olur.

Bunun için; DH doğrusunun (CEL) düzlemini kestiği noktayı bulmak yeter.

$DH : (x, y, z) = \lambda (0, 0, 1)$ ve

$(CEL) : x - y - 2z + 6 = 0$

denklemlerinin ortak çözümünden

$DH \cap (CEL) = \{U\}$

$\Rightarrow U(0, 0, 3)$

bulunur.

(CEL) düzleminin, küpün içinde kalan kısmı aşağıdaki şekilde verildiği gibidir.

$(CEL) = (CLEU)$