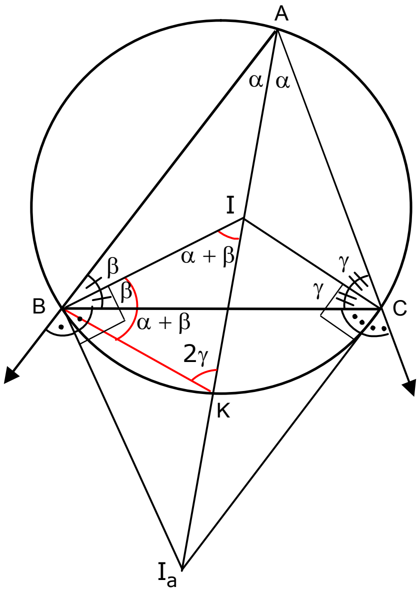
Problem-1 (Düzlem Geometri)

Bir ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktası I, B ve C açılarına ait dış açıortayların kesim noktası I_a olsun.

I_aI doğrusunun ABC üçgeninin çevrel çemberini kestiği K noktasının, $[I_aI]$ doğru parçasını ortaladığını gösteriniz.

Çözüm



$m(\sphericalangle A) = 2\alpha$, $m(\sphericalangle B) = 2\beta$, $m(\sphericalangle C) = 2\gamma$ olsun.

[AI], [BI], [CI] iç açıortaylar,

$[BI_a]$ ve $[CI_a]$ dış açıortaylardır.

$m(\sphericalangle AKB) = m(\sphericalangle ACB) = 2\gamma$, (Çevre açılar)

$m(\sphericalangle BIK) = \alpha + \beta$ ve

$\alpha + \beta + \gamma = 90°$ olduğundan

$m(\sphericalangle KBI) = \alpha + \beta$ olur.

BI ve BI_a iç ve dış açıortaylar olduğundan

$BI \perp BI_a$ 'dır.

BI_aI dik üçgeninde,

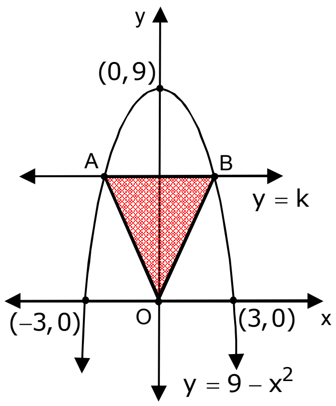
$|BK| = |IK| = |KI_a|$

bulunur.

Problem-2 (Türevin Uygulaması)

Bir köşesi başlangıç noktası; diğer iki köşesi, $k > 0$ olmak üzere, $y = k$ doğrusu ile $y = 9 - x^2$ parabolünün kesim noktaları olan ABC üçgeninin alanının en büyük değerini bulunuz.

Çözüm



$A(-a, 9 - a^2)$ denilirse, $B(a, 9 - a^2)$ olur.

$|AB| = 2a$ ve

$$A(\triangle ABC) = \frac{2a \cdot (9 - a^2)}{2}$$

$\Rightarrow A(\triangle ABC) = f(a) = 9a - a^3$ bulunur.

f(a) fonksiyonunun extremum yaptığı noktada $f'(a) = 0$ olacaktır.

$f'(a) = 9 - 3 \cdot a^2 = 0$

$\Rightarrow a = \sqrt{3}$ olur.

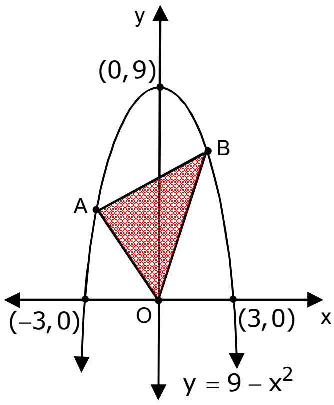
$a = \sqrt{3}$ değeri için alanın en büyük olacağı görülür.

$A_{max}(\triangle ABC) = 6 \cdot \sqrt{3}$ elde edilir.

Problem-3 (Türevin Uygulaması)

Bir köşesi başlangıç noktası; diğer iki köşesi, $y > 0$ olmak üzere, $y = 9 - x^2$ parabolünün üzerinde bulunan ABC üçgeninin alanının en büyük değerini bulunuz.

Çözüm



$A(a, 9 - a^2)$ ve $B(b, 9 - b^2)$ olsun.

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\left[a(9 - b^2) - b(9 - a^2)\right]$$

$$\Rightarrow A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\left(9a - 9b + a^2b - ab^2\right)$$

$$\Rightarrow f(a,b) = \frac{1}{2}\left(9a - 9b + a^2b - ab^2\right) \text{ bulunur.}$$

$f(a,b)$ fonksiyonunun a ve b'ye göre 1. ve 2. kısmi türevlerini bulup 1.'leri sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{9}{2} + ab - \frac{1}{2}b^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -\frac{9}{2} - ab + \frac{1}{2}a^2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = b$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = -a$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = a - b$$

(1) ve (2)'den,

$(a,b) = (-3,3)$ ve $(a,b) = (3,-3)$ bulunur.

$$\Delta = \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}\right)^2\right]_{(-3,3)}$$ olmak üzere,

$\Delta > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} > 0$ olduğundan,

$(a,b) = (-3,3)$ değerleri bir minimuma karşılık gelir.

$(a,b) = (3,-3)$ için de aynı sonuca varılır.

Bu değerler $A(-3,0)$ ve $B(3,0)$ noktalarına karşılık gelirler.

Bu değerler için $A(\triangle ABC) = 0$ olup en küçüktür.

$-3 \le a \le 0$ aralığında değişen a değeri 0 olduğunda $A(\triangle ABC)$ değerinin en büyük olması beklenir. $a = 0$ değeri $A(0,9)$ noktasına karşılık gelir.

(1) denkleminden $a = 0$ iken $b = \mp 3$ olduğu görülür.

Bu da, B(-3,0) ya da B(3,0) noktasına karşılık gelir.

$A_{max}(\triangle ABC) = \frac{27}{2}$ elde edilir.

$y > 0$ koşulu ile,

$A_{max}(\triangle ABC) < \frac{27}{2}$ olacaktır.